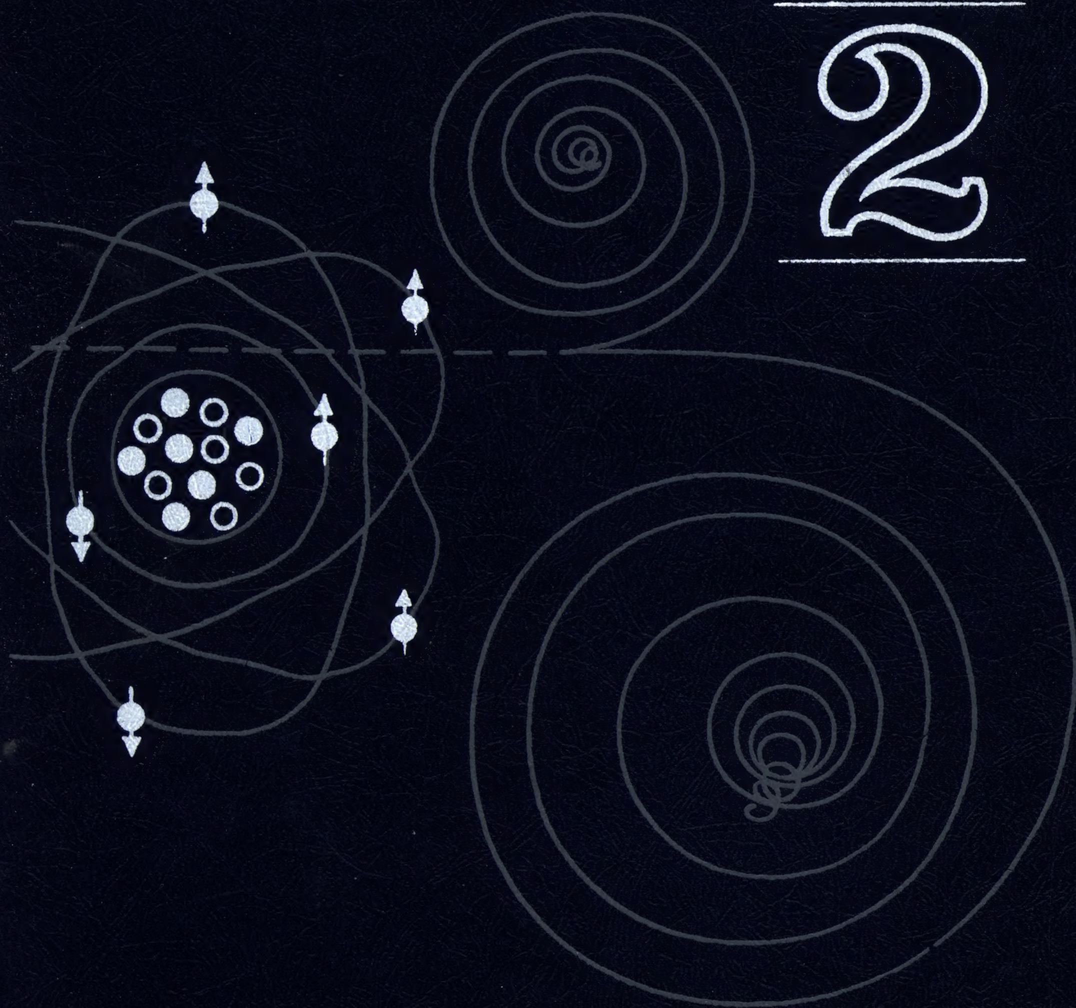
Кл. Э. Суорц

Необыкновенная ФИЗИКА обыкновенных ЯВЛЕНИЙ

2



Кл. Э. Суорц

Необыкновенная ФИЗИКА обыкновенных ЯВЛЕНИЙ

ТОМ 2

Перевод с английского
Е. И. БУТИКОВА и А. С. КОНДРАТЬЕВА

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1987

ББК 22.3
С89
УДК 53(023)

PHENOMENAL PHYSICS

CLIFFORD E. SWARTZ

The State University of New York
at Stony Brook

JOHN WILEY & SONS

New York
Chichester
Brisbane
Toronto

Суорц Кл. Э.

С 89 Необыкновенная физика обыкновенных явлений: Пер. с англ. В 2-х т. Т. 2. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 384 с., ил.

В книге дано современное изложение начал физики. Каждая глава начинается разделом «Знакомство с явлениями», в котором читателю предлагается проделать простейшие опыты и наблюдения с помощью легкодоступных подручных средств. Подобранные примеры с минимальным использованием математических средств позволяют развить физическую интуицию и умение применять знание физики в практической деятельности. В русском издании книга разделена на два тома. Во второй том вошли главы, посвященные волнам, оптике, электромагнетизму, физике микромира.

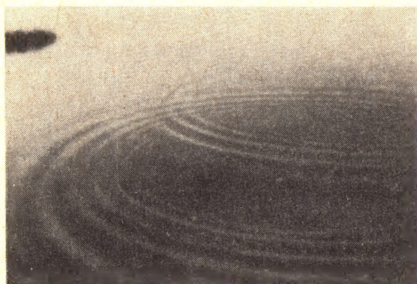
Для учащихся общеобразовательной и профессиональной школ, а также для лиц, занимающихся самообразованием.

С $\frac{1704010000-053}{053(02)-87}$ 112-86

ББК 22.3
53

ГЛАВА 15. ВОЛНОВЫЕ ИМПУЛЬСЫ И ПРОСТЫЕ ВОЛНЫ

Колебания окружают нас всюду. Вибрирующий воздух доносит звуки до наших ушей. Осциллирующие электрическое и магнитное поля приносят свет в наши глаза. У нас под ногами подобно гигантскому колоколу вибрирует Земля. Во всех этих случаях производимое



в одном месте возмущение приводит к передаче энергии и информации в другое место.

Однако в волнах никакого переноса вещества не происходит. В случае звуковых волн или волн на поверхности воды или земли возмущение распространяется благодаря изменениям, происходящим в упругой среде. При колебаниях воздуха его давление периодически повышается и понижается. Поверхность воды может подниматься и опускаться. Колебания земли могут происходить как вверх и вниз, так и вперед и назад вдоль ее поверхности, а также в ее глубине. Для распространения света никакой физической среды не требуется; осциллирующие электрическое и магнитное поля создают и поддерживают друг друга при движении волнового импульса.

Замечательная черта волнового движения заключается в том, что при благоприятных обстоятельствах оно может переносить энергию на громадные расстояния с очень малыми потерями. Земля нагревается электромагнитным излучением, приходящим от Солнца. Мы в свою очередь можем послать радиоволны к планетам и за их пределы. Внезапный сдвиг земной поверхности в одном месте может вызвать колебания, способные разрушить дома, отстоящие на много миль. Подводное землетрясение в океане может создать *цунами*, которые иногда называют приливной волной.

Землетрясение 1 апреля 1946 года вблизи Алеутских островов всколыхнуло Тихий океан с такой амплитудой, что были разрушены селения на его берегах, отстоящих от эпицентра землетрясения на 4000 миль.

В этой главе мы изучим явления, связанные с распространением одиночных волновых импульсов и простых волн. Почему происходит распространение возмущения в упругой среде? Как зависит скорость распространения от свойств среды и самой волны? Что происходит, когда волна ударяется о границу среды или проходит из одной среды в другую, как, например, из воздуха в воду? Чем определяется переносимая волной энергия? В чем заключается «простота» простой волны? Каковы соотношения между частотой, длиной волны и скоростью в такой волне?

Мы установим немногочисленные основные принципы, управляющие волновым движением, изучая волны, которые легко получить и наблюдать в длинных веревках или на поверхности воды. Затем применим эти принципы для объяснения многих явлений, которые мы видим, слышим или ощущаем ежедневно.

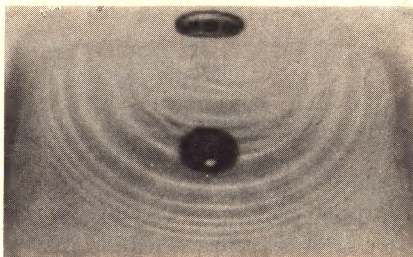
ЗНАКОМСТВО С ЯВЛЕНИЯМИ

1. Можно наблюдать распространение и отражение волновых импульсов и волн, используя веревку или тяжелый провод, – чем он длиннее и тяжелее, тем лучше. Прикрепите один конец веревки к чему-либо неподвижному. Туго натяните веревку и пошлите вдоль нее импульс быстрым боковым движением руки. Обратите внимание, чтó происходит с импульсом, когда он достигает закрепленного конца. В частности, если вы посылаете импульс вдоль веревки по ее правой от вас стороне, то по какой стороне импульс возвращается?

Понаблюдайте, что происходит со скоростью импульса, когда вы держите веревку натянутой слабо или очень сильно. Если у вас есть несколько веревок разной толщины, сравните скорости импульсов в легких и тяжелых веревках. Привяжите конец тяжелой веревки к очень длинной легкой бечевке или шнурку. Другой конец шнурка привяжите к неподвижной опоре и пошлите импульс вдоль веревки. Понаблюдайте, что происходит с импульсом, когда он переходит из одной среды в другую. Что происходит со скоростью импульса? Если в месте соединения появляется отраженный импульс, то возвращается он по той же стороне веревки или по противоположной?

Отличной «веревкой» для таких опытов может служить садовый шланг. Можно значительно изменить плотность шланга, просто заполняя его водой (при условии, что у вас есть наконечник с пробкой). Понаблюдайте изменение скорости импульса, если шланг заполнен водой.

2. Много различных волновых явлений можно наблюдать на поверхности воды в стакане или в заполненной водой раковине умывальника, или, лучше



всего, в пруду. Дома используйте и умывальник, и мелкий противень. Понаблюдайте, как в частично заполненной раковине по поверхности воды разбегаются волны от падающих из крана редких капель. Обратите внимание на форму фронтов расходящихся волн и посмотрите, что происходит, когда они ударяются в стенки раковины.

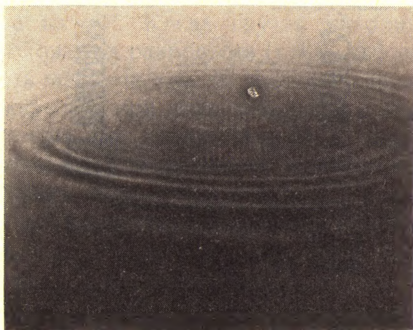
Используя большой плоский противень, легко контролировать глубину воды. Сделайте так, чтобы глубина не превышала 1 см. Приподнимая противень за один конец, можно получить постепенно изменяющуюся глубину. Посмотрите, как изменяется скорость ряби, когда глубина уменьшается до нуля.

В противне вы можете получить бегущие импульсы от точечного источника, погружая в воду палец, или можете создать волны с длинным прямым фронтом с помощью линейки или куска картона. Рябь будет отражаться от краев (границы) противня. Посмотрите

на отражения волн, ударяющихся в край под углом около 45°.

Вы можете в малом масштабе воспроизвести цунами, слегка приподнимая один конец противня и затем быстро опуская его обратно. Обратите внимание, как мало энергии поглощается из бегущей волны, пока она не ударится о границу. Но даже и тогда, возможно, останется достаточно энергии, чтобы всплески прокатились много раз туда и обратно.

3. Если вы найдете подходящий пруд, многие из этих эффектов можно воспроизвести в большем масштабе без помех со стороны близких границ.



В частности, бросив в пруд камень, понаблюдайте за амплитудой волнового фронта по мере его расширения. Попытайтесь оценить скорость ряби на поверхности пруда. Если вы будете ритмичными движениями опускать в воду палку или палец, получится стационарная цепочка волн, уходящих от источника. Испробуйте две разных частоты колебаний, удобных для измерения, – скажем, один раз и два раза в секунду. Оцените расстояния между гребнями в каждом случае. Соотношение расстояния между гребнями, частоты и скорости таково:

$$\text{расстояние} \cdot \text{частота} = \text{скорость}.$$

Грубые оценки этих величин достаточно хорошо показывают, что приведенное соотношение правдоподобно.

4. Если вы можете заполучить какой-либо струнный инструмент, понаблюдайте, каковы соотношения между высотой издаваемого звука и длиной струны, ее натяжением, плотностью материала или толщиной струны. У скрип-

ки или гитары все струны имеют приблизительно одинаковую длину. Но звучащую часть струны можно укорачивать, прижимая струну к одному из ладов на грифе. Струны, издающие самый высокий и самый низкий звук, совершенно явно различаются по плотности или толщине. Высоту звука струны можно подстраивать, изменяя ее натяжение. Попробуйте варьировать все эти различные параметры до тех пор, пока не поймете, хотя бы качественно, как каждый из них влияет на высоту звука, издаваемого струной.

Поднимите крышку рояля и осмотрите устройство молоточков, струн и деки. Обратите внимание на то, что струны, издающие высокие и низкие ноты, различаются не только по длине, но также и по толщине или плотности. При открытой крышке рояля напойте или насвистите над струнами какую-нибудь ноту по возможности чисто и громко. Вы должны услышать, что по крайней мере одна из струн ответит вам звучанием на той же самой ноте.

Растяните резиновое колечко между пальцами и щипком заставьте его зву-

чать. Вы без труда можете изменять натяжение, чтобы получать более высокие или более низкие ноты. Эти звуки, скорее всего, будут слабыми и не очень музыкальными. Теперь прижмите растянутое резиновое кольцо к стеклянному стакану. Снова щипком возбудите звучание резинки. Вы услышите совершенно другой звук.

Заметьте, что большинство струнных инструментов имеет деки или какого-либо типа воздушные резонаторные полости.

5. Чтобы вызвать и услышать эхо, вовсе не обязательно искать подходящую долину в горах. Для этой цели столь же хорошо подходит большая плоская кирпичная стена. Стена, однако, должна быть настолько большой, что, даже когда вы отойдете от нее на 30 или 40 метров, она все еще должна быть видна под значительным углом. Резко хлопните в ладоши и слушайте эхо, приходящее почти мгновенно. Когда вы будете уверены в том, что услышали его, можете измерить время, в течение которого звук от ваших ладоней возвращается обратно. Для этого ритмично хлопайте в ладоши, подобрав частоту так, чтобы эхо приходило в промежутках между хлопками. Если вы хлопаете три раза в секунду, то время распространения звука составляет 1/6 секунды. Поэтому звук от ваших ладоней идет до стены в течение 1/12 секунды (и в течение 1/12 секунды возвращается назад). Вы можете найти скорость звука, измерив шагами расстояние до стены и разделив его на 1/12 секунды.

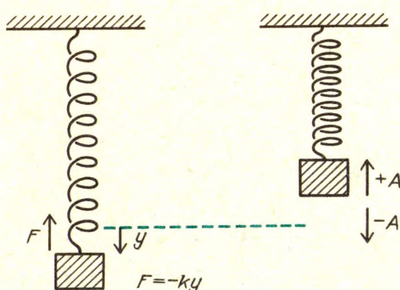
6. Если у вас есть хорошая акустическая стереосистема, воспроизведите какую-нибудь из имеющихся испытательных записей. Большинство из них в течение нескольких секунд издают звук из каждого частотного диапазона, от очень низких звуков до очень высоких. Если вы достанете такую запись, испытайте вашу акустическую систему и собственный слух, чтобы определить свой диапазон частот, а также найдите частоты знакомых вам нот. Например, найдите частоту музыкальных нот *C* (*до*) или *A* (*ля*), по которым настраивают инструменты оркестра.

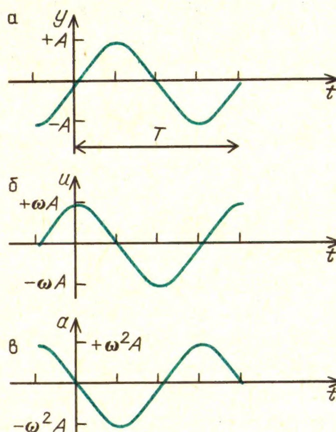
КОЛЕБАНИЯ ОСЦИЛЛЯТОРА

В главе 6 был описан частный вид колебаний грузика на пружине. Такое движение было названо простым гармоническим колебанием.

Вопрос 15-1
Что простого в этом движении и почему оно называется гармоническим?

Если справедлив закон Гука, а это так для большинства пружин (по крайней мере для малых смещений), действующая на груз возвращающая сила





пропорциональна смещению из положения равновесия. В результате смещение дается выражением

$$y = A\sin\omega t = A\sin(2\pi f t) = A\sin 2\pi\,(t/T).$$

Эта функция показана на рис. *а*. Частота в циклах за секунду обозначена f. Стандартное наименование в СИ для «циклов за секунду» – герц, сокращенно Гц. Круговая частота равна $\omega = 2\pi f$.

Период одного колебания равен $T = 1/f$. Амплитуда колебания A равна максимальному смещению. Грузик движется между $+A$ и $-A$.

В главе 6 было показано, что скорость грузика дается выражением

$$u = \Delta y/\Delta t = \omega A \cos \omega t.$$

(Обратите внимание, что скорость при колебаниях мы обозначили через u. Символ v сохраним для скорости волны или импульса, распространяющегося по системе осцилляторов.) Эта функция изображена на рис. *б*. Заметьте, что как смещение, так и скорость представляют собой синусоидальные функции, но сдвинутые друг относительно друга по фазе на 90°. Когда грузик находится в положении равновесия ($y = 0$), его скорость максимальна по модулю, она положительна при движении вверх и отрицательна при движении вниз. С другой стороны, когда смещение максимально, скорость обращается в нуль.

Ускорение грузика дается выражением

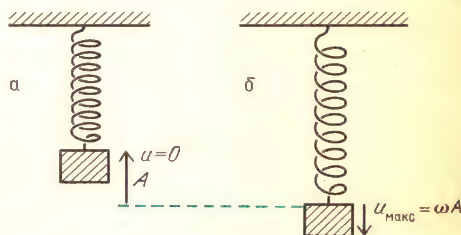
$$a = \Delta u/\Delta t = -\omega^2 A \sin \omega t.$$

Эта функция показана на рис. *в*. Это снова синусоидальная функция, сдвинутая по фазе на 90° относительно скорости и на 180° относительно смещения. Каждый раз, когда смещение равно нулю и скорость максимальна, ускорение грузика равно нулю. Когда смещение положительно и максимально, ускорение отрицательно и максимально по модулю. Этого и следовало ожидать, поскольку ускорение пропорционально действующей на грузик силе, которая в свою очередь пропорциональна смещению, взятому с противоположным знаком. Когда грузик смещен в некотором направлении, сила (и, следовательно, ускорение) имеет направление, противоположное направлению смещения, каждый раз стремясь возвратить грузик в его равновесное положение.

Если грузик сместить на расстояние A и затем освободить, он будет осциллировать так, как было описано выше. Период колебаний определяется жесткостью пружины k и массой грузика m. Жесткость пружины – это постоянная в законе Гука: $F = -ky$. Период этих свободных колебаний равен $T = 2\pi\sqrt{m/k}$. Обратная величина равна их частоте: $f = (1/2\pi)\sqrt{k/m}$. Это довольно разумный результат, так как жесткая пружина с большой постоянной k будет стремиться быстро возвратить грузик в положение равновесия и тем самым способствовать высокой частоте колебаний. С другой стороны, массивный груз обладает большой инертностью, его движение будет замедленным и частота колебаний – низкой.

Однако осциллирующая система не обязательно должна совершать колебания на своей собственной частоте; вы можете раскачивать детские качели с любой частотой, на какую вы физически способны. И не обязательно раскачивающее движение должно быть синусоидальным. Но если вы раскачиваете качели на их собственной частоте или даже сообщаете им короткие толчки, следующие с этой частотой, реакция качелей будет гораздо значительней. Говорят, что в этом случае частота вынуждающей силы находится в резонансе с собственной частотой. Соответствующая амплитуда колебаний может стать очень большой даже при слабых толчках. Конечно, именно это и происходит, когда вы раскачиваете качели на нужной частоте.

В отсутствие трения энергия осциллятора, совершающего колебания на собственной частоте без вынуждающей силы, должна оставаться постоянной.

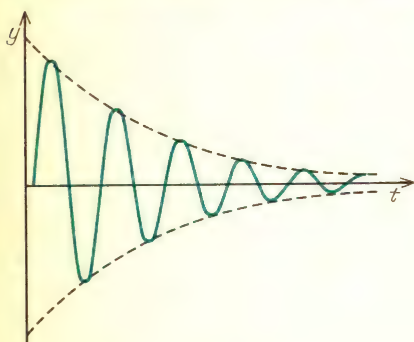


В некоторые моменты времени эта энергия целиком кинетическая, в другие – потенциальная. При максимальных отклонениях грузика, когда его скорость равна $u = 0$, потенциальная энергия равна $W_{пот} = (1/2)\,ky^2_{макс} = (1/2)\,kA^2$ (рис. *а*). Когда грузик проходит через положение равновесия, его потенциальная энергия равна нулю, а ско-

рость максимальна. Полная энергия грузика в этой точке равна $W_{кин} = (1/2)mu^2_{макс} = (1/2)m\omega^2A^2$ (рис. *б*).

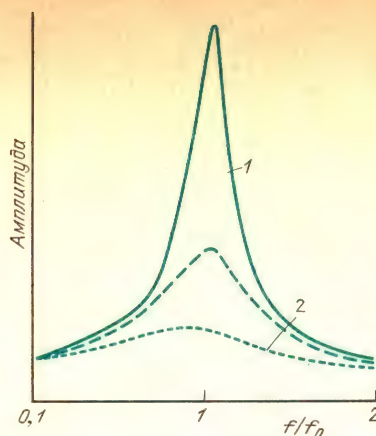
Вопрос 15-2
Не противоречат ли друг другу приведенные выражения? Равна ли максимальная потенциальная энергия максимальной кинетической энергии?

В большинстве физических систем присутствует некоторое трение. При каждом колебании осциллятора некоторая часть энергии теряется и поэтому амплитуда становится все меньше и меньше. График, показывающий типичное затухание колебаний пружины, приведен на рисунке. Обусловленное трением затухание можно предотвратить, сообщая



Затухание амплитуды колебаний пружины при наличии трения

осциллятору достаточную энергию на его собственной частоте. Если осциллятор получает в течение каждого периода больше энергии, чем нужно для компенсации потерь на трение, то амплитуда колебаний будет постепенно нарастать. Этот рост имеет предел, потому что потери на трение обычно увеличиваются с увеличением амплитуды и скорости. Когда осциллятор получает энергию в резонансе с собственной частотой, устанавливается столь большая амплитуда, что потери энергии в точности компенсируются энергией, получаемой за период. На следующем рисунке показана амплитуда как функция частоты вынуждающей силы для нескольких осцилляторов. Во всех случаях имеет место резонансное увеличение амплитуды,



При частоте, равной собственной частоте колебаний, наступает резонанс. Система реагирует на резонансную вынуждающую силу колебаниями большой амплитуды.
1 – малые потери энергии из-за трения, *2* – большие потери

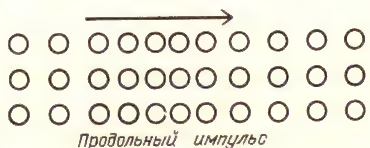
когда частота вынуждающей силы приближается к собственной частоте осциллятора. При больших потерях на трение кривая резонанса широкая и не поднимается до больших значений.

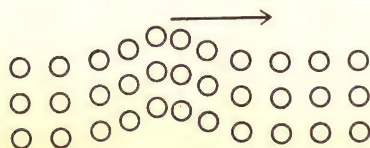
Резонансные явления можно наблюдать в системах многих различных типов. Ваш радио- или телевизионный приемник резонансным образом реагирует на электромагнитные колебания. В главе 22 мы изучим, как такие радиоволны создают и перехватывают. Настраивая свой приемник, вы изменяете его собственную частоту колебаний так, чтобы она совпала с частотой той радиостанции, передачу которой вы хотите прослушать. Очень небольшой энергии, извлекаемой из антенны на этой частоте, достаточно для того, чтобы привести остро настроенную электрическую цепь вашего приемника в колебания со значительным напряжением. Раньше, когда вы пели какую-то ноту над открытым роялем, ваш голос обеспечивал вынуждающую силу определенной частоты для осцилляторов, которые представляют собой натянутые струны. Струна, собственная частота которой совпадала с частотой вашего голоса, приводилась в резонансное колебание. Говорят, когда солдаты маршируют через пешеходный мост, они должны идти не в ногу, чтобы частота их шагов слу-

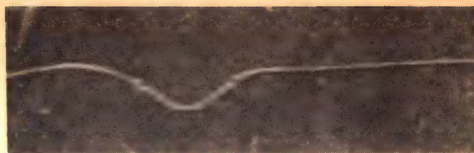
чайно не оказалась близка к одной из собственных частот колебаний подвесного моста. Случалось, что подвесные мосты разрушались даже из-за того, что их колебания возбуждались сильным ветром, который благодаря аэродинамическим свойствам моста поставлял энергию на резонансной частоте.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ВДОЛЬ ЛИНИИ

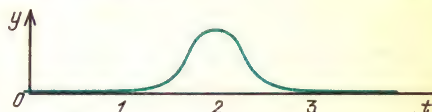
Рассуждая на атомном уровне, можно сказать, что большинство частиц находится в потенциальных ямах и при малых возмущениях ведет себя так, как если бы они удерживались пружинами. Когда кусок металла растягивают или сжимают, каждый атом немного сдвигается из своего равновесного положения. Движение любого атома сказывается на его соседях, а их движение в свою очередь влияет на их соседей. Результирующее смещение распространяется в среде в виде импульса. Если смещение каждой частицы происходит вдоль одной линии с направлением распространения импульса, волну называют *продольной*. Именно так распространяется звук. Ряд областей высокого и низкого давления, или сжатий и разрежений, распространяется от источника. Когда вы забиваете гвоздь молотком, продольный импульс высокой плотности проносится вдоль гвоздя, загоняя его конец глубже в дерево. Смещение среды может также вызвать импульс, распространяющийся перпендикулярно к смещению. Именно такой эффект вы наблюдали, когда резким боковым движением посылали импульс вдоль веревки. Подобное волновое движение называют *поперечным*. Как мы увидим в главе 22, электромагнитное излучение поперечно. Направления электрического и магнитного полей перпендикулярны к направлению, в котором они распространяются. При землетрясениях в земной коре возникают как продольные, так и поперечные волны. Волны на воде обычно представляют собой смесь продольных и поперечных. Каждая отдельная капля воды, возбужденная проходящей волной, совершает движение по эллипсу, перемещаясь как вверх и вниз, так и вперед и назад.







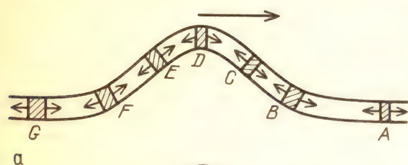
Независимо от того, является ли волновое движение продольным или поперечным, движение каждой отдельной частицы можно описать, выразив ее смещение как функцию времени. Движение частицы вовсе не обязательно будет синусоидальным, и даже обычно оно не бывает таковым. На рисунке показан график смещения как функция времени, $y(t)$, для частицы веревки, вдоль которой распространяется импульс. Этот график выглядит в точности как моментальный снимок веревки с распространяющимся импульсом. Это вполне разумно, поскольку моментальный снимок $y(x)$ показывает, что делает каждая отдельная частица в предшествующий или последующий момент времени.

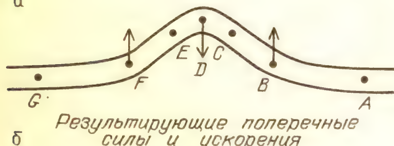


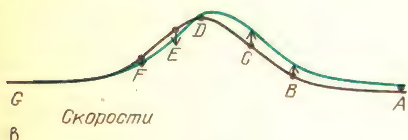
Смещение отдельной частицы веревки, находящейся в точке x_0, как функция времени при прохождении поперечного импульса. При $t = 0$ частица была неподвижна, при $t = 2$ частица была смещена на максимальное расстояние от своего положения равновесия

Моментальный снимок импульса в веревке, показывающий зависимость $y(x)$, не дает никакой информации о направлении распространения импульса.

Откуда сам импульс «узнает», в каком направлении ему двигаться? Заметьте, что веревка натянута, и каждый отдельный ее участок подвержен противоположным силам натяжения, действующим на него с каждой стороны. Пока веревка прямолинейна, действующие на каждый участок силы уравновешены. Однако в тех местах, где веревка искривлена, действующие с двух сторон участка силы равны по модулю, но не лежат вдоль одной прямой. Поэтому возникнет результирующая поперечная сила. На рис. *а* показаны пары сил натяжения, действующие на некоторые

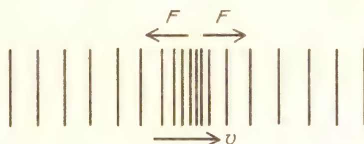






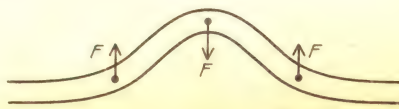
участки веревки, когда по ней пробегает импульс. На рис. *б* показаны результирующие поперечные *силы*. В точке *A*, куда импульс еще не прибыл, противоположные силы натяжения уравновешиваются. В точке *B* есть результирующая сила, направленная вверх. Она стремится поднять участок, прилегающий к этой точке, и сообщить ему направленную вверх скорость. В точке *C*, где форма импульса прямолинейна, противоположные силы натяжения уравновешиваются и результирующая сила равна нулю. Однако участок около точки *C* должен все еще двигаться вверх благодаря предшествовавшему ускорению. Как только импульс искривляется вниз, как на участке около точки *D*, появляется направленная вниз результирующая сила, которая стремится остановить движение вверх этого участка веревки. На участке около точки *E* веревка движется вниз, но результирующая сила равна нулю. Далее от этой точки, на участок около точки *F*, действует направленная вверх результирующая сила, замедляющая движение веревки вниз и приводящая ее в состояние покоя. Такая же последовательность событий повторяется для каждого участка веревки, через который проходит импульс. На рис. *в* показано, как результирующие поперечные *скорости* точек веревки формируют импульс, который распространяется вправо.

Рисунки такого же типа можно начертить и для продольного импульса. Вместо поперечных смещений график может показывать смещения вдоль линии распространения импульса. График такого же вида будет изображать изменения давления или плотности вдоль направления распространения. При прохождении импульса высокого давления на каждый отдельный участок будет действовать результирующая сила лишь тогда, когда давление с одной его стороны больше, чем с другой. На рисунке



показаны результирующие силы, действующие на участок среды при прохождении через него импульса высокого давления. И снова, после того как импульс минует участок, действие сил давления в одном направлении в конечном счете уравновешивается силами противоположного направления.

Вопрос 15-3
Что произойдет, если веревку оттянуть, придав ей форму, показанную на рисунке, а затем освободить? Как импульс «узнает», в какую сторону ему распространяться?



СКОРОСТЬ ВОЛНОВОГО ИМПУЛЬСА

Скорость распространения импульса зависит от восстанавливающей силы, которая возвращает каждый возмущенный участок назад, к положению равновесия. Эта скорость должна также зависеть от массы возмущенного участка. Как вы видели в «Знакомстве с явлениями», чем сильнее натяжение веревки, тем быстрее распространяется волновой импульс. Чем больше плотность веревки, тем медленнее перемещается импульс. Например, импульс в заполненном водой шланге движется значительно медленнее, чем в пустом и легком шланге. Скорость импульса может также зависеть от его формы. Может оказаться, что большие смещения движутся быстрее или медленнее, чем малые смещения. Возможно также, что очень острые короткие импульсы движутся с иной скоростью, нежели широкие и плавные.

Рассмотрим сначала простейшую ситуацию, когда скорость распространения возмущения в среде зависит только от характеристик самой среды и не зависит от формы или размера возмущения. В таком случае искомая скорость представляет собой функцию только восстанавливающей силы, создаваемой средой, и плотности среды: $v = f(F, \mu)$. Для импульса, распространяющегося в одномерной системе, плотность массы μ должна быть *массой единицы длины* (линейной плотностью). При таких предположениях мы можем вывести формулу для скорости импульса, не вникая в детали связанного с его распространением физического механизма.

Следующие несколько шагов могут создать впечатление, будто мы получаем нечто почти из ничего. Используемый метод называется *анализом размерностей*. Предположим, нам известно, что искомая скорость должна быть некоторой функцией силы и линейной плотности массы: $v = f(F, \mu)$. Вопрос состоит в том, что это за функция. Может быть, скорость зависит от квадрата восстанавливающей силы или от кубического корня линейной плотности массы? Какой бы ни была эта функциональная зависимость, она должна приводить к величине, имеющей *размерность* скорости. Предположим, что скорость зависит от силы в степени a и от линейной плотности массы в степени b:

$$v = F^a \mu^b.$$

Теперь выразим размерности скорости, силы и линейной плотности через размерности массы, длины и времени:

$$L^1T^{-1} = (MLT^{-2})^a (ML^{-1})^b = M^{a+b}L^{a-b}T^{-2a}.$$

Поскольку размерность величины, стоящей в одной части равенства, должна быть такой же, как и размерность величины, стоящей в другой части (в обоих случаях это размерность скорости), то, следовательно,

$$a + b = 0, \quad a - b = 1, \quad -2a = -1.$$

Поэтому

$$a = 1/2, \quad b = -1/2.$$

Теперь мы знаем вид функциональной зависимости скорости импульса от восстанавливающей силы и от линейной плотности массы:

$$v \sim \sqrt{F/\mu}, \quad v = K\sqrt{F/\mu}.$$

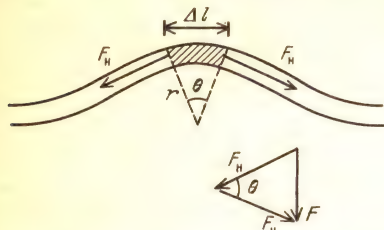
Анализ размерностей приводит к требованию, чтобы скорость импульса в среде была пропорциональна квадратному корню из восстанавливающей силы и обратно пропорциональна квадратному корню из линейной плотности массы. Это очень общий результат, применимый к любому волновому движению, удовлетворяющему нашим исходным предположениям. Импульсы должны быть достаточно малыми и достаточно широкими, чтобы их скорость не зависела от характеристик самого импульса. Однако анализ размерностей не может дать нам значение коэффициента пропорциональности.

Вопрос 15-4

Согласуется ли качественно выведенная выше формула для скорости импульса с результатами ваших наблюдений в «Знакомстве с явлениями»?

Дополнительный материал

Теперь попытаемся вывести скорость импульса в *натянутой веревке,* обращаясь к динамике реальных процессов. На рисунке показан идеализированный импульс в веревке, сила натяжения которой равна $F_н$. Предполагаем, что импульс имеет достаточно



плавную форму, так что вблизи вершины импульса ее можно аппроксимировать дугой окружности. Небольшой участок веревки на этой дуге имеет длину Δl и массу $\mu\Delta l$. Этот участок тянут в обоих направлениях силы натяжения веревки, но эти две силы направлены не совсем по одной прямой. Поскольку силы натяжения $F_н$ всегда направлены вдоль веревки, действующая на каждый конец дуги сила направлена по касательной к дуге и поэтому перпендикулярна к радиусу. Результирующая сила, действующая на малый участок, направлена по радиусу вниз и имеет следующую величину:

$$F = 2F_н \sin\frac{\theta}{2} \approx F_н\theta.$$

Здесь использовано справедливое для малых углов приближение, что $\sin\theta \approx \theta$. Угол θ равен отношению стягиваемой им дуги к радиусу. Поэтому

$$F = F_н\frac{\Delta l}{r}.$$

Эта радиальная восстанавливающая сила должна играть роль центростремительной силы, действующей на рассматриваемый малый участок веревки.

Вопрос 15-5

Центробежная сила нужна для того, чтобы заставить движущееся тело следовать по круговому пути. В данном случае движется *импульс*, но разве каждый отдельный участок веревки движется по дуге, а не совершает просто движений вверх и вниз?

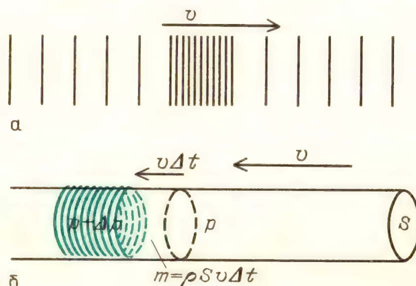
Теперь приравняем центростремительную силу и радиальную восстанавливающую силу:

$$F_{ц.с} = \frac{mv^2}{r},$$

$$\frac{(\mu\Delta l)\,v^2}{r} = F_н\frac{\Delta l}{r}, \quad v = \sqrt{\frac{F_н}{\mu}}.$$

Отметьте, что эта формула согласуется с той, что была выведена на основе анализа размерностей. В данном случае восстанавливающая сила заменяется действующей силой натяжения веревки. Как мы видели, восстанавливающая сила пропорциональна натяжению веревки. В этом примере коэффициент пропорциональности равен $K = 1$. Мы получили формулу, согласно которой скорость импульса не зависит от его формы. Но обратите внимание на ограничения, при которых она справедлива. Амплитуда импульса должна быть мала, и его форма должна быть настолько гладкой, чтобы $\sin\theta$ можно было заменить на θ и чтобы натяжение веревки можно было считать постоянным вдоль всей веревки, включая область, занимаемую импульсом.

Найдем теперь скорость продольного импульса. Такой импульс может распространяться в газе, жидкости и даже твердом теле. (Твердое тело может переносить как поперечные, так и продольные волны; в идеальном газе могут существовать только продольные волны сжатия; волны в большинстве жидкостей обычно продольны, за исключением волн на поверхности раздела жидкостей, как, например, на границе воды и воздуха.) Для упрощения вывода будем предполагать, что вправо движется прямоугольный импульс *равномерного* давления, как показано на рис. *а*. И на этот раз



перейдем в другую систему отсчета и будем двигаться вместе с импульсом. В этой системе отсчета, связанной с областью высокого

давления, нам кажется, что жидкость (или газ) движется справа налево со скоростью v. Когда жидкость попадает в область высокого давления, ее скорость уменьшается, так как она встречает силу, направленную вправо. Выберем некоторый объем жидкости и применим к нему второй закон Ньютона для момента времени, когда этот объем только что вошел в область высокого давления. Пусть этот объем жидкости имеет форму цилиндра, как показано на рис. *б*, с площадью поперечного сечения S и длиной $v\Delta t$. Короткий интервал Δt как раз равен тому промежутку времени, в течение которого этот цилиндр целиком входит в область высокого давления. Масса жидкости в объеме этого цилиндра равна $\rho Sv\Delta t$. (Здесь мы используем *объемную* плотность массы ρ, измеряемую в кг/м^3.) Пока выбранный объем жидкости (цилиндр жидкости) входит в область высокого давления, давление на его левое основание равно $p + \Delta p$, в то время как давление справа равно просто p. Поэтому действующая на цилиндр результирующая сила направлена вправо и равна $F_{рез} = S\Delta p$. Благодаря действию этой силы цилиндр жидкости испытывает отрицательное ускорение, равное $-\Delta v/\Delta t$. Второй закон Ньютона в применении к этому случаю дает

$$F_{рез} = ma, \quad S\Delta p = \rho Sv\Delta t\,(-\Delta v/\Delta t).$$

Это выражение приводится к виду

$$\rho v^2 = -\frac{\Delta p}{\Delta v/v}.$$

Относительное изменение скорости $\Delta v/v$ следующим образом связано с относительным изменением объема цилиндра жидкости:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{S\Delta v\Delta t}{Sv\Delta t} = \frac{\Delta v}{v}.$$

Вопрос 15-6
Почему должен изменяться объем цилиндра жидкости, когда он входит в область высокого давления?

Вместо относительного изменения скорости можно подставить относительное изменение объема:

$$\rho v^2 = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V}.$$

Хотя на первый взгляд это выражение выглядит очень сложным, с его правой частью мы уже встречались в главе 4. Отношение избыточного давления к относительному изменению объема называется *модулем объемного сжатия B*. Он отрицателен, поскольку увеличение давления ($\Delta p > 0$) приводит к уменьшению объема ($\Delta V < 0$).

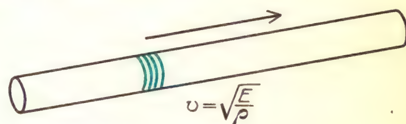
Теперь имеем простое выражение для скорости продольного импульса через модуль объемного сжатия:

$$v = \sqrt{B/\rho}.$$

Обратите внимание, что мы снова получаем формулу, согласно которой скорость пропорциональна квадратному корню из силы, деленной на плотность.

Вопрос 15-7
В соответствии с нашим анализом размерностей скорость должна быть пропорциональна квадратному корню из силы, деленной на линейную плотность. В только что выведенную формулу входит величина, имеющая размерность давления, а не силы, и объемная (а не линейная) плотность массы. Все ли здесь в порядке?

Для импульса, распространяющегося вдоль твердого стержня, такой же анализ размерностей привел бы к формуле для скорости с модулем Юнга в числителе и объемной плотностью массы



в знаменателе. Хотя в этом выводе предполагалась особенно простая форма импульса высокого давления, полученная формула справедлива для импульса любой формы, лишь бы модуль объемного сжатия оставался постоянным. Для импульса, берущего начало в одной *точке* твердого тела и затем распространяющегося по всему объему, нужно использовать более сложное выражение, поскольку участки твердой среды подвергаются не только сжатию, но также и действию тангенциальных (или сдвиговых) сил.

Модуль объемного сжатия газа (при адиабатических изменениях) равен γp, где γ – отношение удельных теплоемкостей, которое было определено в главе 13, и p – давление. Значение γ зависит от строения молекулы газа и от числа атомов в ней. Для одноатомных газов $\gamma = 5/3$. Для двухатомных газов, к которым относится воздух, $\gamma = 7/5$.

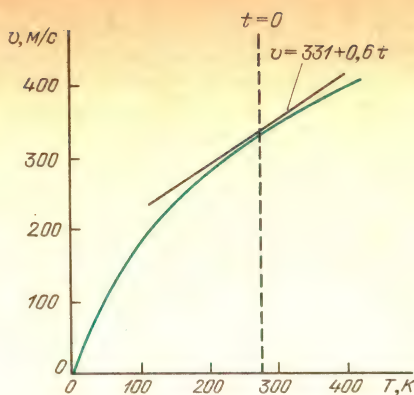
Формулу для скорости звука в газе можно преобразовать так, чтобы в нее входили более привычные характеристики газа. Из уравнения состояния газа имеем $p = NkT/V$. Плотность газа равна $\rho = m/V$. Отношение числа молекул в образце к массе газа равно отношению числа молекул в моле к массе 1 моля:

$$N/m = N_A/M,$$

где M – масса 1 моля. Подставим эти значения в нашу формулу для скорости звука в газе:

$$v = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma \frac{NkT/V}{m/V}} = \sqrt{\gamma kT \frac{N}{m}} = \sqrt{\gamma kT \frac{N_A}{M}}.$$

Обратите внимание, что скорость продольного импульса в газе, равная скорости звука в газе, пропорциональна квадратному корню из термодинамической температуры и ряду констант, характеризующих тип газа. Подставим их значения для воздуха и посмотрим, что дает эта формула для скорости звука в обычных условиях. Отношение удельных теплоемкостей для воздуха равно $\gamma = 1{,}4$, постоянная Авогадро равна $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$, постоянная Больцмана равна $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К. Масса 1 моля смеси кислорода и азота, из которых состоит воздух, равна $M = 0{,}0288$ кг/моль. Подставляя эти значения в уравнение, получаем, что скорость звука в воздухе равна $v = 20{,}1\sqrt{T}$ м/с. При комнатной температуре, когда $T = 293$ К, скорость звука равна 344 м/с. Можно получить удобное приближение для этой формулы, если взять значение скорости при 0 °С и прибавлять небольшую величину на каждый градус выше 0 °С. Такая приближенная формула дает



Скорость звука в воздухе как функция температуры

нам $v = (331 + 0{,}6t)$ м/с. В этой формуле t – температура, измеренная по шкале Цельсия.

Вопрос 15-8
Насколько хороша эта приближенная формула при комнатной температуре 20 °С?

Скорость звука в различных веществах

Вещество	v, м/с
Воздух (20 °С)	343
Гелий (20 °С)	981
Водород (20 °С)	1328
Углекислый газ (20 °С)	267
Вода	1490
Морская вода	1530
Ртуть	1450
Железо	~ 5000
Стекло	~ 4500
Люцит	~ 1800
Алюминий	~ 5000

Здесь приведены значения скорости звука в различных веществах. Обратите внимание, насколько быстрее распространяется звук в водороде и гелии по сравнению с воздухом. Это различие скоростей обусловлено большой разницей атомных масс. Заметьте также, что скорость звука в металлах и воде значительно больше, чем в воздухе. Хотя плотность металла много больше, чем воздуха, отношение их модулей объемного сжатия еще больше. Если в вашем распоряжении есть длинная труба (например, перила) или участок железнодорожного пути (когда поблизости

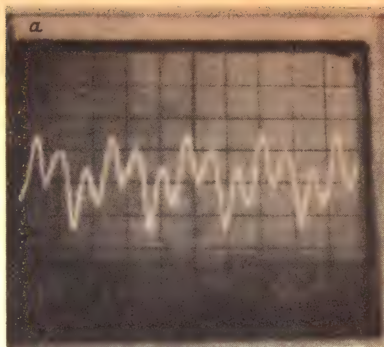
нет поездов), вы можете наблюдать относительную скорость звука в стали и в воздухе. Приложите ухо к рельсу и попросите товарища ударить по рельсу на расстоянии по крайней мере от 30 до 40 метров. Сразу же, по вашим ощущениям, будет слышен звук, пришедший по стали, но звук того же удара, переданный по воздуху, вы услышите с небольшим запаздыванием.

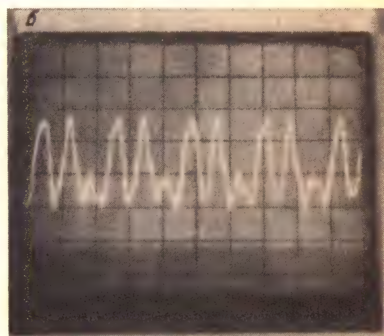
ЦУГИ ВОЛН

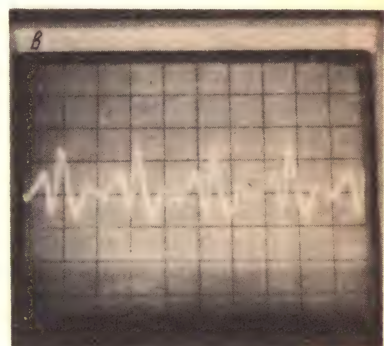
В большинстве случаев посылаемые нами сигналы, включая звуковые, радио и световые, состоят из длинных последовательностей импульсов. Обычно каждый импульс имеет приблизительно такую же форму и амплитуду, как и его ближайшие соседи. Наиболее часто встречается форма в виде синусоидальной волны.

Вопрос 15-9
Почему столь широко распространены сигналы в виде синусоидальной волны?

В следующей главе мы увидим, что волны сложной формы можно рассматривать как суперпозицию синусоидальных волн с различными амплитудами и частотами. Физическая природа этого понятия многим знакома из музыкальной терминологии – музыкальные звуки одной и той же высоты и громкости отличаются друг от друга по числу гармоник, сопровождающих основной тон. На приводимых фотографиях показаны волновые цуги, производимые различными музыкальными инструментами. Теперь мы собираемся ввести определения и вывести некоторые соотношения, используя в качестве примера синусоидальную волну. Эти определения и соотношения будут применимы к бегущим волнам общего вида, независимо от формы их составляющих отдельных импульсов.







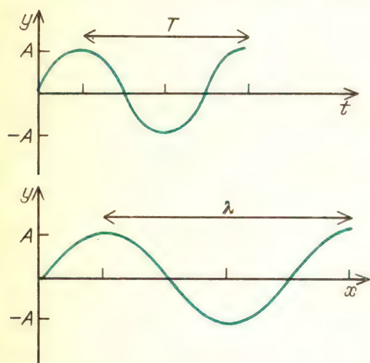
Осциллограммы волновых импульсов, создаваемых звуками флейты (*а*), голоса (*б*) и трубы (*в*). Все звуки соответствуют среднему *A* с частотой 440 Гц. Скорость развертки составляла 2 мс/см

Для начала будем рассматривать только волны, распространяющиеся по единственному направлению, как, например, волны в веревке или в параллельном пучке света или звука. Ось *y* изображает либо действительное смещение веревки, перпендикулярное к направлению волны, либо давление в продольной волне, либо напряженность электрического поля в электромагнитной волне. В каждой отдельной точке на линии распространения волны любая из этих физических величин совершает колебания от максимального положительного значения до максимального по модулю отрицательного значения. В каж-

дой точке рассматриваемая физическая величина представляет собой синусоидальную функцию времени: $y = A\sin\omega t$. Максимальное смещение A из положения равновесия называется амплитудой. С течением времени $\sin\omega t$ осциллирует между значениями $+1$ и -1 с круговой частотой ω, измеряемой в секундах в минус первой степени. Частота в циклах за секунду, или герцах, равна $f = \omega/2\pi$.

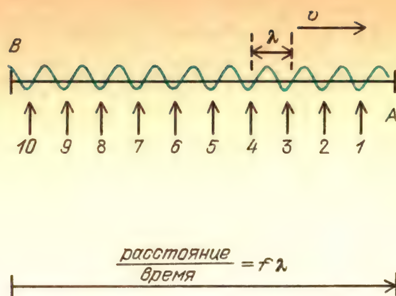
Вопрос 15-10
Как называется движение такого типа?

На рисунке изображены графики $y(t)$ и $y(x)$. Первый из них характеризует поведение некоторой отдельной точки x



с течением времени, когда волна проходит через нее. Второй график дает моментальную фотографию отрезка линии в некоторый определенный момент времени. На каждом рисунке даны обозначения некоторых величин. Период T равен промежутку времени, в течение которого y совершает полный цикл изменения от значения $+A$ до $-A$ и обратно до $+A$. Если период колебания равен 0,1 секунды, то в течение 1 секунды должно происходить 10 таких колебаний. Частота равна 10 Гц ($f = 1/T$). Длина волны λ равна расстоянию между соседними гребнями или между любыми ближайшими точками на линии распространения, в которых y имеет одно и то же значение и одинаковый наклон.

Для бегущих волн существует фундаментальное соотношение между скоростью, длиной волны и частотой. Это



Через точку A за 1 секунду пройдет f волн

соотношение показано на рисунке, где отмечено число полных волн, которые пройдут через какую-либо отдельную точку, например A, за 1 секунду. Это число как раз равно частоте f. Первая из этих волн уже находится в отмеченной точке. Если проходит 10 волн в секунду и длина волны равна 1 см, то последняя волна, которая пройдет отмеченную точку через 1 секунду, находится сначала в точке B на расстоянии 10 см. Поэтому скорость волны должна быть равна 10 см/с. В общем случае

$$\lambda f = v.$$

Воспользуемся этим соотношением, чтобы найти длину волны или частоту некоторых знакомых волн. Как мы видели, скорость звука в воздухе при комнатной температуре равна 344 м/с. Частота музыкальной ноты A, по которой настраивают инструменты оркестра, равна 440 Гц. В соответствии с нашим уравнением

$$\lambda \cdot 440\ \text{Гц} = 344\ \text{м/с},$$

$$\lambda = 0{,}78\ \text{м} = 78\ \text{см}.$$

Как можно видеть, звуковые волны имеют размеры того же порядка, что и тело человека. Ниже приведены различные частоты и соответствующие им длины волн в спектре слышимых звуков. Для человеческого слуха спектр слышимых звуков простирается от 20 до 20 000 Гц. В действительности эти пределы доступны только очень молодым людям. Мужчины начинают утрачивать чувствительность к высоким звукам раньше, чем женщины. Большинство мужчин среднего возраста не могут воспринимать ноты, более высо-

Диапазон звуковых частот и соответствующих им длин волн

	f, Гц	λ, м
Нижний предел слышимых звуков	16	21,5
Самая низкая нота рояля	27,5	12,4
Фон сети переменного тока	60	5,7
Нижний предел для настольных радиоприемников	100	3,4
«Среднее *A*» для настройки оркестра	440	$78 \cdot 10^{-2}$
«Верхнее *C*»	1048	$33 \cdot 10^{-2}$
Самая высокая нота рояля	4186	$8{,}2 \cdot 10^{-2}$
Верхний предел для звуков, воспроизводимых кассетными магнитофонами	$8 \cdot 10^3$	$4{,}3 \cdot 10^{-2}$
Верхний предел слышимых звуков	$2 \cdot 10^4$	$1{,}7 \cdot 10^{-2}$
Ультразвук, используемый летучими мышами	$1 \cdot 10^5$	$0{,}34 \cdot 10^{-2}$
Ультразвук, используемый для диагностики в медицине	$2 \cdot 10^6$	$0{,}17 \cdot 10^{-3}$ (в воздухе) $0{,}74 \cdot 10^{-3}$ (в воде или в тканях организма)

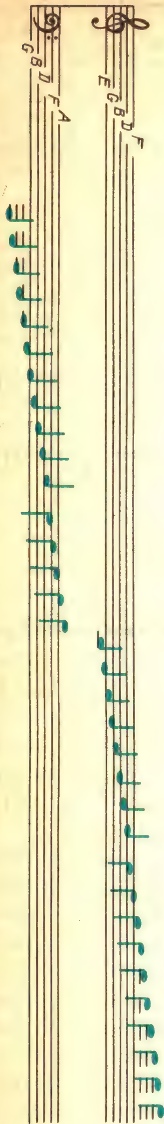
кие, чем приблизительно 12 000 Гц. После 50 лет как мужчины, так и женщины утрачивают большую часть верхней области спектра. Обратите внимание на то, что воспринимаемый нами диапазон значительно больше того небольшого диапазона частот (лежащего обычно между 100 и 1000 Гц), который мы используем для речи или пения. Недорогие акустические системы небольших радиоприемников или магнитофонов обычно воспроизводят звуки только в диапазоне от 100 или 200 Гц приблизительно до 6000 Гц. Хотя в этом ограниченном диапазоне частот можно воспроизвести речь и музыку, звук кажется утратившим «качество», «присутствие», «насыщенность». Эти качественные слова описывают ваши ощущения. В следующей главе мы узнаем, что такое обертоны, или высокочастотные компоненты, производимых нами звуков. Когда эти высокие частоты обрезаны, музыкальные звуки утрачивают свою остроту, или яркость. Когда обрезаны низкие частоты, наш слух правильно воспринимает высоту тона, но звучание нот кажется приглушенным или монотонным.

Некоторые существа могут производить и слышать звуки далеко за пределами воспринимаемого человеком диапазона частот. Летучие мыши и дельфины используют звук как разновидность радара (называемую сонаром) для определения положения предметов.

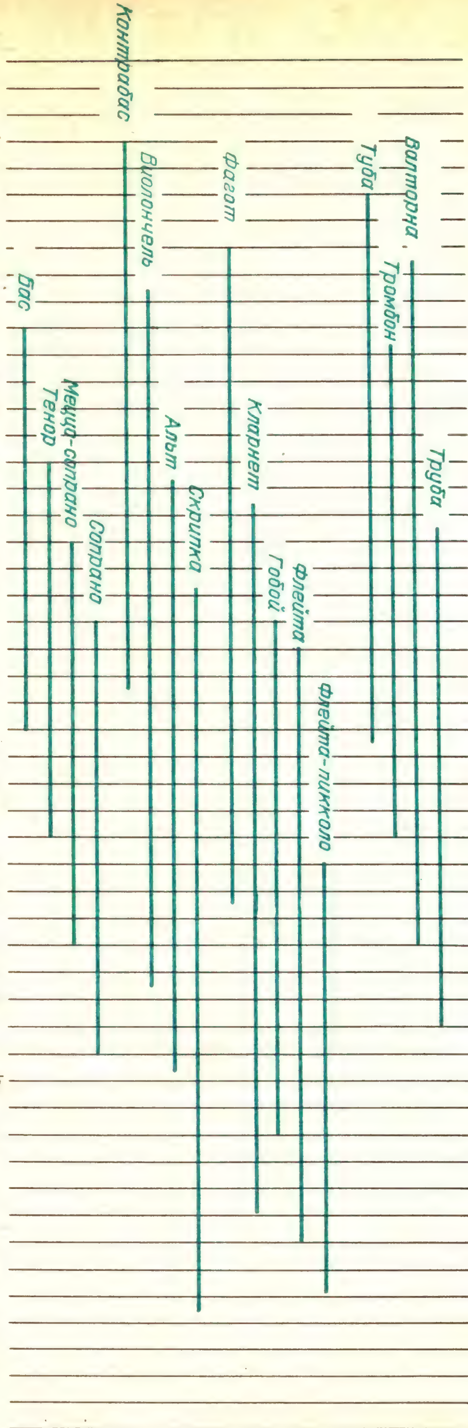
Вопрос 15-11

Как будет показано ниже, можно «видеть» предмет в результате отражения направленных на него волн лишь тогда, когда размеры предмета больше, чем длина волны. Каковы размеры предметов, положение которых могут определить летучие мыши с помощью своего сонара с частотой звука 100 000 Гц? Дельфины также используют частоты вплоть до 100 000 Гц. Каков минимальный размер предметов, которые могут обнаружить дельфины? (Он не таков, как для летучих мышей! Не забудьте, что дельфины используют свой сонар под водой.) Соответствует ли минимальный размер в каждом из этих случаев предметам, представляющим интерес?

На следующей странице изображена клавиатура рояля с указанием частот и музыкальных обозначений для большинства клавиш. Вы можете увидеть здесь и приближенный диапазон частот для других инструментов и голосов. Мы еще обратимся к этому рисунку в одном из последующих разделов при описании других характеристик музыкальных звуков.



F	Рояль	F
27,50	A_0	29,14
30,87	B_0	
32,70	C_1	34,65
36,71	D_1	38,89
41,20	E_1	
43,65	F_1	46,25
49,00	G_1	51,91
55,00	A_1	58,27
61,74	B_1	
65,41	C_2	69,30
73,42	D_2	77,78
82,41	E_2	
87,31	F_2	92,50
98,00	G_2	103,83
110,00	A_2	116,54
123,47	B_2	
130,81	C_3	138,6
146,83	D_3	155,6
164,81	E_3	
174,61	F_3	185,0
196,00	G_3	207,7
220,00	A_3	233,1
246,94	B_3	
261,63	c	277,2
293,66	D_4	311,1
329,63	E_4	
349,23	F_4	370,0
392,00	G_4	415,3
440,00	A_4	466,2
493,88	B_4	
523,25	C_5	554,4
587,33	D_5	622,3
659,26	E_5	
698,46	F_5	740,0
783,99	G_5	830,6
880,00	A_5	932,3
987,77	B_5	
1046,50	C_6	1108,7
1174,66	D_6	1244,5
1318,51	E_6	
1396,91	F_6	1480
1567,98	G_6	1661
1760,00	A_6	1865
1975,53	B_6	
2093,00	C_7	2218
2349,32	D_7	2489
2637,02	E_7	
2793,83	F_7	2960
3135,96	G_7	3322
3520,00	A_7	3729
3951,07	B_7	
4186,01	C_8	



Другой тип волн, с которым мы имеем дело в повседневной жизни,– это электромагнитные волны, включающие в себя радиоволны и видимый свет. Многие детали этого излучения будут описаны в главе 22. Однако сейчас, раз уж зашел разговор о волнах, найдем длины волн и часто́ты для некоторых представляющих интерес электромагнитных волн. Середина шкалы вашего АМ-радиоприемника, например, соответствует частоте 1 мегагерц, или 1000 килогерц ($1\cdot10^6$ Гц). Любое электромагнитное излучение, в том числе свет и радиоволны, распространяется в вакууме с одной и той же скоростью. Во многих случаях можно считать, что скорость будет такой же и в воздухе. Благодаря особой роли, которую играет эта скорость (мы в этом уже убедились в главе о теории относительности), для нее используется специальный символ *c*. Для всех наблюдателей

$$c = 3\cdot10^8 \text{ м/с}.$$

Для средней частоты АМ-радиоприемника

$$\lambda\cdot1\cdot10^6 \text{ Гц} = 3\cdot10^8 \text{ м/с},$$

$$\lambda = 300 \text{ м}.$$

Длина волны диапазона средних волн обычного радиоприемника составляет около 1/6 мили. Длина волны видимого света чуть меньше минимальных размеров предмета, который можно увидеть с помощью обычного микроскопа (и в этом случае «щуп», с помощью которого вы «видите» предмет, должен быть меньше самого предмета). Предел разрешения микроскопа равен 1 микрометру: 1 мкм $= 1\cdot10^{-6}$ м. Найдем частоту зеленого света, длина волны которого составляет 0,5 мкм $= 5\cdot10^{-7}$ м:

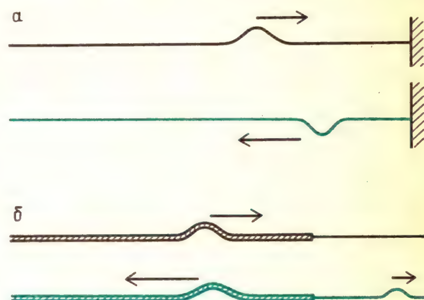
$$5\cdot10^{-7} \text{ м}\cdot f = 3\cdot10^8 \text{ м/с},$$

$$f = 6\cdot10^{14} \text{ Гц}.$$

Трудно себе представить что-либо, колеблющееся с частотой $6\cdot10^{14}$ циклов в 1 секунду. Как мы увидим ниже, часто́ты электромагнитных колебаний могут быть и гораздо больше.

ОТРАЖЕНИЕ ИМПУЛЬСОВ И ВОЛН

В «Знакомстве с явлениями» вы видели, что происходит с бегущим по веревке импульсом, когда он приближается к ее концу. Импульс отскакивает назад и распространяется в обратном направлении. Если веревка привязана к неподвижной стене, импульс возвращается по противоположной стороне веревки, как показано на рис. *а*. В другом предельном случае, когда веревка привязана к длинной легкой бечевке, отраженный импульс возвращается по той



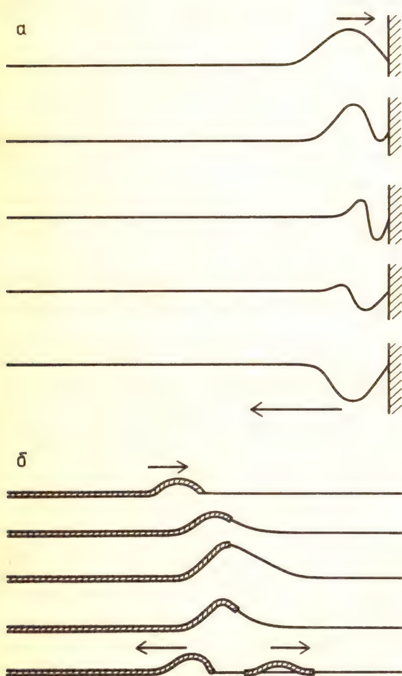
же самой стороне, как показано на рис. *б*. Это два предельных случая того, что происходит, когда импульс переходит из одной среды в другую. В общем случае имеет место частичное отражение и частичное прохождение.

Выясним, почему отражение от закрепленного конца порождает импульс, распространяющийся с противоположной стороны от исходного импульса. Когда импульс приближается к закрепленной границе, его край, где ускорение направлено вверх, начинает тянуть вверх границу, которая, однако, не сдвигается, а сама начинает тянуть веревку вниз. Фактически жесткость веревки в месте закрепления очень велика, так как следующий участок веревки уже не может двигаться. Вследствие этого при прохождении переднего края импульса веревка начинает выгибаться вниз, как если бы на границе некоторая сила тянула ее вниз. Чем выше приближающийся импульс стремится оттянуть вверх материал веревки вблизи границы, тем больше будет в этом материале восстанавливающая сила, отдергивающая конец веревки вниз. В резуль-

тате образуется такой же импульс, распространяющийся теперь в противоположном направлении и по противоположной стороне веревки.

На незакрепленной (открытой) границе ситуация в точности противоположная. Легкая бечевка имеет очень небольшую линейную плотность массы и поэтому, когда передний край импульса подходит к ней, направленная вверх сила сообщает ей большое ускорение и высокую скорость вверх. Точка соединения взмывает вверх до почти удвоенной амплитуды исходного импульса, прежде чем ее потянет снова вниз. Получается точно такой эффект, как если бы кто-то поднял и опустил свободный конец веревки, посылая назад по веревке импульс с той же стороны, по которой пришел исходный импульс.

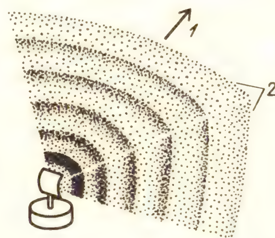
На рис. *а* и *б* показана поэтапная последовательность событий, происходящих при этих двух различных типах отражения.



Мы можем создать волны, распространяющиеся в одном направлении, в среде, имеющей два или три измерения. Например, когда вы производите волнение в ванне (или противне с водой), погружая в нее линейку (или кусок картона), по поверхности воды бежит плоская волна. Иллюстрация такого явления показана на фотографии. Радио- или световые волны могут распространяться, имея плоский волновой

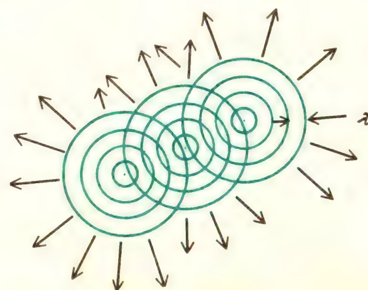
Плоские волны в наклонном противне

фронт в пространстве трех измерений, как показано на рисунке (*1* – направление распространения, *2* – волновые



фронты, радиально расходящиеся от источника; на больших расстояниях фронты почти плоские). Это возможно и для звуковых волн. В главе 17 мы опишем такое распространение, используя представление о параллельных *лучах*.

В далеком от нас 1678 году голландец Христиан Гюйгенс (1629 – 1695) предложил способ, позволяющий предсказать движение волн с различной



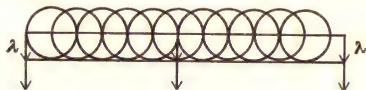
Построение волн по Гюйгенсу. Каждая из трех возмущенных точек становится источником новых волн, расходящихся из этой точки

геометрией. Его идея проста, если не вглядываться в нее слишком пристально, но она может оказаться весьма утонченной, когда вы начнете детально исследовать ее физический смысл. А пока воспользуемся ее простейшим приложением. Гюйгенс предположил, что каждая точка возмущенной среды (например, воды или воздуха) должна быть началом нового волнового фронта, исходящего из этой точки.

Вопрос 15-12

Какую форму будет иметь волновой фронт, исходящий от *точечного* источника в случае двумерной волны, например на поверхности воды? Какую форму будет иметь волновой фронт, порождаемый точечным источником в пространстве трех измерений, например в открытом воздухе?

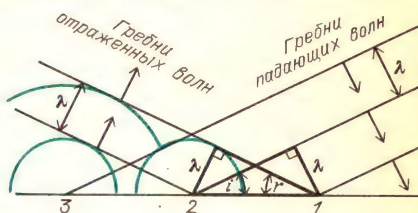
Примем, что принцип Гюйгенса справедлив и рассмотрим, что произойдет с импульсом *прямолинейной* формы на поверхности воды. Если каждая точка гребня посылает возмущение *круговой* формы, то можно ожидать, что спустя период мы увидим волновые фронты, распространяющиеся по *всем* направлениям. Более детальный анализ, который мы частично выполним в следующей главе, показывает, что в каждом направлении, за исключением лишь одного, возмущение от любой точки линейного источника уничтожается соответствующими возмущениями от всех других точек. Движение поверхности в любой точке, лежащей впереди надвигающейся волны, будет определяться



вкладами от *всего* волнового фронта. Оказывается, что результирующий волновой фронт спустя период располагается вдоль линии, касательной к круговым волновым фронтам, берущим начало от каждой точки исходного гребня. Линия, касающаяся всех этих окружностей, параллельна исходному гребню и изображает фронт, переместившийся за период на расстояние в одну длину волны в направлении распространения.

Легкий способ наблюдения этого эффекта на опыте состоит в том, чтобы в мелкую воду погружать расческу с редкими зубьями. Каждый зуб расчески становится источником круговых волновых фронтов. Однако результирующее возмущение будет плоской волной, такой же, как если бы вместо расчески была сплошная твердая линейка.

Теперь воспользуемся принципом Гюйгенса для того, чтобы увидеть, что происходит, когда плоская волна отражается под некоторым углом от границы. На рисунке показаны параллельные волновые фронты, приближающиеся под углом i к границе раздела.



Мы строим волновые фронты отраженных волн, проводя касательные к отраженным круговым волновым фронтам, исходящим от каждой точки границы. При этом мы должны, однако, соединять гребни волн, соответствующие одинаковой фазе. За один период до расположения, показанного на рисунке, гребень *1* находился в положении,

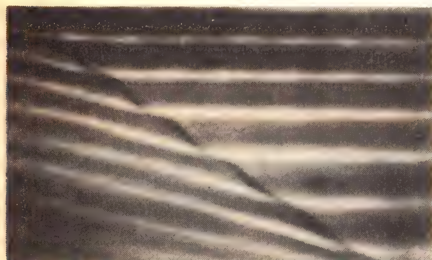
Отражение плоских волн в ванне для наблюдения поверхностных волн

которое теперь занимает гребень *2*. Поэтому нужно соединить точку *1* с гребнем, отраженным ранее в точке *2*.

Результирующие отраженные волны также оказываются плоскими и параллельными и, более того, для них выдерживается определенное угловое соотношение с границей раздела и с приходящими волнами. На рисунке выделены два прямоугольных треугольника, из которых легко увидеть это соотношение. У них общая гипотенуза, а меньшие катеты каждого имеют одинаковую длину λ. Поэтому треугольники одинаковы и $i = r$. Фронты отраженных волн уходят от границы раздела под таким же углом, под каким фронты падающих волн ударяются в границу. *Угол падения равен углу отражения.*

ПРЕЛОМЛЕНИЕ ВОЛН

Когда свет проникает из воздуха в воду или в стекло, он переходит из среды, где его скорость больше, в среду, где он распространяется с меньшей скоростью. Если волны на поверхности воды пересекают границу раздела, где глубина внезапно становится меньше, их скорость уменьшается на границе,

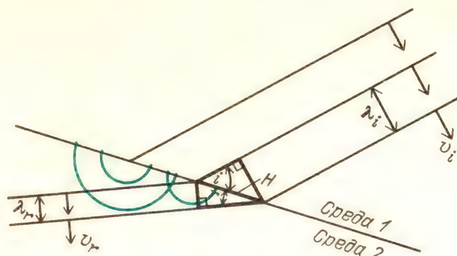


Преломление плоских волн при пересечении границы раздела с мелкой водой

как это видно на приводимой фотографии.

Вопрос 15-13
Если при переходе волн из одной среды в другую их скорость изменяется, происходит ли при этом изменение частоты или длины волны? Напомним, что эти величины связаны соотношением
$\lambda f = v$.

Воспользуемся построением Гюйгенса для выяснения того, что происходит с волновыми фронтами при их переходе в среду с меньшей скоростью. Геометрическое построение показано на рисунке. Поскольку в среде *2* скорость



меньше, круговые волновые фронты за каждый период распространяются на меньшее расстояние, чем в среде *1*. Касательные к этим окружностям меньшего радиуса параллельны друг другу, но не параллельны фронтам падающих волн. Они испытали *преломление*. Соотношение между углом падения и углом преломления можно найти из геометрических соображений, рассматривая два прилегающих треугольника. Эти треугольники прямоугольные и имеют общую гипотенузу. Один из катетов в каждом треугольнике равен длине волны в соответствующей среде. Поэтому

$$H \sin i = \lambda_i = v_i T,$$
$$H \sin r = \lambda_r = v_r T.$$

Периоды T_i и T_r в обеих средах равны друг другу, так как частота падающей и преломленной волн одна и та же. Поэтому

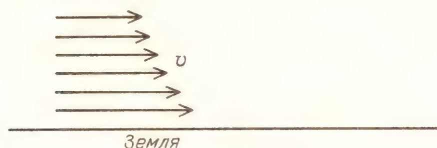
$$\sin i / \sin r = v_i / v_r.$$

Степень преломления или отклонения волны от прежнего направления зависит от отношения скоростей волн в этих средах.

Вопрос 15-14
При переходе света из воздуха в воду будет ли угол преломления больше или меньше угла падения? Что происходит со светом при переходе из воды в воздух?

Звуковые волны отражаются от зданий, отражаются они и от стен в лекционных аудиториях. Музыканты иногда испытывают резонансные качества зала, резко хлопая в ладони с середины сцены. Если замирающие отраженные звуки (реверберация) через 1 или 2 секунды уже не слышны, зал слишком «сухой» для исполнения музыки. Если зал покрыт изнутри поглощающим звук материалом, отражения будут слабыми и звук тоже будет казаться слабым. С другой стороны, стены и потолок не должны быть гладкими и твердыми. В таком случае может получиться, что волновые фронты будут отскакивать взад и вперед в унисон, создавая настоящее эхо. К сожалению, реверберация в зале, благодаря которой музыкальные звуки становятся насыщеннее, делает невнятными звуки речи. *Лекционный* зал должен быть акустически сухим.

Звуковые волны испытывают также и преломление. Вспомним, что скорость звука в воздухе пропорциональна квадратному корню из термодинамической температуры. При нормальных условиях температура воздуха уменьшается



Скорость звука уменьшается с увеличением высоты

с увеличением высоты над поверхностью. Поэтому у земли скорость звука больше.

Вопрос 15-15
Если плоская волна начинает распространяться параллельно земле, как она будет преломляться, если температура воздуха уменьшается с увеличением высоты?

Преломление звука вызвало немало таинственных или несчастных происшествий, связанных с предупреждающими сигналами вроде тех, что посылаются с маяков. Американский физик Джозеф Генри в первой половине девятнадцатого столетия исследовал и разрешил несколько таких тайн. С корабля докладывали, что они слышали предупреждающий колокол, но по мере приближения к нему звук исчез и снова появился, когда было уже слишком поздно. Звук преломлялся вверх и затем из-за инверсии температуры или из-за движения воздуха преломлялся вниз, оставляя зону молчания посередине. Подобное явление происходит, когда вы пытаетесь

кричать против ветра. Скорость звука в воздухе составляет около 340 м/с, и нет оснований ожидать, что ветер, имеющий скорость 10 м/с или около этого, окажет сильное влияние на передачу звука. Встречный ветер и в самом деле слегка уменьшит скорость звука, но отнюдь не из-за этого стоящему против ветра человеку трудно вас услышать. Разгадка заключается в том, что скорость ветра вблизи земли почти всегда меньше, чем наверху. Скорость встречного ветра вблизи земли меньше, чем наверху, и поэтому скорость звука вашего голоса вблизи земли больше. В результате снова возникает преломление и волновой фронт издаваемого вами звука загибается вверх, проходя над человеком, который пытается вас услышать. Если этот человек находится на балконе или на дереве, он сможет слышать вас хорошо. Те, кто живет у воды, часто слышат голоса из лодок, находящихся очень далеко. Когда возникает инверсия температуры, так что наверху воздух становится теплее, чем у поверхности воды, звук преломляется вниз и может распространяться вдоль поверхности на очень большие расстояния.

ИЗМЕНЕНИЕ СКОРОСТИ ВОЛН С ЧАСТОТОЙ

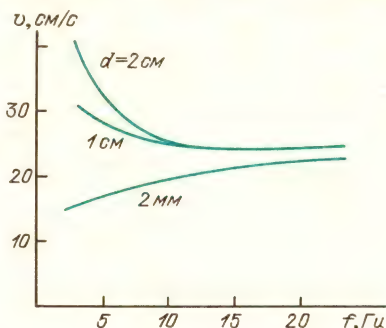
При выводе формул для скорости продольных и поперечных волн мы нашли, что скорость зависит только от

восстанавливающих сил и инертных свойств среды. Эта скорость не зависит от формы или размера волновых импульсов, но так получилось потому, что мы делали приближения, основанные на предположении о том, что возмущение среды мало́ и изменяется со временем постепенно. Посмотрим, оправдываются ли эти предположения для некоторых изученных нами видов волн.

Вопрос 15-16
Зависит ли скорость звука от его частоты? Будет ли оркестр, в котором есть как флейты-пикколо, так и фаготы, звучать беспорядочно, когда вы отходите от него на большое расстояние?

Скорость света в вакууме не зависит от частоты. Этот факт был проверен на опыте для частот на всем протяжении от радиоволн до рентгеновского излучения. Если бы скорость света зависела от частоты, то наблюдались бы очень странные астрономические явления. Например, орбиты некоторых двойных звезд лежат в такой плоскости, что мы можем наблюдать, как они периодически затемняют друг друга. Если бы синий свет распространялся быстрее, чем красный, то, когда одна из звезд выходит из тени другой, мы должны были бы видеть ее сначала как синюю звезду, затем как белую и затем, при начале затемнения, как красную. Подобный эффект никогда не наблюдался. Однако, когда свет проходит сквозь прозрачное вещество, его скорость зависит от частоты. При изучении оптических приборов в главе 17 мы увидим, как преломление света в линзах и призмах может быть использовано для управления его распространением. Поскольку преломление зависит от скорости света в стекле, отклонение траектории красного света будет иным, чем синего. Это свойство приводит к осложнениям при конструировании оптических систем, но в нем заключается главное достоинство драгоценных камней – самоцветов, таких, как бриллианты. Алмаз не только вызывает большее преломление, чем почти любое другое вещество, но, что даже более важно для ювелирных изделий, в нем очень велика *разница* в преломлении синего и красного света. Этот эффект лучше всего проявляется в мерцающем свете свечей (хотя подходит любой движущийся точечный источник света). Падающий свет расщепляется в спектр сверкающих цветов.

Мы не привели вывода для скорости волн на воде, потому что это очень сложное явление. При возмущении поверхности воды из равновесного положения восстанавливающие силы обусловлены тяготением, давлением воды, поверхностным натяжением. Для обычных волн вблизи берегов сделанные нами упрощающие предположения неприменимы. Даже мелкая рябь в пруду или сковороде с водой представляет собой



Скорость волн на поверхности воды как функция частоты при разной глубине воды d

сложное явление. Скорость ряби на поверхности воды зависит от глубины сосуда, а также от частоты волн. На рисунке показан график этих сложных зависимостей.

Вопрос 15-17
Для получения сильного преломления волн ряби на поверхности воды в подносе нужно иметь две области, где скорости волн существенно различаются. Как можно создать такие условия? Примите во внимание приведенные графики для скорости ряби на воде.

МОЩНОСТЬ, ПЕРЕНОСИМАЯ ВОЛНАМИ

Энергию или по крайней мере средства для ее получения можно транспортировать в железнодорожных угольных

вагонах, нефтеналивных танкерах или по газопроводам. Вы можете передать энергию, сбрасывая каменную глыбу или, еще лучше, аккумуляторную батарею. Во всех этих примерах некоторое вещество, содержащее энергию, действительно перемещается из одного места в другое. Но можно также передавать энергию, не перенося при этом какого-либо вещества. Океанские волны размывают берега, разнося энергию, которую

Разрушение берега, вызванное волнами

они могли получить от ветра или землетрясений вдали от этих берегов. На всем этом пути вода остается примерно там, где и была. Сверхзвуковой реактивный самолет тянет за собой волну сжатия, от которой могут вылететь стекла в окнах. Но воздух на ее пути не изменяет надолго своего положения. Обычная освещающая наш дом электрическая лампочка поглощает энергию колебаний электрических зарядов в подводящих проводах. Находящиеся там электроны осциллируют, потому что по проводу проходит электрическая волна с частотой 60 Гц. Но никакие электроны по проводам не транспортируются.

При рассмотрении энергии волнового движения наиболее важен вопрос не о том, сколько энергии *содержит* волна, а о том, сколько энергии *доставляет* волна за одну секунду. Иными словами, нас интересует *мощность*, доставляемая волной. В случае волны, распространяющейся в трехмерном пространстве (как, например, звуковая или электромагнитная волна), следует говорить о мощности, доставляемой на 1 квадратный метр.

Прежде всего подсчитаем мощность, доставляемую непрерывной синусоидальной волной, распространяющейся по веревке. В этом случае мы почти воочию можем следить за энергией, поскольку веревка действительно колеблется взад-вперед.

Дополнительный материал

Каждая отдельная точка веревки совершает колебания, смещаясь перпендикулярно к скорости волны по следующему закону:

$$y = A \sin \omega t.$$

Скорость этого отрезка веревки равна

$$u = \Delta y / \Delta t = \omega A \cos \omega t.$$

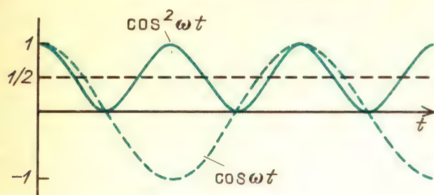
Как мы уже видели раньше, в случае простого гармонического движения скорость частицы сдвинута по фазе на 90° по отношению к ее смещению и пропорциональна частоте: $\omega = 2\pi f$. Чем выше частота колебаний частицы, тем быстрее она должна двигаться, чтобы пройти расстояние между точками $+A$ и $-A$ за половину периода.

В среднем по времени любой отрезок веревки при прохождении волны имеет такую же энергию, как и любой другой отрезок такой же длины, и среднее значение его кинетической энергии должно быть равно среднему значению потенциальной энергии. И кинетическая и потенциальная энергии вместе переносятся вдоль веревки. Когда смещение определенного отрезка равно нулю ($y = 0$), его скорость u максимальна. Поэтому максимальна и его кинетическая энергия. Потенциальная энергия отрезка тоже максимальна, потому что в этот момент его удлинение максимально. Этот отрезок в данный момент сильнее всего повернут относительно своего равновесного положения. Спустя четверть периода этот отрезок застынет на мгновение в покое в точке $y = A$ и поэтому его кинетическая энергия будет равна нулю. Его потенциальная энергия тоже равна нулю, потому что в этот момент отрезок не растянут. Действующая на отрезок результирующая сила максимальна, но она сообщает ему ускорение, перпендикулярное направлению распространения волны, а не напряжение, ответственное за потенциальную энергию.

Подсчитаем кинетическую энергию отрезка веревки, имеющего массу m:

$$W_{\text{кин}} = \frac{1}{2} mu^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \cos^2 \omega t.$$

Среднее значение $\cos^2 \omega t$ за один период



в точности равно 1/2. Поэтому средняя кинетическая энергия отрезка веревки равна

$$W_{\text{кин}} = \frac{1}{4} m\omega^2 A^2.$$

Такое же значение имеет средняя потенциальная энергия. Поэтому среднее значение *полной* энергии отрезка равно

$$W_{\text{полн}} = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2.$$

Полная энергия отрезка веревки длиной в одну длину волны равна

$$W_{\text{полн}} = \frac{1}{2} \mu\lambda\omega^2 A^2,$$

где μ – линейная плотность массы. Доставляемая волной мощность равна энергии отрезка в одну длину волны, деленной на период колебаний:

$$P = \frac{1}{2} \frac{\mu\lambda\omega^2 A^2}{T}.$$

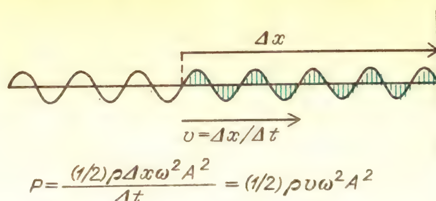
Поскольку $\lambda/T = v$, где v – скорость волны, эту мощность можно также записать в виде

$$P = \frac{1}{2} \mu v\omega^2 A^2.$$

Скорость волны в натянутой веревке равна $v = \sqrt{F_{\text{н}}/\mu}$. Поэтому мощность равна

$$P = \frac{1}{2} \mu \sqrt{F_{\text{н}}/\mu}\, \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \sqrt{F_{\text{н}}\mu}\, \omega^2 A^2.$$

Посмотрите на различные члены в этом выражении. Мощность, доставляемая распространяющейся по веревке волной, пропорциональна квадрату частоты волны и квадрату ее амплитуды.



Вопрос 15-18

В каком месте этого математического вывода появляются ω и A? Дайте физическое объяснение тому, что мощность должна быть пропорциональна квадрату этих величин.

В полученном нами выражении для мощности, доставляемой колеблющейся веревкой, содержащие частоту и амплитуду сомножители характеризуют волны, которые мы генерируем. Первый сомножитель $\sqrt{F_{\text{н}}\mu}$ характеризует саму веревку. Обратите внимание, что он объединяет два свойства, от которых зависит скорость волн – силу натяжения $F_{\text{н}}$ и линейную плотность массы μ. Но на этот раз мы встречаемся не с их отношением, а с их произведением. Такая комбинация имеет специальное название. Это *импеданс*, или волновое сопротивление веревки, обозначаемый обычно символом Z. Таким образом, доставляемая мощность может быть выражена через импеданс:

$$P = \frac{1}{2} Z\omega^2 A^2.$$

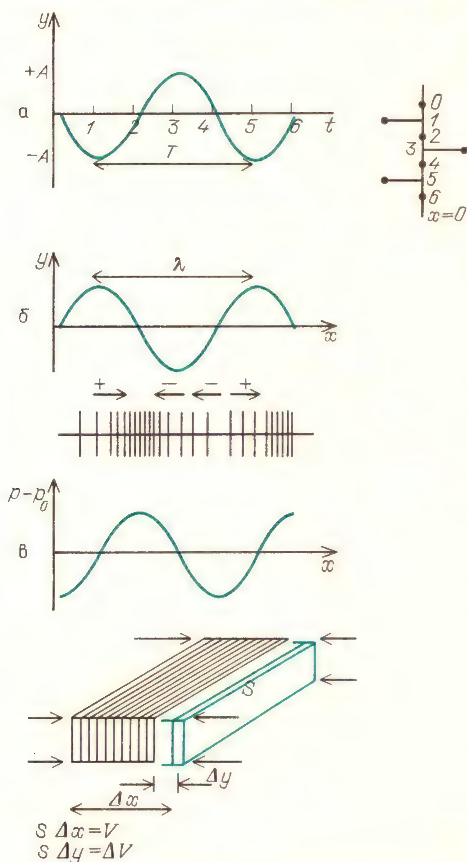
Как мы вскоре увидим, импеданс среды характеризует не только доставляемую волной мощность, но также играет главную роль в определении той степени, в которой падающая волна будет отражена от границы с другой средой или пройдет в другую среду. Мы опишем импедансы и для волн другого типа в иных средах. В любом случае они будут играть подобную роль, но импеданс не всегда так просто выражается через сомножители, характеризующие силу и плотность.

Вопрос 15-19

В каких единицах измеряется импеданс веревки и какова его размерность? Обратите внимание на характер зависимости импеданса от силы натяжения веревки и ее плотности. Есть ли физический смысл в том, что передаваемая мощность должна быть пропорциональна импедансу?

В продольных волнах давления, таких, как звук, каждая частица среды осциллирует взад и вперед вдоль направления распространения волны, как показано на приводимом рисунке. Если обозначить через y смещение каждой частицы из своего равновесного положения (хотя в данном случае частица движется взад и вперед вдоль оси x, рис. *а*), то для находящейся при $x = 0$ частицы смещение равно $y = -A \sin \omega t$. При $t = 0$ смещения частиц в разных точках оси x даются выражением $y = A \sin (2\pi/\lambda) x$ (рис. *б*). Повышенная плотность и избыточное давление будут в тех точках, слева от которых смещения частиц положительны, а справа — отрицательны. Избыточное давление связано с относительным изменением объема $\Delta V/V$ соотношением $p = -B \Delta V/V$, где B — модуль объемного сжатия. Как видно из рис. *в*, $\Delta V/V = \Delta y/\Delta x$. Поэтому

$$p = -B \frac{\Delta [A \sin (2\pi/\lambda) x]}{\Delta x} = -B \frac{2\pi}{\lambda} A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x.$$



Движение частицы, находящейся в точке $x = 0$, взад и вперед вдоль оси x при прохождении продольной волны вправо (*а*); смещения частиц, расположенных вдоль оси x при $t = 0$ (*б*); избыточное давление $p - p_0$ в разных точках оси x из-за колебаний плотности, вызванных смещениями частиц (*в*)

В точке $x = 0$ избыточное давление p изменяется со временем по закону $p = -B \frac{2\pi}{\lambda} A \cos \omega t$. Это и есть звуковое давление, и оно очень мало́ по сравнению с нормальным атмосферным давлением. Звуковое давление, при котором люди начинают ощущать боль, составляет около 30 Па, в то время как атмосферное давление равно $1 \cdot 10^5$ Па. Амплитуда давления для самого слабого звука, который мы в состоянии услышать (она зависит от частоты), составляет около $3 \cdot 10^{-5}$ Па.

Продольная скорость частиц в звуковой волне равна

$$u = \Delta y/\Delta t = -\omega A \cos \omega t.$$

Обратите внимание, что продольная скорость частиц изменяется в фазе с давлением. Обе эти величины сдвинуты по фазе на 90° относительно смещений частиц. Как скорость частиц, так и давление пропорциональны частоте.

Мощность, переносимая волной через поверхность единичной площадки, равна произведению избыточного давления на скорость частиц (напомним, что давление равно силе, действующей на единицу площади, и что произведение силы на скорость равно работе за

единицу времени):

$$pu = \left(-B \frac{2\pi}{\lambda} A \cos \omega t \right) \times$$

$$\times (-\omega A \cos \omega t) = \omega B \frac{2\pi}{\lambda} A^2 \cos^2 \omega t.$$

Среднее значение $\cos^2 \omega t$ за полный период равно как раз 1/2. Поэтому средняя интенсивность, или мощность, переносимая через единицу площади, равна

$$J = \frac{1}{2} \omega B \frac{2\pi}{\lambda} A^2.$$

Дополнительный материал

Этому выражению с помощью простых подстановок можно придавать более знакомый вид. Обозначим опять через v скорость волны, чтобы отличить волновое движение от скорости колебаний отдельных частиц. Выпишем соотношения, которыми мы далее воспользуемся:

$$f\lambda = (\omega/2\pi)\lambda = v, \quad 2\pi/\lambda = \omega/v,$$

$$v = \sqrt{B/\rho}, \quad B = v^2\rho.$$

Подставим эти значения в наше выражение для интенсивности:

$$J = \frac{1}{2} \omega B \frac{2\pi}{\lambda} A^2 = \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{v} B A^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{B\rho}\, \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} Z \omega^2 A^2,$$

где $Z = \sqrt{B\rho}$.

В конце концов мы пришли к той же самой формуле для мощности, передаваемой продольной волной давления, что и для мощности, передаваемой по веревке. Эта мощность пропорциональна квадрату частоты волны и квадрату ее амплитуды. Она также пропорциональна импедансу среды. В данном случае импеданс равен квадратному корню из произведения модуля объемного сжатия среды и ее плотности.

Вопрос 15-20
Как связан этот импеданс со скоростью волн в среде? В каких единицах он измеряется и какова его размерность?

Наша формула выражает мощность, переносимую через единицу площади продольной волной в газе, через амплитуду колебаний частиц. В действительности измерить эту амплитуду было бы очень трудно, если вообще не невозможно. Подсчитаем эту амплитуду для самого слабого звука, который мы в состоянии услышать. Амплитуда избыточного давления составляет при этом всего лишь $3 \cdot 10^{-5}$ Па. Как было показано выше, амплитуда избыточного давления p связана с амплитудой смещения A соотношением

$$p = B(2\pi/\lambda)A.$$

Для частоты 1000 Гц, к которой наше ухо наиболее чувствительно, $\lambda = (343 \text{ м/с})/1000 \text{ Гц} \approx 0{,}3$ м. Поэтому амплитуда смещения равна

$$A = \frac{p}{B} \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{3 \cdot 10^{-5} \text{ Па}}{1{,}4 \cdot 10^5 \text{ Па}} \frac{0{,}3 \text{ м}}{2\pi} =$$

$$= 1 \cdot 10^{-11} \text{ м}.$$

(Модуль объемного сжатия B для воздуха равен $\gamma p_{\text{атм}}$, где γ – отношение удельных теплоемкостей c_p/c_v, равное для воздуха 1,4, а $p_{\text{атм}}$ – атмосферное давление.)

Сравните эту амплитуду колебаний с диаметром атома, равным примерно $1 \cdot 10^{-10}$ м. И тем не менее наши барабанные перепонки реагируют на такую амплитуду, обнаруживая столь слабый сигнал.

Дополнительный материал

Выразим интенсивность звука через максимальные изменения давления. Снова нам придется последовательно выполнить несколько подстановок:

$$J = \frac{1}{2} Z\omega^2 A^2 = \frac{1}{2} Z\omega^2 \frac{p^2}{B^2 (2\pi/\lambda)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} Z \frac{f^2\lambda^2}{B^2} p^2 = \frac{1}{2} Z \frac{v^2}{B^2} p^2 =$$

$$= \frac{1}{2} Z \frac{1}{B\rho} p^2 = \frac{p^2}{2Z}.$$

(Напомним, что $v = \sqrt{B/\rho}$ и $Z = \sqrt{B\rho}$.)

Мощность, передаваемая через единицу площади, т. е. интенсивность, пропорциональна квадрату амплитуды избыточного давления и обратно пропорциональна импедансу. Обратите внимание, что в этой формуле интенсивность J не зависит от частоты.

Вопрос 15-21

Почему? В каком месте исчезла зависимость от частоты?

Подсчитаем интенсивность звуковой волны, создаваемой при нормальном разговоре. Амплитуда избыточного давления при этом равна примерно $1 \cdot 10^{-3}$ Па. Импеданс воздуха равен

$$Z = \sqrt{B\rho} = \rho\sqrt{B/\rho} = \rho v = 1{,}3\ \text{кг/м}^3 \cdot 343\ \text{м/с} = 4{,}5 \cdot 10^2\ \text{кг/(м}^2 \cdot \text{с)}.$$

Интенсивность равна

$$J = \frac{p^2}{2Z} = \frac{(1 \cdot 10^{-3}\ \text{Па})^2}{2 \cdot 4{,}5 \cdot 10^2\ \text{кг/(м}^2 \cdot \text{с)}} = 1 \cdot 10^{-9}\ \text{Вт/м}^2.$$

Если принять, что ваш голос имеет такую интенсивность на площади около 10 м^2, то полная отдаваемая вами мощность будет равна примерно $1 \cdot 10^{-8}$ Вт. Если ваш голос может доставить звук такой интенсивности до задней стены лекционного зала площадью около 100 м^2, то вы выделили мощность около 10^{-7} Вт. Сравните это с мощностью, производимой акустическими системами,– она расценивается от 10 до 100 Вт на каждый громкоговоритель.

Как и большинство наших органов чувств, ухо реагирует на раздражение логарифмически. *Уровень интенсивности* звука определяется как $10\lg(J/J_0)$. За эталонную интенсивность J_0 обычно принимают 10^{-12} Вт/м^2, что лежит близко к порогу нормального человеческого слуха при 300 Гц. *Единицей* уровня интенсивности звука служит децибел (дБ). Первоначально уровни интенсивности были определены как $\lg(J/J_0)$, а соответствующая единица была названа *бел* в честь Александра Грэхема Белла. Децибел более удобен потому, что человек на слух может обнаружить разницу в уровне интенсивности приблизительно в 1 дБ. Обратите внимание, что удвоение действительной мощности ухо воспринимает как увеличение уровня на 3 дБ. Если интенсивность возрастает в 10 раз, уровень увеличивается на 10 дБ.

Ниже приведены уровни интенсивности различных звуков. Приведенные значения приближенны, потому что существующие методы их описания носят качественный характер и потому что звуковые ощущения сильно зависят от частоты звука.

Уровни интенсивности звука

Интенсивность звука, Вт/м^2	Воспринимаемый на слух уровень интенсивности, дБ	Ощущение звука	Условия
10^{-12}	0		порог слышимости
10^{-11}	10	едва слышный	шепчущий
10^{-10}	20		легкий ветерок
	30	тихий	тихая контора
10^{-8}	40		
	50	умеренный	домашняя обстановка
10^{-6}	60		
	70		нормальный разговор
10^{-4}	80	шумный	
	90	очень шумный	городская улица
10^{-2}	100		поезд метро
	110	невыносимый	сигнал автомобиля (1 м)
	120	болевое ощущение	взлет реактивного самолета (60 м)

В главе 22 будут выведены соответствующие соотношения для электромагнитных волн. Когда электромагнитная волна проходит через некоторую точку в пустом пространстве, не происходит колебаний какого бы то ни было физического тела. Если на пути волны оказывается проводник электричества, например антенна, находящиеся в нем

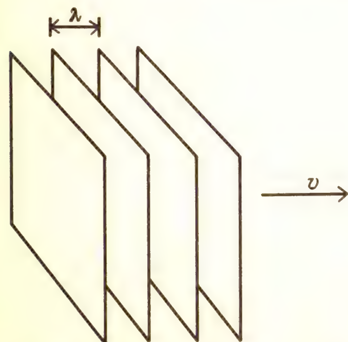
электроны могут реагировать на поле проходящей волны. Они будут осциллировать и отбирать мощность у волны. Интенсивность волны в вакууме выражается через амплитуду электрического и магнитного полей и через импеданс, характеризующий электрические и магнитные свойства вакуума. Формула для интенсивности имеет вид

$$J=\frac{1}{2}\frac{E^2}{Z}.$$

Здесь E – амплитуда электрического поля синусоидальной волны. Импеданс выражается как квадратный корень из произведения характеристики магнитных свойств (аналогичных инерции) и характеристики электрических свойств (аналогичных упругости). Оказывается, что единицы такого импеданса совпадают с единицами электрического сопротивления – омами. Значение Z для вакуума составляет 377 Ом. Как будет показано на с. 32, эффективная передача телевизионного сигнала от антенны к приемнику зависит от согласования этого значения импеданса с электрическим импедансом (или сопротивлением) антенного кабеля и входа телевизионного приемника.

РАСПЛЫВАНИЕ ЭНЕРГИИ ВОЛН

До сих пор мы имели дело с волнами, фронты которых представляют собой плоскости, параллельные друг другу и движущиеся в одном направлении. Мы предполагали, что амплитуды этих волн остаются неизменными и что их энергия не теряется. Теперь мы должны рассмотреть условия, в которых энергия рассеивается, или расплывается, что приводит к изменению амплитуды A. Волны могут терять энергию, если они вызывают колебания среды, в которой есть трение. Например, радиоволны не проникают в здания со стальными каркасами, потому что они вызывают электрические токи в поверхности металла, которые приводят как к отражению падающего излучения, так и к частичному его поглощению. Поглощенная энергия превращается во внутреннюю энергию металла. Если вы растянете на полу веревку и пустите вдоль нее волновой импульс, его амплитуда, а потому, и передаваемая энергия будут непрерывно уменьшаться по мере распространения волны. Потерянная энергия превращается в тепло, поглощаемое веревкой и полом. Когда звуковые волны падают на гладкую твердую поверхность стены, бóльшая часть их энергии отражается, поскольку колебания в твердом веществе стены почти не возбуждаются. Если, однако, звук направляется в вещество с малой плотностью, звуковые волны проникают в него и там могут затухать. Энергия звука будет уменьшаться. Энергетические потери звука в воздухе пропорциональны квадрату частоты. Хотя поглощение в воздухе



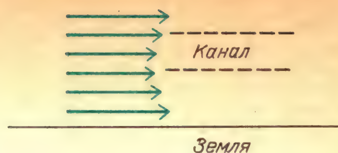
Плоскопараллельные волновые фронты

мало́, этот эффект можно заметить, если слушать оркестр на большом расстоянии: высокие ноты при этом утрачиваются.

Интенсивность волн (мощность на квадратный метр) может уменьшаться даже тогда, когда энергия волн совсем не теряется. Этот эффект легко увидеть, наблюдая расширяющиеся круговые волны на поверхности пруда. Для поверхностных волн потери энергии из-за трения очень малы, поэтому распространяющаяся с каждым кругом энергия приблизительно постоянна. Однако длина его окружности возрастает. Отсюда следует, что интенсивность (мощность на единицу длины в этом двумерном случае) уменьшается. Поскольку *мощность* на метр обратно пропорциональна расстоянию от центра, *амплитуда* такой двумерной волны должна быть обратно пропорциональна квадратному корню из расстояния от центра: $A \sim 1/\sqrt{r}$.

В случае волн, равномерно расширяющихся в *трех* измерениях, волновые фронты должны быть сферическими. При неизменной энергии, уносимой каждым сферическим фронтом, интенсивность монотонно убывает с расстоянием от источника. Поскольку площадь сферической поверхности волнового фронта пропорциональна r^2, *интенсивность* должна быть пропорциональна $1/r^2$. Следовательно, *амплитуда* пропорциональна $1/r$.

Встречаются случаи, когда волны распространяются на большие расстояния, не уменьшаясь по интенсивности. В некоторых случаях интенсивность в определенных точках даже возрастает. В главе 17 мы изучим специальные геометрические формы материалов, которые позволяют фокусировать волны либо с помощью отражения, либо избирательным изменением скорости волн в определенных областях. Мы уже указывали, каким образом звуковые волны в воздухе могут преломляться либо вверх, либо вниз. В верхних слоях атмосферы существует область, где температура начинает снова увеличиваться с высотой. Эта область создает для звука естественный канал, поскольку температура и, следовательно, скорость

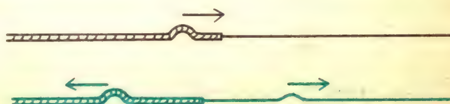


Поведение скорости звука с увеличением высоты над землей (в утрированном виде)

звука больше как у верхнего, так и у нижнего берегов этого канала. Входящий в эту область звук, создаваемый, например, сильными взрывами на земле, преломляется назад и вперед таким образом, что его энергия расширяется в тонкой оболочке, окружающей Землю, а не в трехмерном пространстве. Благодаря такому каналированию звуки от сильных взрывов можно обнаружить во всем мире, если регистрирующие приборы расположить на нужной высоте. Подобный узкий канал существует и в океанских глубинах. Сочетание температуры и солености воды создает тонкий слой, в котором скорость волн меньше, чем в слоях выше или ниже его. Излучаемая в таком слое звуковая энергия распространяется, по существу, в двух измерениях, а не в трех и поэтому может быть обнаружена на больших расстояниях. Этот канал был использован для передачи сигналов через океаны.

ВЛИЯНИЕ ИМПЕДАНСОВ НА ХАРАКТЕР ОТРАЖЕНИЯ ВОЛН

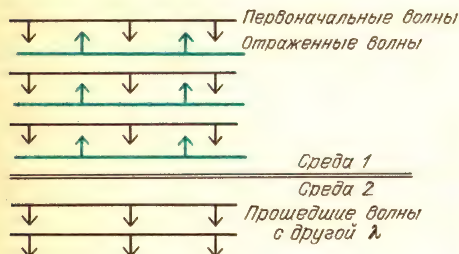
Ранее при описании отражения и преломления волн мы предполагали, что волны либо полностью отражались, либо полностью преломлялись. Чтобы больше приблизиться к действительности, следует принять во внимание тот факт, что обычно и то и другое происходит одновременно. Если в темноте вы направите луч света от карманного фонаря на окно под некоторым углом, часть света пройдет сквозь стекло, а какая-то часть отразится от стекла, как от зеркала. Если вы пустите волновой им-



пульс вдоль толстой веревки, конец которой привязан к более тонкой, часть импульса отразится, но какая-то часть будет продолжать движение вдоль тонкой веревки. Когда звуковая волна достигает конца открытой трубы органа или флейты, часть ее энергии отражается, а часть передается в окружающую среду.

Когда волна переходит из одной среды в другую, угол *преломления* зависит от отношения *скоростей* волн в этих средах. Доля *отраженной* энергии зависит от относительных *импедансов* двух сред. Как отражение, так и преломление зависят также от угла падения.

В случае, когда волновые фронты параллельны границе между двумя средами (т. е. когда угол падения равен нулю), отношение *амплитуды* отраженной

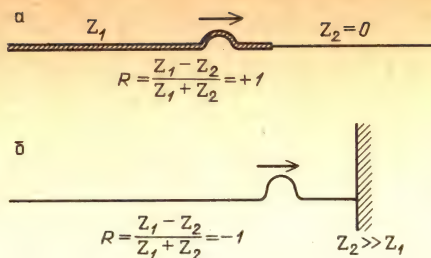


волны к *амплитуде* падающей волны равно

$$R = (Z_1 - Z_2)/(Z_1 + Z_2).$$

Здесь Z_1 – импеданс первой среды, в которой распространяется падающая волна, а Z_2 – импеданс второй среды.

Рассмотрим некоторые предельные случаи. Предположим, что $Z_2 = 0$. В примере с веревками это значит, что вторая веревка должна иметь нулевую плотность. Приближение к такой ситуации, уже описанное ранее, состоит в том, чтобы тяжелую веревку присоединить к тонкой длинной бечевке. В соответствии с нашей формулой, отношение амплитуды отраженной волны к амплитуде падающей равно 1. В самом деле, когда волновой импульс достигает границы между тяжелой веревкой и тонкой бечевкой, он отскакивает назад с той же амплитудой и бежит по той же стороне веревки (рис. *а*).



Посмотрим, что будет в противоположном предельном случае. Когда Z_2 много больше, чем Z_1, это соответствует веревке, привязанной к твердой стенке (рис. *б*). В таком случае отношение амплитуд равно –1. Волновой импульс отскакивает назад с прежней амплитудой, но на этот раз по противоположной стороне веревки. Когда Z_2 имеет промежуточное между этими предельными случаями значение, амплитуда отраженной волны будет меньше, чем амплитуда падающей.

Вопрос 15-22

Предположим, что $Z_2 = Z_1/2$. Какая часть энергии отражается от границы и какая часть энергии передается во вторую среду? Какая часть энергии отражается при $Z_1 = Z_2$?

Если мы хотим послать энергию волн из одной среды в другую, нужно постараться согласовать импедансы двух сред так, чтобы они были по возможности близки друг к другу. В идеале электрический импеданс антенны и входной цепи радио- или телевизионного приемника должен быть 377 Ом. На практике этого трудно добиться для АМ-радиоприемника, но приближенно такое условие выполняется для телевизионных и ЧМ-приемников.

В случае музыкальных инструментов необходимо создать колебания воздуха, если мы хотим, чтобы их звук достиг слушателя. Очевидно, что вибрирующая струна не может привести в колебания большие массы воздуха. Если, однако, струна прикреплена к звучащей доске (деке) и вызывает ее вынужденные колебания, дека в свою очередь имеет гораздо большую площадь поверхности, взаимодействующей с окружающим воздухом. С точки зрения импеданса

дека обеспечивает более близкое согласование с импедансом воздуха.

В случае духовых инструментов может показаться, что вибрирующий воздух в трубе должен иметь такой же импеданс, как и окружающий воздух. Так должно быть в соответствии с нашей простой формулой для импеданса. Но эта формула была выведена для случая плоской волны. Импеданс протяженной среды зависит не только от ее плотности, но и от полной массы той части среды, которая испытывает возмущение. Когда органная труба или флейта передает энергию в окружающий воздух, маленькая площадка с колеблющимся давлением должна оказать влияние на поверхности с гораздо большей площадью. Импеданс открытого воздуха больше, чем импеданс воздуха в открытой трубе, несмотря на то, что скорость звука в этих случаях приблизительно одинакова.

На самом деле хорошо, что импеданс открытого воздуха отличается от импеданса небольшой трубы. Если бы не это, не происходило бы отражения от конца трубы назад в инструмент. Как мы увидим в следующей главе, именно эта отраженная энергия позволяет возбуждать звук и управлять им. Но в то же время мы, конечно, хотим, чтобы некоторая часть энергии покидала трубу – ведь в противном случае мы никогда не услышали бы этой внутренней музыки. В случае флейты или большинства органных труб мы довольствуемся малой долей энергии, освобождаемой через этот барьер. У некоторых духовых инструментов, таких, как медные трубы, есть расширяющийся раструб, который обеспечивает постепенный переход от трубы малого диаметра к открытому воздуху.

Соответствующий импеданс изменяется плавно и постепенно, что позволяет большей доле звуковой энергии покидать трубу.

Вопрос 15-23

Чем объясняется эффект лучшей передачи голоса на определенное расстояние, если сложить ладони рупором у рта или воспользоваться мегафоном?

РЕЗЮМЕ

Волновые явления окружают нас всюду. Многие волновые эффекты можно продемонстрировать, посылая импульсы вдоль натянутых веревок, возбуждая рябь на мелкой воде, забавляясь со струнными музыкальными инструментами.

Часто волны возбуждаются или детектируются с помощью осцилляторов. Отдельные участки, через которые проходит волна, также реагируют подобно осцилляторам, совершая продольные или поперечные вынужденные колебания, но не движутся все время вместе с волной в сторону ее распространения. Для простого гармонического движения волна описывается уравнением $y = A \sin \omega t$, где y – смещение частицы из ее равновесного положения, A – максимальное смещение, или амплитуда, и $\omega = 2\pi f$, где f – частота в циклах за секунду, или герцах. Период собственных колебаний равен $T = 1/f = 2\pi \sqrt{m/k}$, где m – масса частицы и k – жесткость в законе Гука: $F = -ky$. Скорость совершающей колебания частицы равна $u = \omega A \cos \omega t$. Осциллятор может быть подвержен действию переменной силы на любой частоте, не обязательно на частоте его собственных колебаний. Амплитуда его реакции зависит от того, насколько частота вынуждающей силы близка к собственной частоте, и от того, сколько энергии рассеивается системой за один цикл. Предоставленный самому себе после начального возмущения, осциллятор с внутренним трением или затуханием будет совершать колебания с уменьшающейся амплитудой.

Мы привели вывод для скорости бегущего поперечного волнового импульса в натянутой веревке и продольного импульса, распространяющегося в одном измерении. Если скорость зависит только от восстанавливающей силы F и линейной плотности массы μ возмущенной области, анализ размерностей требует, чтобы $v = K\sqrt{F/\mu}$. Детальный анализ динамики небольших волновых импульсов в натянутой веревке дает для скорости выражение $v = \sqrt{F_н/\mu}$, где $F_н$ – сила натяжения веревки, а μ – ли-

нейная плотность массы. Для одномерного продольного волнового импульса $v = \sqrt{B/\rho}$, где B – модуль объемного сжатия и ρ – объемная плотность массы. В газе $v = \sqrt{\gamma p/\rho} = \sqrt{\gamma kT(N_A/M)}$. Для звука в воздухе последняя формула сводится к $v = 20{,}1\sqrt{T}$. Скорость звука в металлах оказывается гораздо больше, потому что, хотя их плотность и больше, чем у воздуха, модуль объемного сжатия оказывается еще больше.

Для непрерывных волн $\lambda f = v$. Мы нашли длину волны λ и частоту f для различных музыкальных нот и различных областей спектра электромагнитных волн.

Движущиеся в некоторой среде волны или волновые импульсы отражаются, когда они набегают на границу с другой средой. Если бегущий по веревке импульс достигает ее закрепленного конца, отраженный импульс бежит назад по противоположной стороне веревки; если импульс достигает свободного конца, отражение распространяется назад вдоль той же стороны. Распространение и отражение волн в двух (или трех) измерениях может быть описано с помощью предположения Гюйгенса о том, что каждая точка, до которой дошло возмущение, становится источником новой круговой (или сферической) волны. Используя построение Гюйгенса, мы показали, что для отраженной волны угол отражения равен углу падения.

Когда волна переходит из одной среды, где ее скорость v_1, в другую, где ее скорость v_2, частота волны остается прежней, но длина волны изменяется. Если волна ударяется в границу под углом падения i, угол преломления r во второй среде должен удовлетворять уравнению $\sin i/\sin r = v_i/v_r$. Звук в воздухе может постепенно преломляться при прохождении через области, где температура, а поэтому и скорость звука изменяются вдоль вертикали.

Для обычных звуковых волн и для света в вакууме скорость не зависит от частоты. Однако это уже несправедливо для света в материальных средах, таких, как стекло или вода, и уж совсем неверно для ряби на поверхности мелкой воды.

Волны переносят энергию. Мощность, доставляемая волной в одномерной системе, равна

$$P = \frac{1}{2}\sqrt{F_{\text{н}}\mu}\,\omega^2 A^2.$$

Величина $\sqrt{F_{\text{н}}\mu}$ называется импедансом Z. Мощность, передаваемая через единичную площадку волной в случае трех измерений, называется интенсивностью: $J = (1/2)\,Z\omega^2 A^2$. Для звуковой волны (или любой другой продольной волны) интенсивность равна $J = p^2/2Z$, где p – максимальное избыточное давление и $Z = \sqrt{B\rho}$. Поскольку реакция органа слуха человека на интенсивность звука имеет логарифмический характер, уровень интенсивности звука измеряется в децибелах, представляющих логарифм отношения интенсивности к некоторому произвольному уровню отсчета. Уровень интенсивности, измеренный в децибелах, равен $10\lg(J/J_0)$.

По мере распространения энергии волны амплитуда возмущения может убывать вследствие затухания в среде. Она может убывать также из-за того, что размер фронта волны растет пропорционально r в случае двух измерений или пропорционально r^2 в случае трех измерений. В первом случае интенсивность должна быть пропорциональна $1/r$ и амплитуда – $1/\sqrt{r}$; во втором случае интенсивность пропорциональна $1/r^2$ и амплитуда – $1/r$.

Когда волна переходит из одной среды в другую, часть энергии отражается и часть преломляется. Доля отраженной энергии зависит от импедансов двух сред и от угла падения. Для нулевого угла падения или в случае одного измерения отношение амплитуды отраженной волны к амплитуде падающей равно

$$R = (Z_1 - Z_2)/(Z_1 + Z_2).$$

Чтобы заметная часть энергии волны передавалась из одной среды в другую, их импедансы должны быть согласованы.

Ответы на вопросы

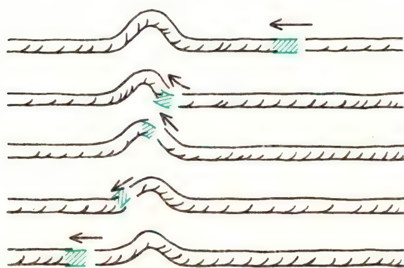
15-1. Это движение простое, потому что оно происходит под действием силы, подчиняющейся простому закону, и потому что ему соответствует единственная частота колебаний. Сила изменяется по закону $F = -kx$, где x – удлинение или деформация. Это движение называют гармоническим, потому что, как мы подробно увидим позднее, более сложные колебания можно представить в виде суммы гармоник основного колебания.

15-2. Выполняется ли равенство $(1/2)kA^2 = (1/2)m\omega^2A^2$? Оно справедливо при $\omega = \sqrt{k/m}$. Это условие дает частоту колебаний грузика на пружине. Обратите внимание, что это та же самая частота, что и полученная нами в главе 6 из геометрических соображений, основанных на связи между простым гармоническим движением и движением по окружности.

15-3. Если ни один из участков веревки не имеет начальной скорости, то импульс будет распространяться в обоих направлениях симметрично. Появится один импульс, распространяющийся вправо, и еще один, распространяющийся влево.

15-4. Без тщательных измерений вам, по-видимому, не удалось определить, что зависимость скорости выражается квадратным корнем. Однако легко увидеть качественно, что скорость импульса возрастает, когда вы увеличиваете натяжение веревки. Ясно также, что импульсы движутся медленнее в веревках большей плотности. Например, импульс в шланге движется значительно медленнее, когда шланг заполнен водой.

15-5. Наблюдая за веревкой в нашей системе отсчета, мы видим, что каждый отдельный ее участок движется просто



Движение участка веревки, видимое из системы отсчета, связанной с волновым импульсом

вверх и вниз. Однако в системе отсчета, связанной с волновым импульсом, веревка движется вдоль самой себя в противоположном направлении. Когда к началу импульса приближается определенный участок веревки, он взмывает вверх, движется по дуге (его траектория повторяет форму импульса), затем устремляется вниз. При решении задачи мы свободны в выборе системы отсчета. В связанной с импульсом системе отсчета веревка должна претерпевать центростремительное ускорение, чтобы двигаться по дуге окружности.

15-6 Объем жидкости (или газа) при повышении давления всегда уменьшается, хотя для жидкостей изменение объема мало́. Поскольку поперечное сечение выбранного нами цилиндра жидкости не изменяется, когда он входит в область высокого давления, а его скорость уменьшается, объем этого цилиндра должен уменьшаться.

15-7. Анализ размерностей справедлив и для этого случая. Обратите внимание, что B измеряется в тех же единицах и имеет ту же размерность, что и давление. Сила, деленная на линейную плотность массы, имеет ту же размерность, что и давление, деленное на объемную плотность массы:

$$\frac{\dim\{F\}}{\dim\{\mu\}} = \frac{\dim\{P\}}{\dim\{\rho\}}.$$

15-8. Приближенная формула дает, что скорость звука при температуре $t = 20\,°C$ равна $v = 331 + 0{,}6 \cdot 20 = 343$ м/с. Это значение отличается от точного лишь на 1/344, т. е. менее чем на 1/3%.

15-9. Когда что-либо вибрирует под действием силы, подчиняющейся закону Гука ($F = -kx$), результирующее движение оказывается синусоидальным. В большинстве случаев малые возмущения могут быть описаны законом Гука.

15-10. Простое гармоническое движение.

15-11. Для летучих мышей

$$\lambda \cdot 1 \cdot 10^5 \text{ Гц} = 343 \text{ м/с},$$

$$\lambda = 3{,}4 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 3{,}4 \text{ мм}.$$

Примерно такой размер имеют насекомые, представляющие интерес для летучих мышей. Для дельфинов та же частота производит большую длину волны, поскольку звук распространяется в воде. Скорость звука в воде зависит как от температуры, так и от солености. Возьмем типичное

значение – 1500 м/с. Тогда

$$\lambda = (1{,}5 \cdot 10^3 \text{ м/с})/(1 \cdot 10^5 \text{ Гц}) = = 1{,}5 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 1{,}5 \text{ см}.$$

Дельфин может обнаружить небольшую рыбку.

15-12. Точечный источник на двумерной поверхности возбуждает волны с круговыми фронтами. Точечный источник в пространстве трех измерений порождает сферические волновые фронты.

15-13. Частицы на границе раздела совершают вынужденные колебания с исходной частотой приходящей волны. Они заставляют частицы другой среды совершать вынужденные колебания с той же самой частотой. Поэтому в сочетании с изменением скорости должна измениться и *длина волны*.

15-14. В воде свет распространяется медленнее, чем в воздухе. Поскольку $v_r < v_i$, то $\sin r < \sin i$, т. е. угол преломления меньше угла падения. При переходе света из воды в воздух угол падения лежит в среде, где скорость меньше. Поэтому лежащий в воздухе угол преломления будет больше.

15-15. Участок плоской волны вблизи земли будет двигаться быстрее, чем верхние участки. Нормаль к плоскости будет отклоняться вверх, так что на некотором удалении звук лучше слышен на высоте, чем непосредственно на земле.

15-16. Звучание некоторых оркестров на большом расстоянии оказывается даже лучше, чем вблизи. Очевидно, что как высокочастотные, так и низкочастотные звуки распространяются с одинаковой скоростью.

15-17. Во-первых, следует перейти к низким частотам: предпочтительно 5 Гц или меньше. Во-вторых, одна из областей должна быть очень мелкой – глубиной всего лишь около 2 мм. Довольно безразлично, будет ли глубина глубокой области 1 см или 2 см.

15-18. Полная энергия любого куска веревки состоит из кинетической и потенциальной, средние по времени значения которых равны друг другу, так как кусок совершает простое гармоническое движение. Поскольку поперечная к направлению волны скорость куска веревки пропорциональна ωA, его кинетическая энергия пропорциональна $\omega^2 A^2$. Вся энергия, содержащаяся в куске веревки длиной Δx, доставляется за время Δt, удовлетворяющее условию $\Delta x/\Delta t = v$, где v – скорость распространения.

15-19. Единицей импеданса веревки служит килограмм в секунду (кг/с), его размерность MT^{-1}. Вполне разумно, конечно, что чем больше натяжение веревки, тем больше содержащаяся в каждом ее куске энергия колебаний и, следовательно, больше передаваемая мощность. Содержащаяся в каждом куске веревки энергия и передаваемая по веревке мощность должны также возрастать с увеличением плотности ее массы.

15-20. Скорость равна $v = \sqrt{B/\rho}$, $Z = \sqrt{B\rho}$. Единица модуля объемного сжатия B – это Па, единица плотности ρ – это кг/м^3. Комбинируя их, находим, что единицей этого импеданса является килограмм на квадратный метр в секунду: кг/(м$^2 \cdot$ с), его размерность $ML^{-2}T^{-1}$. Используя эти единицы в формуле для J, мы получаем должные для интенсивности единицы: джоули в секунду на квадратный метр.

15-21. Зависимость от частоты исчезла из выражения для интенсивности, когда она была скомбинирована с длиной волны и превратилась в скорость распространения. Однако длина волны входит в выражение, связывающее амплитуду колебания с амплитудой смещений.

15-22. При $Z_2 = Z_1/2$

$$R = \frac{Z_1 - Z_1/2}{Z_1 + Z_1/2} = \frac{Z_1/2}{3Z_1/2} = \frac{1}{3}.$$

Амплитуда отраженной волны составляет 1/3 от амплитуды падающей волны. Поэтому 1/9 часть энергии отражается и 8/9 передается во вторую среду. Если $Z_1 = Z_2$, то $R = 0$. Отражения энергии не происходит.

15-23. Здесь проявляются два эффекта. Мегафон действительно обеспечивает лучшее согласование импедансов между ртом и открытым воздухом. Но, по-видимому, еще более важно то, что сложенные рупором ладони или мегафон фокусируют звук в сравнительно узкий пучок и тем самым концентрируют энергию в желаемом направлении.

Задачи

1. Опишите качественно поведение поверхностных волн, возбуждаемых на глубоком конце наклонного противня с водой, по

мере их распространения к мелкому концу. Что происходит с длиной волны? Происходит ли отражение?

2. Исследуйте звук, издаваемый натянутой струной. Если удастся, используйте струну на скрипке или гитаре; в противном случае натяните бечевку над каким-нибудь ящиком. Опишите качественно зависимость высоты (частоты) звука от длины и толщины струны и от ее натяжения.

3. Когда тело массой 1 кг подвешено на определенной пружине, последняя удлиняется на 10 см. Чему равен период собственных колебаний этой системы?

4. С помощью рисунков и на словах объясните, почему бегущий волновой импульс продолжает двигаться в одном направлении. Ведь если бы вы сделали моментальный снимок бегущего по веревке импульса, он выглядел бы симметричным, и по снимку вы бы не могли сказать, в каком направлении он двигался.

5. Конечная скорость $v_к$ тела, начинающего движение с постоянным ускорением из состояния покоя, представляет собой функцию ускорения a и пройденного расстояния x. Воспользуйтесь анализом размерностей, чтобы найти эту *функциональную* зависимость: $v_к = f(a, x)$. Убедитесь, что полученная формула согласуется с уже известной вам формулой, относящейся к этому случаю.

6. Тяжелая веревка имеет линейную плотность 0,5 кг/м. Чему равна скорость волн в веревке, если она натянута с силой 2,50 Н?

7. Слинка (спиральная пружина с витками большого диаметра, имеющая очень малую длину в нерастянутом состоянии) массой 0,5 кг растянута до длины 8 м под действием силы 5 Н. Чему равна скорость поперечных волн?

8. Масса 1 моля гелия равна 4×10^{-3} кг/моль. Чему равна скорость звука в гелии?

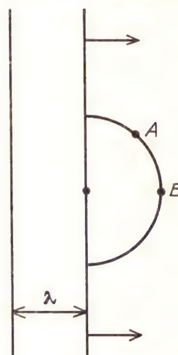
9. Чему равна скорость звука в воздухе при 30 °С – температуре жаркого летнего дня? На сколько процентов отличается эта скорость от скорости звука в холодный зимний день при температуре –10 °С?

10. Модуль объемного сжатия стали равен $1{,}6 \cdot 10^{11}$ Па, а ее плотность – 7800 кг/м^3. Чему равна скорость звука в железнодорожном рельсе? Если кто-нибудь ударит по рельсу на таком расстоянии, что звук дойдет до вас по воздуху за 1 с, сколько времени потребуется звуку, распространяющемуся по рельсу?

11. Флейту привозят на зимний концерт в багажнике автомобиля, где температура равна 0 °С. Флейтист вбегает в зал, настраивает свой инструмент и начинает играть. Что происходит с высотой звука (частотой) по мере того, как температура флейты и находящегося внутри нее воздуха поднимается до 30 °С? (Она поднимается до значения, лежащего между комнатной температурой и температурой тела.) Примите, что размер флейты заметным образом не изменяется и поэтому длины волн остаются прежними. Подсчитайте влияние изменения температуры на скорость звука и, следовательно, на частоту.

12. Чему равна длина волны ЧМ-радиостанции, работающей на частоте 100 МГц?

13. Начертите прямую, изображающую какой-либо гребень движущейся волны.



Возьмите одну из его точек за центр круга, радиус которого равен длине волны. Начертите этот круг, представляющий по Гюйгенсу вторичную волну, исходящую из точки движущейся волны. Пометьте на этом круге точку B под углом 90° к гребню (переднюю). Пометьте на этом же круге другую точку A под углом 45°. Теперь найдите на исходном прямолинейном гребне другую точку, создающую вторичную волну, которая всегда уничтожает действие первой вторичной волны в точке A. Будет ли эта вторичная волна уничтожать действие первой в точке B?

14. В сосуде для наблюдения ряби скорость волн в одной области равна 20 см/с, а в другой 15 см/с. Что происходит с падающей волной, пересекающей границу под углом 60°? Рассмотрите эту задачу в двух случаях: пересечения границы из «быстрой» области (где скорость волн больше) в медленную и из медленной в быструю.

15. Волна частотой 12 Гц распространяется со скоростью 30 см/с в мелкой части сосуда с водой. Она пересекает границу более глубокой части сосуда под углом падения 35°. Чему равен угол преломления, если длина волны в более глубокой части сосуда равна 3,7 см?

16. На корабле включают сирену, подающую сигналы в тумане, и спустя 6,4 с

слышно эхо. Как далеко находится отражающая поверхность, если температура воздуха равна 5 °С?

17. Допустим, что вам нужно узнать скорость *продольной* волны в пружине. Поскольку эта скорость должна определяться квадратным корнем из характеристики упругих свойств, деленной на характеристику инертных свойств, возможно, что скорость просто равна квадратному корню из жесткости пружины, деленной на линейную плотность. Воспользуйтесь анализом размерностей, чтобы проверить, возможна ли такая формула.

18. Поперечная волна амплитудой 0,20 м и длиной волны 1,50 м распространяется вдоль пружины со скоростью 3,5 м/с. Считая, что некоторый малый участок пружины совершает при этом простое гармоническое движение, найдите его максимальную скорость и максимальное ускорение.

19. Сделайте рисунок, иллюстрирующий построение Гюйгенса для отражения плоской волны от границы при угле падения 15°. Используйте этот рисунок, отмечая на нем все необходимые углы и отрезки, для доказательства того, что $i = r$.

20. Сделайте рисунок, иллюстрирующий построение Гюйгенса для преломления плоских волн, падающих под углом $i = 30°$ при $v_i/v_r = 2$.

Отметьте на рисунке все необходимые углы и отрезки.

21. Населенный пункт находится у крутого обрыва над глубоким озером, навигация на котором продолжается весной, летом и осенью. Опишите разницу в звуках, доносящихся с судов на высокий берег осенью по сравнению с весной.

22. Какие глубины следует использовать в сосуде для наблюдения поверхностных волн, чтобы с помощью вибратора частотой 5 Гц получить угол преломления 15° при угле падения 30°?

23. Железнодорожный свисток производит звук мощностью 100 Вт. Какова интенсивность звука на расстоянии 100 м, если его энергия распространяется равномерно во все стороны? Чему равен уровень его интенсивности в дБ?

24. Какую мощность можно передавать, посылая синусоидальные волны по натянутой веревке? Веревка имеет линейную плотность 0,3 кг/м и находится под натяжением силой 100 Н. Конец веревки трясут с частотой 2 Гц и амплитудой 15 см.

25. При избыточном давлении в 30 Па в звуковой волне частотой 1000 Гц ухо человека ощущает боль. Какова при этом интенсивность в ваттах на квадратный метр и уровень интенсивности в децибелах?

26. Если кольцо, например веревочное, плашмя роняют в пруд, что происходит с амплитудой волнового импульса, возникающего с внешней стороны кольца? Что происходит с амплитудой импульса, возникающего внутри кольца?

ГЛАВА 16. СЛОЖНЫЕ ВОЛНЫ И ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ

Ножки камертонов выполняют простое гармоническое движение. Производимые ими звуковые волны дают почти чисто синусоидальные тона. Как огорчительно, однако, было бы слушать музыку в исполнении оркестра камертонов! Музыкальные звуки характеризуются не только высотой тона, или частотой, но также и тембром. Им соответствуют периодические, но не синусоидальные волны. Неправильные формы и зазубренные края отдельных гребней создают богатство тональностей. Теперь мы должны изучить эти сложные волны.

Для многих типов волновых движений скорость волн зависит от частоты. Это явление называют *дисперсией*. Оно ведет ко многим интересным результатам. Некоторые из них встречаются нам повседневно. Например, дисперсия белого света в изделиях из хрусталя дает радужный спектр сверкающих красок.

Наблюдаемая частота волн зависит также от относительной скорости источника и приемника. Если приближающийся к вам поезд дает свисток, тон его звука воспринимается как более высокий по сравнению с нормальным вплоть до момента, пока поезд не пронесется мимо, после чего высота тона резко падает. Это – эффект Доплера, названный так по имени его открывателя Христиана Доплера (1803 – 1853).

В большинстве случаев волны в среде могут проходить прямо друг сквозь друга, не оказывая возмущающего влияния на процесс распространения каждой из них. Однако в области, где они перекрываются, возмущение среды в каждой точке представляет собой сумму отдельных возмущений. При определенном взаимном расположении этот эффект приводит к образованию стоячих волн, в которых некоторые точки совсем не испытывают возмущения несмотря на то, что обе волны проходят через них.

Стоячие волны, возникающие при отражении поверхностных волн на воде

Обычно эффекты интерференции зависят от длины волны. Интерференционные явления могут приводить к образованию спектров, подобных тем, что создаются явлением дисперсии в призмах. Явление интерференции ответственно также за *дифракцию*, когда пучок волн интерферирует сам с собой и в результате для некоторых направлений его распространение сводится на нет, а для других усиливается.

Все эти сложные волновые эффекты способствуют получению музыкальных звуков. Когда мы научимся описывать сложные волны, то применим эти результаты для понимания структуры музыкальных тонов и устройства инструментов, которые создают их.

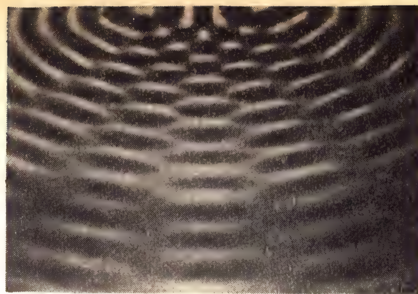
ЗНАКОМСТВО С ЯВЛЕНИЯМИ

1. Снова наполните водой ванну или противень из духовки и попытайтесь найти более сложные эффекты, создаваемые поверхностными волнами. Начните с повторяющегося одновременного обмакивания в воду двух пальцев. Добейтесь равномерного ритма в несколько циклов в секунду, так чтобы от пальцев расходились непрерывные последовательности волн. Наблюдайте за тем, как два круговых волновых фронта интерферируют друг с другом на некотором расстоянии от ваших пальцев. Посмотрите, удается ли обнаружить линию узлов, где в любой момент времени возмущение отсутствует. Они хорошо видны на приводимых фотографиях.

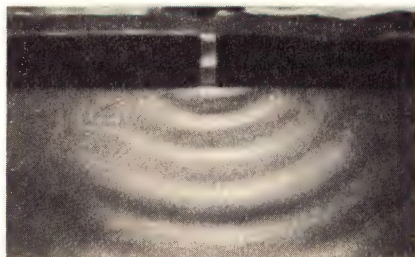
Сделайте барьер из двух дощечек или кусков картона, отгораживающий один конец противня с водой. Образуйте зазор посередине между ними и пошлите затем плоские волны в направлении к барьеру с зазором. Продолжают ли распространяться в прежнем направлении волны, прошедшие сквозь зазор? Идут ли они дальше в виде узкого пучка или они расширяются? Попробуйте увеличить ширину зазора и наблюдайте за тем, что происходит в областях, где можно ожидать теней.

Проявления этих эффектов станут более яркими, если у вас будет доступ к большой водной поверхности, например к пруду.

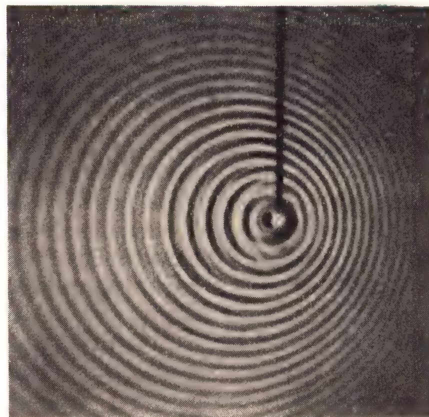
2. В пруду или даже в ванне вы можете наблюдать эффект Доплера. Периодически касайтесь пальцем воды, чтобы получать поверхностные волны, но при этом перемещайте палец равномерно в одном направлении. Следующие друг за другом гребни волн будут сгущаться в направлении движения вашего пальца и станут более разреженными с противоположной стороны. Следовательно, длина волны будет меньше, чем обычно, в направлении вперед и больше, чем обычно, в направлении назад. Убедившись в этом, проведите просто пальцем по воде с несколькими различными скоростями и понаблюдайте за тем, какие углы образуют носовые волны.



Поверхностные волны возбуждаются двумя маленькими шарами, качающимися в сосуде с водой вверх и вниз. На фото видны тени, отбрасываемые волнами



Приходящие сверху плоские волны проникают сквозь узкий зазор, образуя круговые волны



Эффект Доплера для волн на поверхности воды. Находящийся на конце стержня источник равномерно двигался вправо

Если вы живете вблизи железнодорожного переезда, мимо которого проходят поезда, возможно, вам уже доводилось сталкиваться с эффектом Допле-

ра. Обратите внимание, что падение высоты тона в тот момент, когда поезд проносится мимо, происходит резко. Звук одиночного удаленного свистка становится громче по мере его приближения к вам, но частота остается примерно постоянной, пока не происходит внезапного изменения скорости. Поезд не изменяет скорости движения относительно земли, но скорость его *приближения* к вам внезапно сменяется такой же скоростью *удаления* от вас. Если поблизости от вас поезда не ходят, может быть, удастся устроить подобную демонстрацию этого явления, попросив кого-нибудь проехать мимо вас на автомобиле с постоянно включенным звуковым сигналом.

3. Интерференция двух звуковых волн с почти одинаковыми частотами приводит к явлению *биений*. Вы можете легко воспроизвести его с помощью любых двух музыкальных инструментов. Если взять две струны, предпочтительно на одинаковых инструментах, звучащие на одной ноте, то, изменив чуть-чуть высоту тона одной из них, вы услышите быстрые возрастания и уменьшения интенсивности. Если эта пульсация происходит достаточно медленно, вы сможете подсчитать число биений в секунду. Число биений в секунду равно разности частот двух звучащих нот. Биения можно также услышать с помощью двух духовых инструментов, звучащих одновременно, если слегка изменена частота одного из них. Для этой цели хорошо подойдут два игрушечных свистка с изменяемой длиной, так же как и два тромбона.

4. Если вы можете получить в свое распоряжение какой-нибудь духовой инструмент, измерьте, какая у него может быть наибольшая и наименьшая длина. Наименьшая длина у тромбона получается, конечно, когда его скользящая часть полностью вдвинута. У вентильных инструментов, таких, как труба, каждый нажатый вентиль увеличивает полную длину трубки. Найдите самую низкую и самую высокую ноты, которые можно сыграть на данном инструменте. Чтобы определить частоты этих нот, вы можете сравнить их звучание с нотами рояля и затем найти соответствующие частоты по карте, приведенной на с. 18.

При любой определенной длине трубки вы сможете сыграть на инструменте несколько нот. В конце концов, у горна всегда одна и та же длина, и все же на нем можно сыграть по меньшей мере пять различных нот.

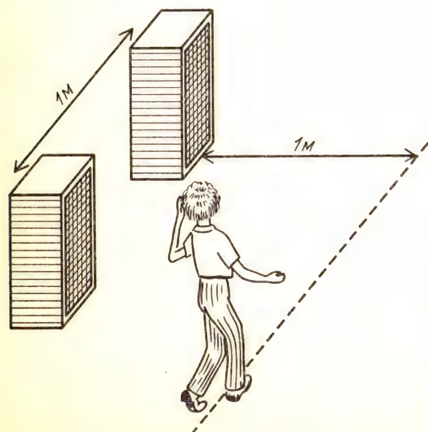
Найдите длины волн для самой высокой и самой низкой нот и сравните их с длиной трубки инструмента, требующейся для воспроизведения этих нот. Вы сразу заметите, что длина волны для самой низкой ноты имеет тот же порядок величины, что и длина трубки. Действительное соотношение зависит от типа инструмента, а также от того, получается ли низшая нота как основной тон или первый обертон. Некоторые из этих соотношений будут описаны ниже.

Подобным же образом измерьте длину струны на любом струнном инструменте и сравните ее с длиной волны производимого звука (и здесь, если вы не знаете музыкального названия взятой ноты, как, например, среднее *C*, вы можете сравнить высоту ее тона с нотой рояля и затем найти частоту по карте на с. 18. Затем вы сможете найти длину волны, зная, что скорость звука в воздухе равна приблизительно 340 м/с). В случае струнного инструмента длина струны значительно меньше, чем длина волны издаваемого ею звука. В дальнейшем мы увидим, почему существуют такие соотношения длин.

5. Можно очень эффектным способом продемонстрировать, что колебания низкой частоты с трудом пробивают себе дорогу в окружающий воздух, если нет деки с большой площадью поверхности. Чтобы показать это, вам предлагается изготовить музыкальный инструмент, о котором никто бы не подумал, что он может издавать столь красивые звуки. Для этого понадобится лишь вешалка от пальто в виде проволочной спирали и два куска бечевки или прочной нитки. Размотайте вешалку так, чтобы она превратилась просто в длинный кусок проволоки, и привяжите бечевки к обоим ее концам, как показано на фотографии. Другие концы бечевок прижмите к ушам указательными пальцами, чтобы бечевки и проволока

свободно свисали, не соприкасаясь ни с чем, кроме ваших пальцев и ушей. Теперь пусть эта проволока-вешалка ударится о что-либо твердое или попросите товарища постучать по ней карандашом. Все, кто вас окружает, услышат лишь слабое бренчанье, исходящее от проволоки, но вы услышите устрашающие удары огромного колокола.

6. Если вы достали запись для испытания акустических систем, как предлагалось в главе 15, вы можете проиграть один и тот же чистый синусоидальный тон через оба громкоговорителя стереосистемы. Установите колонки на расстоянии около 1 метра друг от друга и проигрывайте ноту, которой соответствует частота 1000 Гц. Перемещайтесь параллельно линии, соединяющей колонки, на расстоянии около 1 метра от



нее. Одно ухо должно быть обращено в сторону колонок. Попытайтесь обнаружить области нулевых колебаний, когда вы передвигаетесь вдоль этой линии. Если колонки подключены правильно, максимальная громкость будет в центральной точке между двумя колонками. Вы найдете нулевые области, где звук заметно ослаблен, в точках на расстоянии около 20 см по обе стороны центрального максимума.

Используя испытательную запись, направьте сигнал только в одну колонку. Если ваша комната достаточно велика, так что в ней нет сильных отражений звука от стен, поставьте кресло с мягкой обивкой или крупного человека прямо перед колонкой в 2 метрах от нее. Попробуйте обнаружить на слух тень, отбрасываемую креслом или человеком, используя сначала частоту 100 Гц, а затем несколько тысяч герц. Изучить этот эффект на опыте можно также, направив звук в сторону открытой двери, ведущей в комнату значительно большего размера или на улицу. В этом случае вместо того, чтобы посылать звук на препятствие, вы посылаете его сквозь щель. Проверьте на слух, как частота звуковых волн влияет на то, в какой степени они могут огибать углы.

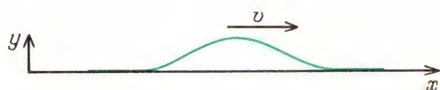
7. Другой способ наблюдать прохождение волн через узкие щели или отверстия состоит в том, чтобы смотреть на точечный источник света сквозь проколотые булавкой отверстия или очень узкие щели. Источник света должен быть ярким, но по возможности маленьким. Хорошо подойдет для этого отдаленный уличный фонарь, но подойдет и пламя свечи, находящейся на некотором расстоянии в затемненной комнате. Проколоть булавочные отверстия и прорезать очень узкие щели можно в алюминиевой фольге (щель должна быть уже, чем 1 мм). Грубо такие отверстия или щели можно получить между соседними пальцами. В любом случае расположите отверстие перед глазом и смотрите на точечный источник света. Свет будет казаться расходящимся либо круговым образом – в случае булавочного отверстия, либо в виде широких боковых полос – в случае щели. Обра-

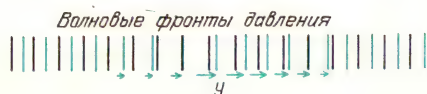
тите особое внимание на то, что происходящее обусловлено не просто рассеянным светом, расходящимся во все стороны. Можно увидеть определенные светлые и темные полосы, соответствующие тому, что мы называли нулевыми областями или узлами в случае звуковых волн или волн на воде.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ БЕГУЩИХ ВОЛН

В предыдущей главе мы описывали волновые импульсы и волны, распространяющиеся во многих различных средах. Для понимания этих явлений мы должны изучить их на опыте, используя руки, глаза и уши, но было бы также неплохо уметь описывать их на языке физики и математики. Этот язык, как и любой другой, помогает нам разобраться в явлениях, которые недоступны непосредственно нашим органам чувств. Несомненно, что падение камня будет выглядеть для вас иначе после того, как вы изучили описывающую его математику и увидели графики $x(t)$, $v(t)$ и $a(t)$. Каждый может видеть, что детские качели совершают движения вперед и назад. Но дополнительное удовольствие (а иногда и пользу) доставляет знание того, что это движение синусоидально. Перейдем теперь, как ради удовольствия, так и для пользы дела, к формулировке математического описания бегущей волны.

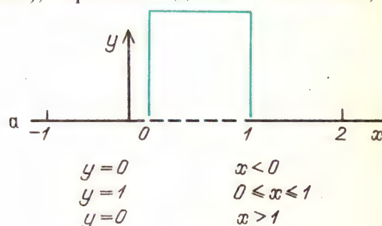
Будем описывать волну, распространяющуюся в направлении оси x со скоростью v. Если это волна в веревке, то имеются смещения y частиц веревки, перпендикулярные к оси x и изменяющиеся при прохождени волны. Если это звуковая волна, в ней имеются волновые фронты, движущиеся в направлении оси x, и возмущение может быть выражено через происходящие взад и вперед смещения y частиц среды, или через давление p. В любом случае мы будем использовать переменную y для характеристики возмущения среды. Это возмущение представляет собой функцию как времени t, так и расстояния x вдоль оси: $y = f(t, x)$.

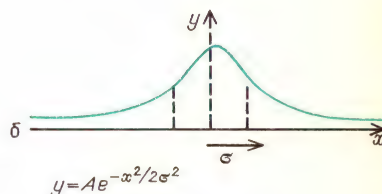


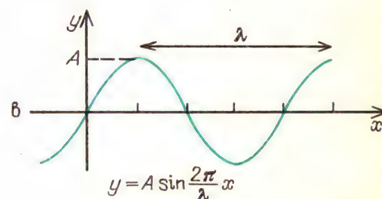


Смещение, перпендикулярное к скорости волны (вверху), смещение в направлении скорости волны (внизу)

Возмущение не обязательно должно быть синусоидальной волной. В самом деле, в предыдущей главе мы исследовали поведение одиночных волновых импульсов. Два таких импульса изображены на рис. *а*, *б*. Здесь показаны прямоугольный импульс и экспоненциальный импульс (называемый гауссовым), причем сделано это так, как







если бы они были неподвижными и представляли собой просто некоторую функцию от x. Вместе с каждой кривой на рисунке приведена соответствующая функциональная зависимость от x. Описание прямоугольного импульса требует нескольких математических выражений. В этом отношении описание гауссова импульса проще, хотя может

быть и менее знакомо. Обратите внимание, что вследствие зависимости гауссова импульса от x^2 он должен быть симметричен относительно $x = 0$. При $x = 0$ экспонента равна единице и $y = A$. Постоянная σ служит мерой ширины кривой. При $x = \sigma$ $y = A/\sqrt{e} = 0{,}61A$, т. е. составляет 61% от своего максимального значения.

На рис. *в* мы снова показываем синусоидальную волну, замороженную во времени, так что y представляет собой функцию только x. Отметьте, что эту функцию нельзя описать просто выражением вида $y = A \sin x$. Аргументом синуса должен быть угол, а x – это расстояние. Нужно выразить расстояние вдоль оси x в виде произведения безразмерного сомножителя и угла, измеренного в градусах либо в радианах. Поскольку возмущение периодично с длиной волны λ, мы можем определить расстояние как 2π рад$\cdot(x/\lambda)$, или как $360°\ (x/\lambda)$.

Вопрос 16-1

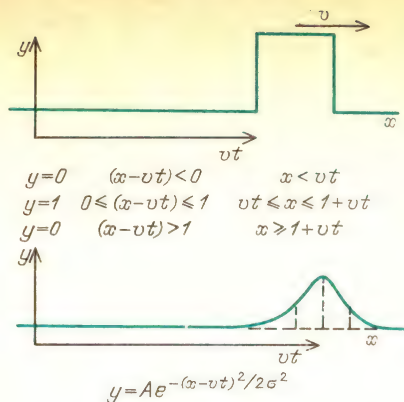
Чему равно значение y при $x = 0$? При $x = {}^1/_4\lambda$? При $x = {}^1/_2\lambda$? При $x = 3{}^1/_4\lambda$?

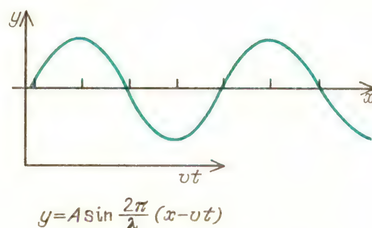
Теперь мы должны сделать так, чтобы все эти возмущения двигались вдоль оси x. Примем, что они движутся вправо. Спустя промежуток времени t контур как целое сдвинется на расстояние vt. Наше математическое описание будет согласовано с этим требованием, если мы просто подставим $x - vt$ вместо начального положения x. Оба одиночных импульса и синусоидальная волна еще раз показаны на следующем рисунке в процессе их движения вправо. Обратите внимание на их новые алгебраические выражения.

Вопрос 16-2

Как бы вы описали гауссов импульс, движущийся влево? Напомним, что при $t = 0$ пик гауссова импульса находится при $x = 0$. В соответствии с вашей формулой для движущегося влево импульса, где находится его пик при $t = 1$ с?

Формулу для бегущей синусоидальной волны можно преобразовать к не-



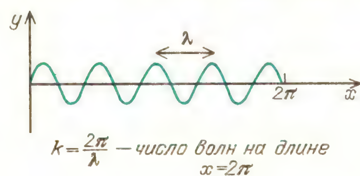


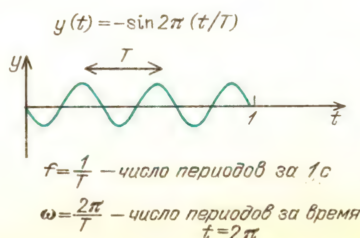
скольким другим полезным формам. Для выполнения этих преобразований напомним, что

$$\lambda f = v,\ 1/f = T,\ \lambda = vT,$$

$$\omega = 2\pi f,\ \omega = 2\pi/T.$$

В более серьезных трудах вы можете встретить еще один символ, представляющий собой пространственный аналог круговой частоты. *Волновое число* k равно числу длин волн, укладывающихся на расстоянии 2π метров: $k = 2\pi/\lambda$. Обратите внимание на соответствие волнового числа круговой часто-





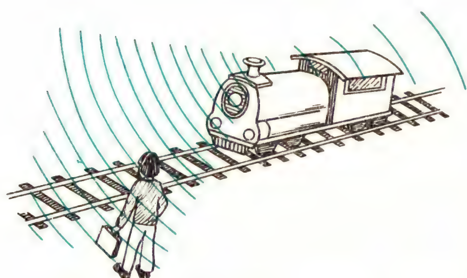
те ω: $\omega = 2\pi/T$. Переходя к этим переменным, получим

$$y = A\sin\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt) = A\sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) = A\sin(kx - \omega t).$$

Среднее выражение дает наглядное представление о сходном характере зависимости бегущей волны от x и t. По мере продвижения вдоль оси x от нуля до длины волны λ аргумент синуса возрастает от нуля до 2π радиан. То же происходит и с течением времени, когда оно изменяется от нуля до периода T.

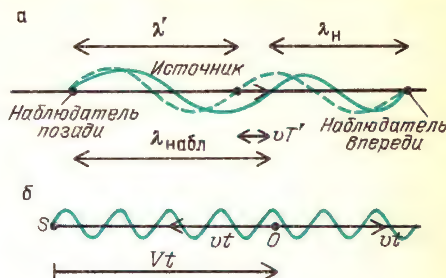
БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ, КАК ОНИ ВИДНЫ ИЗ ДРУГОЙ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА – ДОПЛЕРОВСКИЙ СДВИГ

В «Знакомстве с явлениями» мы описали, что происходит со звуком одиночного паровозного свистка, когда поезд проходит мимо вас на переезде. Свисток испускает волну, которая идет в вашу сторону, но сам источник тоже движется сначала по направлению к вам, а затем от вас. На рисунке показано,



что вы, т. е. приемник звука, стоите неподвижно относительно среды (в данном случае это воздух), а источник движется. Перед ним гребни волн сгущаются, так что длина волны становится короче. Число таких гребней, проходящих мимо вас за 1 секунду, становится больше, и поэтому частота возрастает. В случае, когда это звук, вы слышите более высокий тон. Однако когда вибрирующий источник удаляется от вас, расстояние между гребнями волн растягивается и частота, с которой эти гребни проходят мимо вас, становится меньше. В случае звуковых волн вы слышите более низкий тон.

На приводимом ниже рисунке показан вывод действительного изменения



Приемник неподвижен относительно среды, источник движется (*а*); источник неподвижен относительно среды, приемник движется (*б*)

частоты для двух случаев. В первом случае, относящемся к задаче о поезде, наблюдатель (приемник) неподвижен, в то время как источник движется. Здесь V – скорость звука в воздухе, v – скорость движущегося источника, f' – частота источника. Очевидно, что $\lambda' f' = V$, $\lambda f = V$, $T' = 1/f'$. Из рисунка видно, что $\lambda_{\text{набл}} = \lambda_{\text{ист}} \pm vT'$ (плюс, если источник удаляется, минус, если источник приближается). Отсюда $V/f = V/f' \pm v/f'$, т. е. $Vf' = Vf \pm vf$ и

$$f_{\text{набл}} = f' \frac{V}{V \pm v}.$$

Во втором случае неподвижен источник, а наблюдатель движется. Когда источник неподвижен в точке S, неподвижный наблюдатель в точке O принимает $(Vt/\lambda)/t$ волн в секунду, т. е. $f'_{\text{набл}} = f_{\text{ист}} = V/\lambda$. Движущийся же наблюдатель принимает $[(Vt \pm vt)/\lambda]/t$ волн в секунду. Поэтому

$$f_{\text{набл}} = \frac{V \pm v}{\lambda} = \frac{V}{\lambda}\left(1 \pm \frac{v}{V}\right) = f_{\text{ист}}\left(1 \pm \frac{v}{V}\right)$$

(плюс, если наблюдатель движется к источнику, минус – при движении от источника). В любом случае при сближении источника и наблюдателя высота

звука больше; при удалении источника и наблюдателя друг от друга высота тона меньше.

Дополнительный материал

Поскольку доплеровский сдвиг возникает из-за различия между системами отсчета источника и наблюдателя, наиболее простой способ его описания основан на использовании формул преобразования от одной системы отсчета к другой. В главе 11 мы видели, как это делается. Ради простоты будем использовать принцип относительности Галилея, когда предполагается, что время в обеих системах отсчета одинаково, и поэтому скорости просто складываются.

Преобразования Галилея выполняются по следующим правилам:

$$t' = t,\ y' = y,\ z' = z,\ x' = x - vt.$$

Эти уравнения описывают преобразования для двух систем, оси координат которых совпадают при $t = 0$. Штрихованная система

движется вдоль оси x в положительном направлении с постоянной скоростью v. Мы будем использовать символ V для скорости звука в воздухе, чтобы не смешивать эту скорость со скоростью v движущейся системы отсчета.

Для начала предположим, что волны генерируются в нашей нештрихованной системе отсчета. Их распространение вдоль оси x мы описываем в соответствии с формулой

$$y = A\sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) =$$

$$= A\sin 2\pi f\left(\frac{x}{f\lambda} - \frac{t}{fT}\right) = A\sin 2\pi f\left(\frac{x}{V} - t\right).$$

Воздух в нештрихованной системе неподвижен по отношению к нам. Поэтому измеряемая нами скорость звука – это «истинная» скорость в отличие от скорости, измеряемой наблюдателем в штрихованной системе. По принципу относительности Галилея скорости складываются непосредственно. Поэтому наблюдатель в штрихованной системе отсчета найдет, что скорость звука равна $V' = V \pm \pm v$ (минус, если наблюдатель движется в направлении $+x$, удаляясь от источника; плюс, если наблюдатель движется в направлении $-x$, приближаясь к источнику).

Теперь мы можем преобразовать формулу для бегущей волны в штрихованную систему отсчета, удаляющуюся от источника, простой подстановкой преобразования для x:

$$y' = y = A\sin 2\pi f\left(\frac{x' + vt}{V} - t\right).$$

Наблюдатель в этой системе принимает синусоидальную волну, которую он описал бы такой же формулой, какую мы использовали в нештрихованной системе. Конечно, этот наблюдатель стал бы использовать переменные своей системы, в том числе иную частоту и иную скорость волны:

$$y' = A\sin 2\pi f'\left(\frac{x'}{V'} - t\right).$$

Последние два выражения должны совпадать тождественно. Поэтому

$$A\sin 2\pi f\left(\frac{x' + vt}{V} - t\right) =$$

$$= A\sin 2\pi f'\left(\frac{x'}{V'} - t\right).$$

Поскольку $V' = V - v$, равенство принимает вид

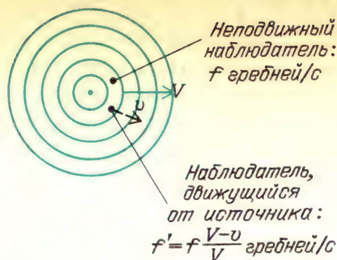
$$f\left(\frac{x' + vt}{V} - t\right) = f'\left(\frac{x'}{V - v} - t\right).$$

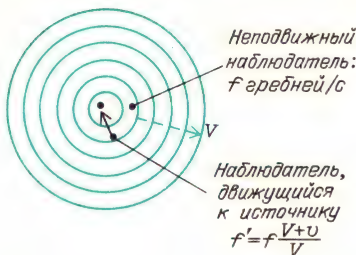
Таким образом, мы получили выражение для частоты f', наблюдаемой в штрихованной системе. Выполним упрощающие преобразования:

$$f'_{\text{набл}} = f\frac{(x' + vt - Vt)/V}{(x' + vt - Vt)/(V - v)} = f\frac{V - v}{V}$$

(наблюдатель движется в направлении от источника).

Теперь, уделив должное внимание математическим преобразованиям, посмотрите на рисунок для уяснения описываемой ими физической ситуации. Источник звука (например, фабричный гудок) неподвижен по отношению к нам в нештрихованной системе и по отношению к воздуху. Движущийся наблюдатель удаляется от источника звука.





Следовательно, гребни волн движутся относительно него не так быстро или не так часто, как они двигались бы, если бы он был неподвижен относительно воздуха. Поэтому наблюдаемая им частота ниже. Именно об этом и говорит наша формула.

Вопрос 16-3

Что происходит, если скорость движения наблюдателя $v = 0$? Что происходит, если $v = V/2$? Что происходит, если $v = V$?

Когда наблюдатель движется по направлению к источнику, а не удаляется от него, его скорость будет равна $-v$. Все в нашем выводе останется по-прежнему, за исключением того, что v нужно заменить на $-v$.

Окончательная формула будет иметь вид

$$f'_{\text{набл}} = f\frac{V+v}{V}$$

(наблюдатель движется в направлении к источнику). В соответствии с этой формулой, когда наблюдатель движется в сторону источника, неподвижного относительно воздуха, наблюдатель услышит звук более высокой частоты. Это предсказание согласуется с ситуацией, показанной в нижней части предыдущего рисунка. Волны в воздухе движутся по направлению к наблюдателю, а наблюдатель в свою очередь движется им навстречу. Следовательно, гребни волн проходят мимо наблюдателя быстрее (и чаще), чем они проходили бы, если бы он был неподвижен. Он слышит звук более высокой частоты.

Теперь возьмем случай неподвижного наблюдателя (неподвижного по отношению к среде) и движущегося источника волн. Это задача о поезде. В системе отсчета, связанной с поездом, производимый им сигнал описывается уравнением

$$y' = A\sin 2\pi f'\left(\frac{x'}{V'} + t\right).$$

Когда поезд мчится прочь от нас, $x' = x - vt$. Эта ситуация соответствует нашим прежним вычислениям, где источник и наблюдатель удалялись друг от друга. Обратите внимание, что скорость звука относительно поезда равна V', поскольку поезд движется сквозь среду. Если волны в среде движутся со скоростью V, то наблюдатель в поезде, глядя назад, видит, что гребни волн убегают от него со скоростью $V' = V + v$.

Теперь преобразуем переменные в уравнении волны от системы отсчета, связанной с поездом, к системе отсчета неподвижного наблюдателя:

$$y = y' = A\sin 2\pi f'\left(\frac{x - vt}{V + v} + t\right).$$

Неподвижный наблюдатель слышит проходящую мимо него синусоидальную звуковую волну, но с иной частотой f:

$$y = A\sin 2\pi f\left(\frac{x}{V} + t\right).$$

Снова можем найти соотношение между частотами в движущейся и неподвижной системах отсчета, приравнивая аргументы синусов:

$$f\left(\frac{x}{V} + t\right) = f'\left(\frac{x - vt}{V + v} + t\right),$$

$$\frac{f}{f'} = \frac{Vt + vt + x - vt}{V + v}\,\frac{V}{Vt + x} = \frac{V}{V + v},$$

$$f_{\text{набл}} = f'\frac{V}{V + v}$$

(источник движется по направлению от наблюдателя).

Это уравнение согласуется с наблюдаемым на опыте фактом, что звук свистка удаляющегося от нас поезда имеет более низкий тон. Если бы поезд двигался по направлению к нам, все в этом выводе осталось бы прежним, за исключением того, что $+v$ сле-

довало бы заменить на $-v$. Тогда наше уравнение приняло бы вид

$$f_{\text{набл}} = f' \frac{V}{V - v}$$

(источник движется по направлению к наблюдателю).

Вопрос 16-4

Чему равно отношение частот f/f' в случае движущегося источника звука, если $v = 0$? Если $v = V/2$? Если $v = V$?

Эти два случая – движущийся наблюдатель и движущийся источник – не симметричны. Распространение волн происходит в среде, и когда мы говорим «движущийся» или «неподвижный», то имеем в виду по отношению к среде. Сравним оба уравнения, описывающие ситуацию, в которой источник и наблюдатель удаляются друг от друга. В этой ситуации – когда источник или когда наблюдатель неподвижен относительно воздуха – наблюдатель услышит звук пониженной частоты:

источник с частотой f неподвижен; наблюдатель воспринимает частоту f':

$$f'_{\text{набл}} = f\frac{V - v}{V} = f\left(1 - \frac{v}{V}\right);$$

источник с частотой f' движется; наблюдатель регистрирует частоту f:

$$f_{\text{набл}} = f' \frac{V}{V + v} = f' \frac{1}{1 + v/V}.$$

Последнее выражение можно видоизменить, воспользовавшись биноминальным разложением $(1 + x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$, справедливым при $x < 1$. Если отношение v/V мало по сравнению с 1, то нужны только первые два или три члена этого разложения:

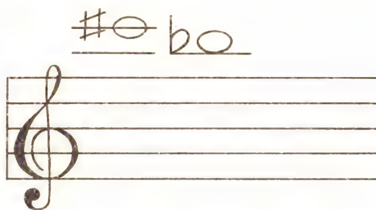
$$f = f'(1 - v/V + v^2/V^2 - \ldots).$$

Теперь можем увидеть, в какой мере существует симметрия между движущимся источником и движущимся наблюдателем. Когда $v/V \ll 1$, изменения частоты в случаях движения источника и движения приемника почти не отличаются.

В качестве знакомого примера доплеровского сдвига мы приводили изменение высоты тона гудка, когда поезд проносится мимо. Воспользуемся нашими уравнениями, чтобы рассчитать, какой сдвиг частоты может при этом наблюдаться. Если поезд проходит 60 миль в час, его скорость равна 27 м/с. Примем, что скорость звука в воздухе равна 340 м/с и выясним, что происходит, если свисток поезда имеет основную частоту 1000 Гц. Поскольку $v/V = 27/340 \ll 1$, можем использовать любую из формул. Возьмем, однако, формулу для источника, движущегося с частотой $f' = 1000$ Гц:

$$f = 1000 \frac{1}{1 \pm 27/340}.$$

Мы написали плюс-минус в знаменателе, чтобы охватить случаи, когда поезд приближается к нам (минус) и удаляется от нас (плюс). Поскольку $27/340 = 8\%$, частота, воспринимаемая нами при приближении поезда, равна $f = 1000$ Гц $\cdot$ 1,08 = 1080 Гц. Если мы стоим прямо у переезда, рев свистка становится громче, когда поезд приближается к нам, но высота тона свистка не изменяется сколько-нибудь заметно. Однако как только поезд пройдет мимо, свисток уже будет удаляться от нас и его частота падает до 920 Гц. По музыкальной терминологии основная частота 1000 Гц чуть выше, чем верхнее *B* (*си-бемоль*) (оно на октаву выше, чем



среднее *B* у рояля). Свисток приближающегося поезда издает звук верхнего *C*, а удаляющегося – звук верхнего *B*. Этот внезапный сдвиг высоты тона происходит очень эффектно и легко различим на слух.

В нашем выводе доплеровского сдвига решающим образом использовался тот факт, что распространение волн происходит в среде, которую можно рассматривать как абсолютную систему отсчета. Еще более критичным для приведенного вывода было то, что скорость волн, измеряемая движущимся сквозь среду наблюдателем, будет больше или меньше в зависимости от того, движется ли он в попутном с волнами направлении или же им навстречу: $V' = V \pm v$. Как мы видели в главе 11, это преобразование Галилея нельзя использовать для световых сигналов.

Электромагнитные волны могут распространяться в отсутствие всякой среды, которая для всех других видов движения могла служить в качестве абсолютной системы отсчета. Скорость света, измеряемая находящимся в любой системе отсчета наблюдателем, независимо от относительной скорости системы отсчета и источника, всегда равна $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Если в нашем предыдущем анализе применить правильные преобразования Лоренца, мы получим только одну формулу для доплеровского сдвига. Имеет значение только *относительная* скорость источника и наблюдателя: не существует двух частных случаев в зависимости от того, который из них движется. Для электромагнитного излучения доплеровский сдвиг равен

$$f_{\text{набл}} = f_{\text{ист}}[1 \pm v/c + (1/2)(v/c)^2 \pm \ldots].$$

Вопрос 16-5

Насколько велико должно быть отношение v/V или v/c, чтобы вызвать разность частот в 1% в соответствии с каждой из трех приведенных формул? Какой скорости это соответствует в случае звука и в случае света?

Резюме к доплеровским сдвигам

Источник неподвижен в среде, где волны распространяются со скоростью V:

а) наблюдатель удаляется от источника со скоростью v –

$$f'_{\text{набл}} = f_{\text{ист}} \frac{V - v}{V} = f_{\text{ист}} \left(1 - \frac{v}{V}\right);$$

б) наблюдатель приближается к источнику со скоростью v –

$$f'_{\text{набл}} = f_{\text{ист}} \frac{V + v}{V} = f_{\text{ист}} \left(1 + \frac{v}{V}\right).$$

Наблюдатель неподвижен в среде:

а) источник удаляется от наблюдателя –

$$f_{\text{набл}} = f'_{\text{ист}} \frac{V}{V + v} = f'_{\text{ист}} \frac{1}{1 + v/V} \approx$$
$$\approx f'_{\text{ист}}[1 - v/V + (v/V)^2 - \ldots];$$

б) источник приближается к наблюдателю –

$$f_{\text{набл}} = f'_{\text{ист}} \frac{V}{V - v} = f'_{\text{ист}} \frac{1}{1 - v/V} =$$
$$= f'_{\text{ист}}[1 + v/V + (v/V)^2 + \ldots].$$

Для электромагнитных волн в вакууме скорость света равна c во всех системах отсчета. При движении с относительной скоростью v источника и наблюдателя:

а) навстречу друг другу –

$$f_{\text{набл}} = f_{\text{ист}}[1 + v/c + (1/2)(v/c)^2 + \ldots];$$

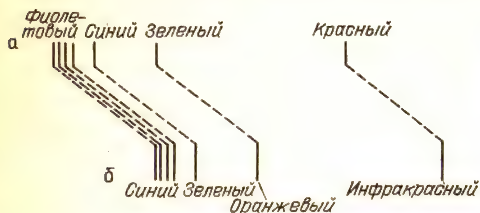
б) прочь друг от друга (красное смещение) –

$$f_{\text{набл}} = f_{\text{ист}}[1 - v/c + (1/2)(v/c)^2 + \ldots].$$

Эффект Доплера представляет собой важнейший метод определения скоростей. Действие радара, применяемого автоинспекцией, основано на этом принципе. Когда пучок микроволн облучает движущийся автомобиль и отражается назад к радару, за которым наблюдает инспектор, частота волн изменилась, так как они отразились от движущегося зеркала (от автомобиля). Прибор прокалиброван так, чтобы сдвиг частоты измерялся прямо в милях в час движущегося автомобиля. Когда движущиеся атомы или субатомные частицы испускают свет или рентгеновское излучение, на частоту излучения влияет движение источника.

По-видимому, наиболее впечатляющее применение эффект Доплера получил в астрономии. Когда свет приходит к нам от удаленной звезды или галактики, он несет очень мало прямой геометрической информации. За редкими исключениями, все звезды для земных телескопов представляют собой истинно точечные источники. Мы не в состоянии увидеть их поперечник, так же как их структуру или внутренние движения. Однако, как мы увидим в дальнейшем, свет от них можно разложить в спектр, так что свет различных частот будет попадать на разные места нашей фотопластинки. Большая часть света концентрируется на отдельных дискретных частотах, соответствующих определенным атомным процессам. Каждый атом соз-

дает свой собственный «отпечаток пальцев» из определенных частот. Особенно простой узор из таких характерных частот показан на рисунке. Если свет от звезды или галактики содержит такой же узор, мы знаем, что там именно такие атомы. Если, однако, звезда или галактика движутся от нас, каждая частота будет сдвинута вниз и мы увидим



Спектр водорода от неподвижного источника (*а*); спектр водорода от источника, удаляющегося от наблюдателя (*б*)

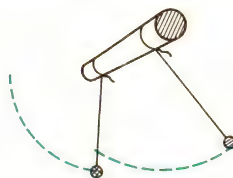
тот же узор, но в другой области спектра частот. Иногда спектральный узор в свете от звезды периодически сдвигается от более низких частот к высоким и обратно. Мы объясняем это тем, что данная звезда обращается вокруг другой, так что сначала она движется по направлению к нам и ее частоты возрастают, а затем она движется от нас и ее частоты уменьшаются.

Наиболее сенсационным было открытие на основе эффекта Доплера того, что все далекие галактики удаляются от нас. Поскольку для источника, удаляющегося от наблюдателя, спектральные линии сдвигаются в сторону более низких частот и поскольку для видимой области спектра это означает сдвиг в сторону красного света, этот эффект получил известность как красное смещение. Далекие галактики не только движутся прочь от нас, но и скорость их удаления пропорциональна расстоянию от них, которое было определено другими методами. Были обнаружены системы в дальних пределах Вселенной, для которых доплеровское смещение указывает, что они удаляются от нас со скоростью, достигающей 0,6*c*. Было предпринято немало попыток интерпретировать красное смещение на основе какого-либо другого явления, но до сих пор доплеровский сдвиг представляется единственным приемлемым объяснением.

ФАЗОВЫЕ ЭФФЕКТЫ И КОГЕРЕНТНЫЕ ВОЛНЫ

При описании синусоидальных волн мы предполагали, что есть только одна волна без начала или конца. Эта волна генерируется непрерывно с постоянной амплитудой и всегда движется в одном направлении. Теперь мы должны приступить к рассмотрению ситуаций, когда волновое движение начинается и прекращается и когда волны изменяют направление и отскакивают назад, налагаясь на самих себя.

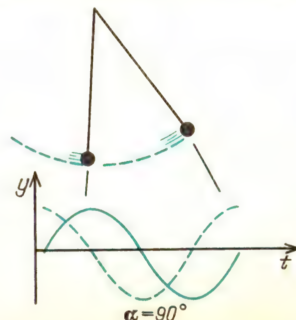
Даже тогда, когда два колебания имеют одинаковую частоту и одинаковую амплитуду, они могут различаться *по фазе*. Пример различия фаз показан на рисунке. Когда грузик одного из



маятников достигает наибольшего отклонения, другой проходит через положение равновесия. Они сдвинуты по фазе на 90° или на $\pi/2$ радиан. Одно движение можно описать как $y = A\sin\omega t$, а другое как $y = A\cos\omega t$. Иначе можно описать оба движения с помощью функции синуса, но включить фазовый угол:

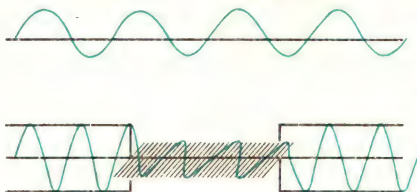
$$y_1 = A\sin\omega t,$$
$$y_2 = A\sin(\omega t + \alpha).$$

В данном случае $\alpha = 90°$. Если есть только один осциллятор, значение фазового угла говорит лишь о том, когда мы запустили часы для отсчета времени. Однако в случае двух осцилляторов



фазовый угол характеризует определенное соотношение между двумя движениями.

Безусловно, есть физическое различие между тем, когда мы непрерывно посылаем волны по веревке со смещениями всегда вдоль одной и той же вертикали, и другим способом возмущения



веревки, когда мы начинаем и прекращаем посылать синусоидальные волны в произвольные моменты времени со смещениями иногда по вертикали, иногда по горизонтали, а иногда в промежуточном направлении. Второй способ аналогичен волновому движению в случае света от обычной лампы накаливания. Продолжительность непрерывных синусоидальных волн, приходящих в некоторую точку от удаленной лампы, не превышает 10^{-8} с. Каждый раз, когда начинается новый цуг световых волн, перпендикулярные смещения в нем происходят в новом направлении. (В случае света этому перпендикулярному смещению соответствует направление осциллирующего электрического поля.) Такой тип волнового движения, когда относительная фаза (по отношению к внешним часам или другой волне) изменяется от одного момента к другому, называется некогерентным.

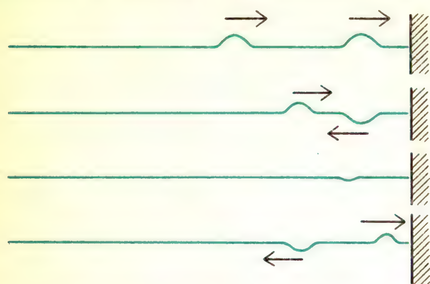
Будем ли мы считать волны когерентными или некогерентными, до некоторой степени зависит от продолжительности интервала времени, в течение которого мы наблюдаем эти волны. Промышленный 60-периодный переменный ток, вырабатываемый одной электростанцией, не обязательно будет в фазе с 60-периодным током электростанции в другом округе (если только они не включены в единую систему). Однако такие волны частично когерентны друг с другом, так как какая бы разность фаз ни была между ними, она остается примерно постоянной за времена наблюдения порядка многих минут. Но за времена порядка часов или дней их фазы окажутся сдвинутыми. Если бы вы измерили разность фаз между световыми волнами, приходящими от двух ламп накаливания, она осталась бы постоянной и волны были бы когерентны в течение промежутков времени порядка 10^{-8} с или около этого. Однако за периоды наблюдения, более соответствующие длительности формирования зрительного ощущения человека, два обычных источника света некогерентны. Звуковые волны, приходящие от двух громкоговорителей, питаемых одним и тем же осциллирующим электрическим сигналом, когерентны между собой. Разность фаз двух звуковых волн в одном месте комнаты может отличаться от ее значения в другом месте, как мы вскоре увидим. Однако в любой заданной точке эта разность фаз остается неизменной.

До последних десятилетий не было возможности получать когерентный инфракрасный и видимый свет большой интенсивности. Как мы узнаем в главе 22, радиоволны и даже микроволны вплоть до длины волны 1 мм можно генерировать когерентным образом с помощью таких устройств, как радиолампы, где мы можем действительно представить себе, как электроны с высокой частотой осциллируют взад и вперед. С изобретением лазера (это название составлено из первых букв фразы Light Amplification by the Stimulated Emission of Radiation – усиление света с помощью вынужденного испускания излучения) стало возможным генерировать интенсивные пучки когерентных инфракрасных и видимых световых волн. Когда свет мечется взад и вперед между зеркалами, проходя через трубку, содержащую возбужденные атомы, волновые цуги света действуют на возбужденные атомы подобно спусковым крючкам, заставляя их испускать новые цуги волн в фазе с первоначальными.

ЛИНЕЙНАЯ СУПЕРПОЗИЦИЯ ВОЛН

В упругой среде множество волн может распространяться одновременно. Вообще говоря, эти волны проходят друг сквозь друга или идут вместе в од-

ну сторону, совсем не мешая друг другу. Вы могли заметить пример такого поведения, когда посылали волновые импульсы по натянутой веревке. Если послать два импульса один за другим, первый отразится от дальнего конца



и затем пройдет прямо сквозь набегающий второй импульс, не изменив своей скорости или формы. Вы можете также наблюдать этот эффект, если растянете вместе с коллегой веревку между собой и каждый из вас будет посылать импульсы к другому.

В точках, где волновые импульсы проходят друг сквозь друга, смещение среды представляет собой просто сумму двух отдельных возмущений. Если исходные смещения имели одинаковые направления, они интерферируют *конструктивно*. Если смещения имели противоположные направления, они могут интерферировать *деструктивно* в моменты, когда волны проходят друг сквозь друга. Однако в действительности они не разрушают друг друга, за исключением тех моментов, когда находятся в одной точке.

Суперпозиция волн в среде остается линейной до тех пор, пока ее возмущение подчиняется закону Гука. Пока восстанавливающая сила пропорциональна смещению, смещения можно складывать алгебраически, потому что восстанавливающие силы складываются алгебраически. Если же результирующая амплитуда окажется слишком большой, хотя бы потому, что пружина была растянута очень сильно, то суперпозиция волн не будет линейной. Часто при таких обстоятельствах энергия волн превращается в другие формы, а иногда генерируются новые частоты. Фактически, когда волна сама по себе имеет достаточную амплитуду, так что среда не подчиняется закону Гука, форма волны будет искажаться. Как мы увидим, такое явление можно трактовать как возникновение гармоник на кратных частотах. Интенсивный лазерный луч при

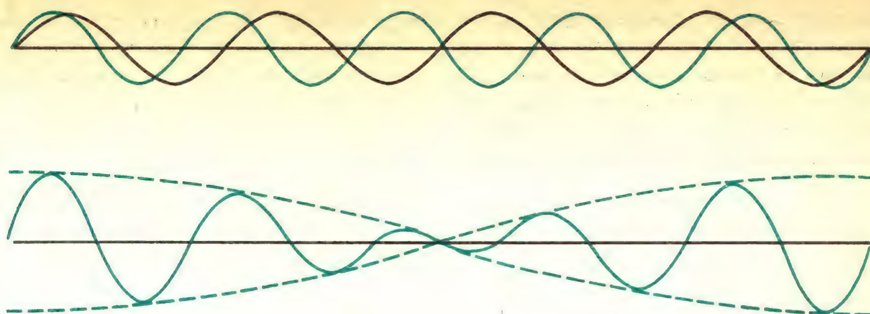
Нелинейный усилитель (такой, как у акустической системы при слишком больших усилениях) вносит искажения в чисто синусоидальную волну

прохождении через определенные кристаллы может выйти наружу, имея часть своей энергии на частоте, вдвое превышающей первоначальную.

Благодаря тому, что в большинстве случаев волновое движение характеризуется линейной суперпозицией, мы можем описывать интерференцию двух волн, графически складывая вызываемые ими смещения или используя тригонометрические правила сложения двух синусоидальных функций. В оставшейся части этой главы мы рассмотрим многочисленные примеры применения каждого из этих методов.

БИЕНИЯ ВОЛН

Простейший случай интерференции двух волн имеет место, когда волны равных амплитуд распространяются в одном направлении с одинаковой скоростью, но имеют слегка различные частоты. В «Знакомстве с явлениями» вы воспроизводили такую ситуацию с двумя музыкальными тонами, имевшими почти одинаковую высоту. Этот случай показан графически на приводимом рисунке. В верхней его части изображены две отдельные синусоидальные волны, движущиеся вдоль одной линии. В нижней части рисунка эти волны наложены друг на друга сложением смещений, создаваемых двумя волнами в каждой точке. В тех местах, где оба сигнала имеют приблизительно



Сложение сигналов с частотами 8 и 10 Гц

одинаковые фазы, результирующая амплитуда оказывается большой. Там, где отдельные сигналы сдвинуты по фазе приблизительно на 180°, в результате интерференции возникает сигнал с очень маленькой амплитудой. Первое, на что следует обратить внимание при изучении результирующего графика (и что вовсе не очевидно) – это то, что сумма волн выглядит как синусоидальная волна с изменяющейся амплитудой. Второе – это то, что изменение амплитуды само происходит по синусоидальному закону.

Предположим, что частоты двух сигналов равны 8 и 10 Гц. Если сначала они находятся в фазе, они снова будут в фазе спустя – $^1/_2$ секунды. За это время в одном из них совершится пять полных колебаний, а в другом – четыре. К моменту времени $^1/_4$ секунды сигнал с частотой 10 Гц совершит $2^1/_2$ колебания, а сигнал 8 Гц совершит 2 колебания. В этот момент они сдвинуты по фазе на 180°, поскольку сигнал с частотой 10 Гц совершил дополнительно $^1/_2$ колебания. В это время они интерферируют деструктивно и амплитуда результирующего сигнала минимальна. В течение 1 секунды результирующая амплитуда проходит через два минимума и два максимума. Частота этих «биений» составляет 2 Гц, что равно разности частот двух отдельных сигналов.

Дополнительный материал

В общем случае можно описать такую ситуацию математически, используя одно из тригонометрических тождеств. Смещения, вызываемые в некоторой точке каждым сигналом по отдельности, даются выражениями

$$y_1 = A\sin(2\pi f_1 t),$$
$$y_2 = A\sin(2\pi f_2 t).$$

Если суперпозиция линейна, результирующее смещение равно

$$y = y_1 + y_2 = A\left[\sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t)\right].$$

Нужное нам тригонометрическое тождество имеет вид

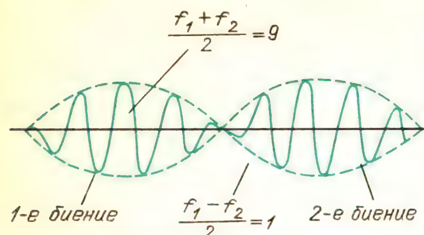
$$\sin\varphi + \sin\theta = 2\sin\frac{\varphi+\theta}{2}\cos\frac{\varphi-\theta}{2}.$$

С его помощью выразим результирующее смещение через частоты f_1 и f_2:

$$y = \left[2A\cos\left(2\pi\frac{f_1 - f_2}{2}t\right)\right] \times \sin\left(2\pi\frac{f_1 + f_2}{2}t\right).$$

Здесь имеем математическое доказательство того, что суперпозицию двух синусоидальных волн можно рассматривать как другую синусоидальную волну. Тонкая структура такого колебания описывается сомножителем с синусом. Его частота равна $(f_1 + f_2)/2$, что как раз равно среднему значению двух отдельных частот. В рассматриваемом выше примере результирующая средняя частота равна (10 Гц + 8 Гц)/2 = 9 Гц. Амплитуда этой синусоидальной волны высокой частоты дается сомножителем в квадратных скобках. Эта амплитуда медленно изменяется во времени с частотой $(f_1 - f_2)/2$. В нашем примере частота этой медленно изменяющейся амплитуды равна (10 Гц – 8 Гц)/2 = 1 Гц.

На первый взгляд кажется, что этот алгебраический вывод частоты биений (частоты медленно изменяющейся амплитуды) приводит к иному результату, нежели графический вывод. Но, однако, $(f_1 - f_2)/2$ – это частота, с которой



происходит полный цикл изменения амплитуды, включающий максимальное значение $+A$ и максимальное по модулю отрицательное значение $-A$. Но каждое из них воспринимается на слух как отдельное биение, и поэтому частота биений вдвое больше частоты переменного амплитудного сомножителя. Частота биений и в самом деле равна $f_1 - f_2$.

Опытные музыканты используют явление биений для настройки инструментов. Когда два тона имеют почти одинаковую частоту, вы можете услышать определенные пульсации. Можно даже найти разность частот, подсчитывая число биений в секунду, если только это число не превосходит пяти. Настройка выполняется подгонкой частоты одного из инструментов до тех пор, пока не исчезнут биения.

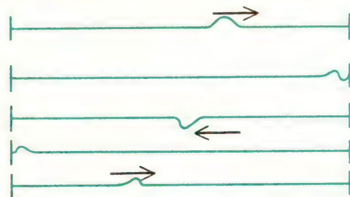
Присутствие биений в музыкальных звуках делает их более приятными для слуха. Каждая струна среднего и верхнего регистров рояля на самом деле представляет собой триплет, каждую струну которого можно настраивать отдельно, подгоняя ее натяжение. Если частоты отдельных струн слегка различны, будут возникать биения. Этот эффект не особенно заметен, если только частота биений не превышает нескольких циклов в секунду. Если же струны расстроены в большей степени, то они издают резкие нестройные звуки, по-видимому, типичные для роялей в барах.

Как мы вскоре увидим, в действительности музыкальные звуки не представляют собой чисто синусоидальных волн; они имеют гармоники с частотами, целыми кратными основной частоте. Если вы возьмете аккорд из нескольких нот, некоторые из гармоник отдельных нот могут оказаться очень близки друг к другу по частоте (возможно, вторая гармоника одной ноты и третья гармоника другой) и эти гармоники будут создавать биения. Если эти биения выражены слишком отчетливо, аккорд не будет звучать «гармонично» в классическом смысле этого слова.

РЕЗОНАНСНЫЕ ЛИНИИ

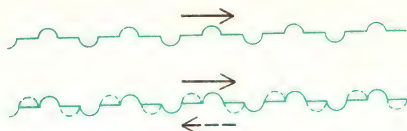
Волна, распространяющаяся вдоль некоторой прямой, может интерферировать сама с собой, если она испытывает отражение. При выполнении определенных условий интерференция может обеспечить усиление исходной волны, так что амплитуда колебаний возрастает. Это явление *резонанса* играет решающую роль в таких вещах, как музыкальные инструменты и радиоприемники. Для всех резонансных систем должен существовать некоторый способ, обеспечивающий сложение в фазе поступающих извне импульсов энергии с уже существующими в системе колебаниями. Энергия поступающего импульса должна быть больше или равна энергетическим потерям в системе за один цикл.

Рассмотрим сначала, что произойдет с одиночным волновым импульсом в натянутой линии, жестко закрепленной на обоих концах. (О том, как импульс может попасть туда, мы побеспокоимся позже.) Импульс отражается от



каждого из концов, изменяя каждый раз фазу на 180°. Полное время, в течение которого импульс совершает путешествие туда и обратно, равно $2l/v$. К концу этого промежутка времени импульс возвращается в свое исходное положение и движется в первоначальном направлении. Теперь введем целую цепоч-

ку таких волновых импульсов как по верхней, так и по нижней стороне линии (положительных и отрицательных). Все эти импульсы включаются в последовательность отражений и будут пробегать взад и вперед вдоль линии. Может показаться, что смещение любой заданной точки линии будет становиться все больше и больше в процессе наложения всех этих импульсов. Но в общем случае происходит нечто противоположное. Время, в течение которого отраженный импульс возвращается к своему начальному состоянию, обычно не связано с периодом последовательности входящих импульсов. Поэтому результат в любой точке представляет собой случайную сумму смещений (положительных и отрицательных), в среднем компенсирующих друг друга.



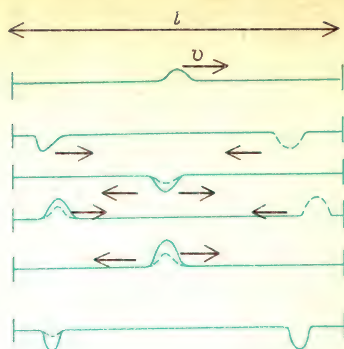
Но в этой ситуации возможно одно исключение. Если время путешествия импульсов туда и обратно таково, что некоторый импульс может присоединиться в фазе к вновь введенному импульсу, то они усилят друг друга, а не скомпенсируют. Время кругового пробега равно $2l/v$. Чтобы прибыть назад в фазе со следующим импульсом, время пробега должно быть равно периоду следования импульсов T:

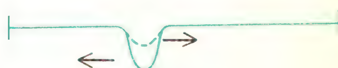
$$2l/v = T.$$

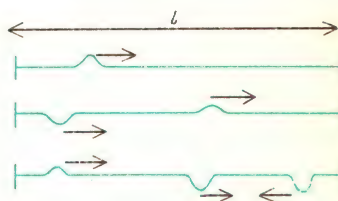
Для цепочки волн $vT = \lambda$. Поэтому

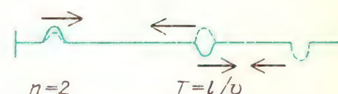
$$l = \lambda/2.$$

Процесс надстраивания таких синхронизированных волновых импульсов показан на рисунке.









Существуют и другие выделенные частоты, для которых отражения приведут к усилению. Если импульсы вводятся с удвоенной частотой, или с утроенной, или вообще частота их следования в целое число раз больше основной частоты, фаза отраженного импульса после прохода туда и обратно окажется подогнанной к фазе одного из входящих импульсов. Это условие имеет вид $2l/v = nT$, где n – целое число. Через длину волны оно может быть выражено следующим образом:

$$l = (n/2)\,\lambda.$$

Мы вывели соотношения между длиной линии и возможными длинами волн резонансной последовательности импульсов, справедливые для частного случая линии, закрепленной на концах. Эта особенность обеспечивала изменение фазы на 180° при каждом отражении. Те же самые соотношения получились бы и для линии, открытой с обоих концов. В таком случае не происходило бы изменений фазы при отражениях, но главное условие осталось бы прежним. Время пробега импульса от одного конца до другого и обратно должно быть

таким, чтобы отраженный импульс был готов совершить повторное путешествие в фазе с одним из новых входящих импульсов. И на этот раз время пробега должно быть равно периоду следования импульсов или целому числу таких периодов:

$$2l/v = nT.$$

Если один конец линии открыт, а другой закреплен, условия резонансного усиления будут иными. Поскольку отражение только на одном (закрепленном) конце вызывает изменение фазы на 180°, время пробега должно обеспечивать дополнительную разность фаз еще на 180°. Поэтому новое условие имеет вид $2l/v = T/2$, или $^3/_2T$, или $^5/_2T$ и т. д. Резонанс в линии, у которой один конец (закрепленный) вызывает изменение фазы на 180°, а второй (открытый) не вызывает, наступает при

$$l = nvT/4 = (n/4)\,\lambda, \text{ где } n = 1,\ 3,\ 5...$$

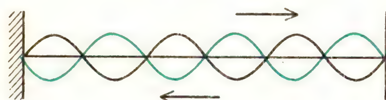
Возможно, не так просто представить себе условия, в которых последовательности волновых импульсов могут вводиться в линии, подобные только что описанным. Например, если линия в действительности представляет собой натянутую струну, как у скрипки, она, конечно, закреплена с обоих концов. Но как можно вводить в нее пульсирующую энергию, не возмущая уже существующей цепочки отраженных волновых импульсов? Или еще: как можно реализовать линию с одним или двумя свободными концами и, тем не менее, поддерживать в ней сильное натяжение и вводить в нее энергию? Но оказывается, что на самом деле эта абстрактная теоретическая линия с вводимой в нее резонансной цепочкой волновых импульсов служит хорошей моделью для многих различных систем, применяемых на практике. С деталями устройства некоторых из них мы вскоре познакомимся в связи с музыкальными инструментами. Но прежде нужно изучить частный случай резонанса, когда последовательность волновых импульсов образует синусоидальную волну.

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Мы затратили немало сил, описывая поведение бегущих волн. Может показаться, что мы пошли вспять, обращая свое внимание на волны, которые стоят неподвижно. В самом деле, как волна может не двигаться?

Явление стоячих волн во многом сходно с явлением биений. Опять имеем дело с двумя синусоидальными волнами, движущимися вдоль одной линии. Ради простоты примем, что они имеют равные амплитуды. У них должна быть также одинаковая частота. Они распространяются с одной скоростью, но в противоположных направлениях. Когда одна волна движется вправо, а ее двойник движется влево, очевидно, что в разных местах пути будет происходить конструктивная и деструктивная интерференция. Все перечисленные условия будут удовлетворены, если синусоидальные волновые возмущения отражаются без потерь амплитуды от каждого конца пути. Конечно, в реальных условиях, когда имеем дело с вибрирующей струной или столбом воздуха, при распространении возмущений и особенно при отражениях потери энергии неизбежны. Нам придется более пристально присмотреться к тому, как можно подкачивать энергию в систему, чтобы волны метались в ней взад и вперед с постоянной амплитудой.

Рассмотрим сначала, что будет происходить с синусоидальной волной в натянутой линии, неподвижно закрепленной на концах. Волна отражается от



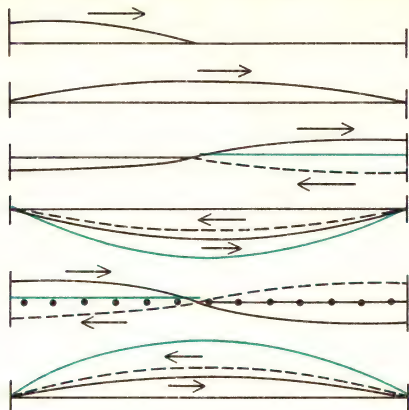
каждого конца с изменением фазы на 180°. Если время пробега волн туда и обратно таково, что волна может присоединиться в фазе к новой только что введенной волне, они будут усиливать друг друга, а не компенсировать. Время пробега импульса туда и обратно равно $2l/v$. Чтобы прибыть назад в фазе со следующей волной, время пробега должно быть равно периоду волны T:

$$2l/v = T.$$

Для цепочки волн $vT = \lambda$. Поэтому

$$l = \lambda/2.$$

Это совпадает с условиями резонанса, выведенными в предыдущем разделе. На рисунке показано, как выстраиваются такие синусоидальные синхронизированные волны.

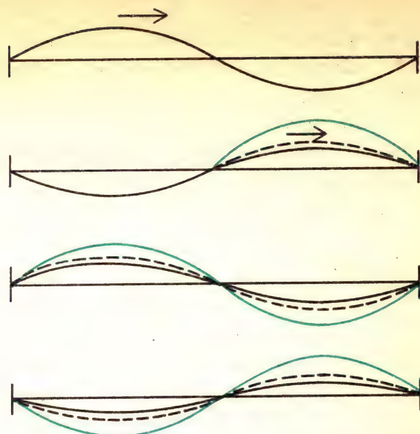


Вопрос 16-6
В каких местах движущаяся влево отраженная волна усиливает волну, движущуюся вправо, и в каких местах она приводит к взаимному уничтожению? Будут ли продолжительными эти уничтожения и усиления?

Существуют и другие выделенные частоты, для которых отражения будут приводить к усилению. Если вводимые волны имеют удвоенную частоту, или утроенную, или вообще в целое число раз превосходящую основную частоту, то фаза отраженной волны после пробега туда и обратно тоже будет согласована с фазой вводимой волны, только начинающей движение. Как мы уже видели в случае волновых импульсов, это условие имеет вид $2l/v = nT$, где n – целое число. Данное условие может быть выражено через длину волны:

$$l = (n/2)\,\lambda.$$

Вот другая последовательность рисунков, показывающая подстраивание таких синхронизированных волн при $n = 2$. Обратите внимание, что огибающая результирующих смещений представляет собой один период синусоидальной волны, укладывающийся на длине линии.



Результирующее движение линии происходит в результате наложения волны, движущейся влево, и волны, движущейся вправо (которая в данном случае возникла из-за отражения). Хотя результирующее движение возникло из бегущих волн, его конечный вид не дает никаких указаний на то, что вдоль линии происходит какой-либо перенос энергии. Напротив, оказывается, что линия просто колеблется вверх и вниз. Амплитуда колебаний изменяется вдоль линии, и на ней существуют узловые точки, в которых не оказывается вообще никакого возмущения.

Вопрос 16-7
Если линию на всем ее протяжении нужно питать энергией, чтобы поддержать в ней колебания, каким образом энергия может передаваться через узловую точку?

Дополнительный материал

Для математического исследования стоячей волны требуется лишь простая тригонометрическая подстановка.

Движущаяся вправо волна описывается выражением

$$y_1 = A \sin(2\pi/\lambda)(x - vt).$$

Отраженная волна, движущаяся влево, дается выражением

$$y_2 = A \sin(2\pi/\lambda)(x + vt).$$

Результирующее смещение равно

$$y = y_1 + y_2 =$$
$$= A\,[\sin(2\pi/\lambda)(x - vt) + \sin(2\pi/\lambda)(x + vt)].$$

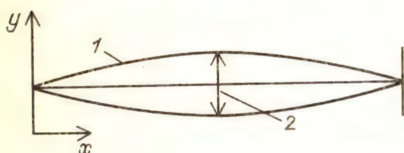
Нужное нам тригонометрическое тождество имеет вид

$$\sin\theta + \sin\varphi = 2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}.$$

Поэтому

$$y = [2A\sin(2\pi/\lambda)\,x]\cos(2\pi/\lambda)\,vt =$$
$$= [2A\sin(2\pi x/\lambda)]\cos 2\pi ft.$$

Любая точка линии совершает колебания вверх и вниз с частотой f и амплитудой,

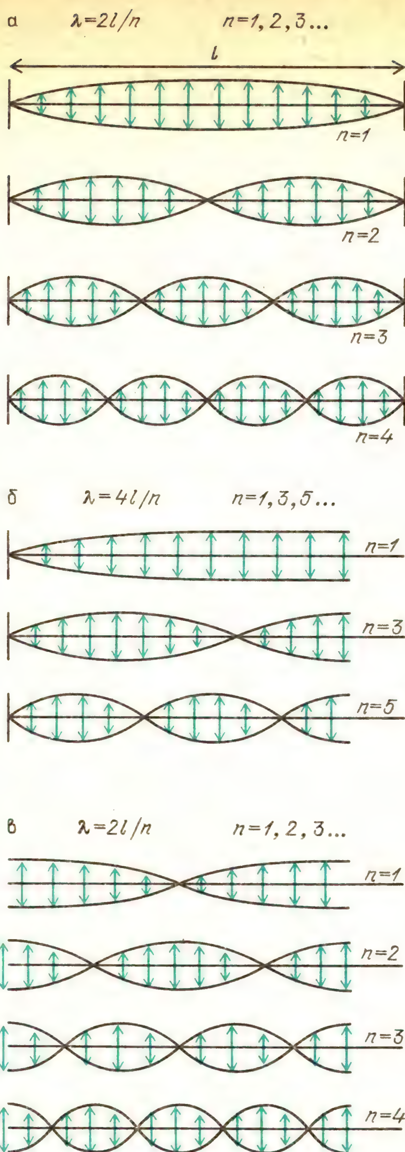


Огибающая амплитуд *1* дается выражением $2A\sin(2\pi x/\lambda)$; колебания *2* некоторой точки со временем происходят по закону $\cos 2\pi ft$

которая определяется выражением в квадратных скобках. В любой момент времени линия имеет синусоидальную форму.

Если условия резонанса выполняются при других сочетаниях l и λ, соответствующих различным целым n, результирующие стоячие волны будут по-прежнему синусоидальными, но с большим числом узлов. Здесь показаны примеры для линии, закрепленной и открытой на двух концах – рис. *а*, *в*, и для линии, открытой на одном конце и закрепленной на другом – рис. *б*.

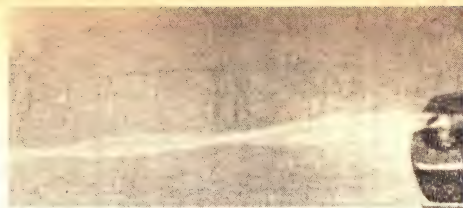
Стоячие волны могут быть созданы в натянутых струнах и в трубах, заполненных воздухом. Для этого должен быть осуществлен какой-либо способ подведения энергии на одной из резонансных частот. В «Знакомстве с явлениями» в главе 15 вам удавалось добиться проявления такой ловкости со струнами рояля. Громким пением какой-либо ноты над открытыми струнами вы возбуждали стоячую волну основной моды в определенной струне,



Стоячие волны для линии, закрепленной на концах (*а*), закрепленной на одном конце и открытой на другом (*б*), для линии, открытой на обоих концах (*в*)

частота которой соответствовала взятой вами высоте тона. Затем вы могли слышать, как струна своим звучанием отозвалась на ваш голос, пока в ней замирала эта стоячая волна.

На приводимой фотографии показан другой способ подведения энергии к натянутой струне. В данном случае необходимую для компенсации потерь на



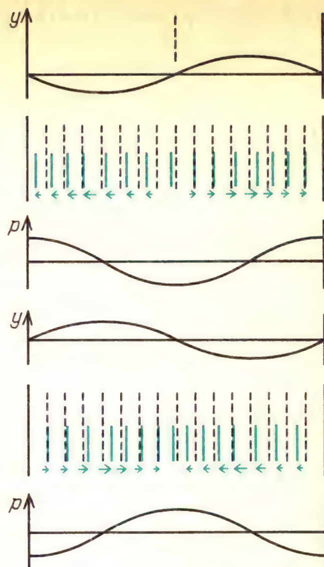
трение энергию поставляет механический вибратор. Он также действует, как открытый конец струны. Чтобы возникла стоячая волна, длина струны должна быть равна нечетному числу четвертей длины волны. Для получения стоячих волн с помощью такого устройства можно добиться нужного значения длины волны, подгоняя либо частоту вибратора, либо натяжение струны.

Вопрос 16-8

Какое отношение к условиям получения стоячей волны может иметь натяжение струны?

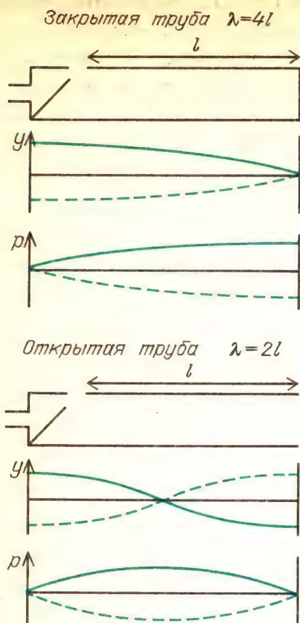
Условия для стоячих волн сжатия в трубе будут точно такими же, как и выведенные нами условия для поперечных волн в линии. При их описании нужно проявлять осторожность, чтобы различать продольные смещения частиц среды (например, молекул газа) и изменения давления. В общем случае эти две переменные сдвинуты по фазе на 90°.

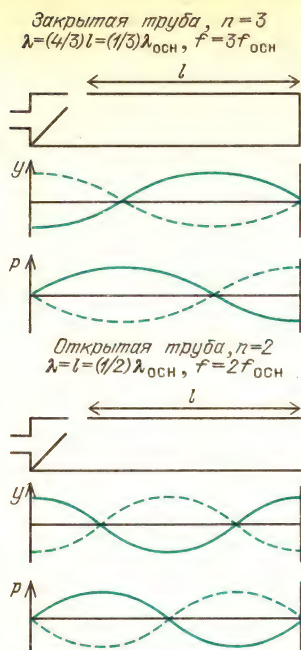
Рассмотрим стоячую волну в столбе воздуха. В окрестности узла смещений молекулы воздуха движутся в одном направлении по одну сторону от узла и в противоположном направлении по другую сторону. В некоторый момент молекулы устремляются к узлу, а спустя половину периода они разлетаются от узла. Такое волнение создает в этой точке наибольшие изменения давления, образуя пучность давлений. В окрестности пучности смещений, по обе стороны от нее, молекулы среды в любой момент все движутся в одном направлении. Поэтому в таком месте никогда не возникает разность давлений. Раз уж молекулы движутся все вместе, здесь не возникает сгущений и разрежений. У закрытого конца заполненной газом трубы, такой как органная, должен находиться узел смещений. Молекулы



просто не могут совершать колебания взад и вперед сквозь твердую стенку. Вполне понятно, что у закрытого конца находится пучность давлений. Молекулы скапливаются там, создавая повышенное давление, а затем, после того как такой импульс отразится с изменением фазы на 180°, давление в области у стенки понижается. У открытого конца трубы ситуация прямо противоположная. Молекулы могут в унисон свободно двигаться взад и вперед, но давление при этом не изменяется, поскольку молекулы здесь никогда не скапливаются.

На рисунке показаны амплитуды смещений и давления для стоячих волн основной моды в закрытой и открытой трубах. (Та сторона трубы, на которой производится возбуждение колебаний, в любом случае ведет себя как открытый конец.) Схематическое изображение способа возбуждения трубы дает разумное представление о том, как это делается в настоящем органе. Сжатый воздух, подаваемый с одного конца, врывается в трубу вблизи такого, как у свистка, отверстия в стенке трубы. Приблизительно в окрестности этого отверстия располагается пучность смещений, и поэтому этот конец трубы ведет себя так, как если бы он был «открыт». Хотя сжатый воздух поступает из камеры с постоянным давлением, он





входит в трубу турбулентным потоком, который управляется волнами давления, движущимися взад и вперед вдоль трубы. Простой результат этого сложного явления заключается в том, что достаточное количество воздуха добавляется в нужной фазе, чтобы компенсировать потери энергии бегущих волн и поддерживать незатухающую стоячую волну.

В общем случае огибающая амплитуд изменений смещения или давления не будет представлять собой показанный на рисунках отрезок простой синусоидальной волны. В большинстве случаев трубы звучат с обертонами, создаваемыми несинусоидальными бегущими волнами. Вскоре мы увидим, как возникают эти обертоны. Однако труба может звучать на любой из своих гармоник, если импульсы избыточного давления поступают в нее с нужной частотой.

На рисунке показаны распределения смещений и избыточного давления в стоячих волнах в закрытой и открытой трубах, звучащих на второй гармонике. Для открытой трубы $n = 2$, но в закрытой трубе могут существовать только нечетные гармоники. Поэтому для закрытой трубы первому над основным тоном обертону соответствует $n = 3$.

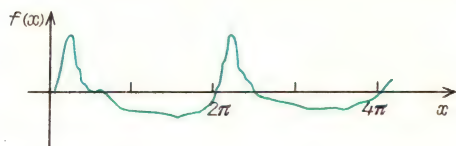
Заметьте, что труба звучит на более высоком тоне лишь тогда, когда источник возбуждения может поставлять системе энергию на соответствующей более высокой частоте. Чтобы изменить звучание трубы от чистого основного тона к чистой гармонике, требуется внести некоторые изменения в систему привода. Можно, например, создать более высокое давление или отклонить входящий воздух на иной угол, чтобы изменить таким образом рисунок турбулентности и вместе с этим частоту, на которой в трубу допускается избыточное давление. В органных трубах так обычно не делают, но в управляемых губами духовых инструментах это стандартный способ извлечения нот в других диапазонах частот.

ФУРЬЕ-АНАЛИЗ СЛОЖНЫХ ВОЛН

Когда выводят из равновесия тело, подвешенное на простой пружине, оно совершает колебания по простому гармоническому закону. Смещение, скорость и ускорение представляют собой

синусоидальные функции времени. Системы более сложные, чем простая пружина, обычно реагируют на возмущения разными способами, в большинстве случаев сложными. Хотя камертон создает в воздухе синусоидальные волны давления, металлическая тарелка откликнется на произведенный по ней удар множеством резких нестройных звуков. Каждый музыкальный инструмент создает периодические волновые импульсы характерной формы, по крайней мере в начальной стадии звучания соответствующей ноты. Некоторые из них были показаны на с. 15. Эти ноты были восприняты микрофоном и превращены в электрические сигналы, которые отображены на экране осциллографа.

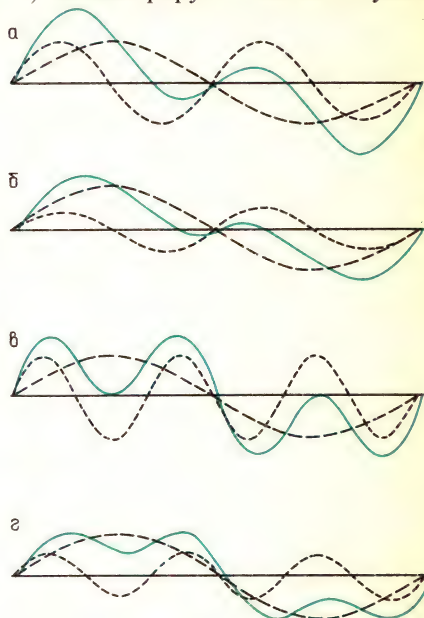
Еще в 1822 году Жан Фурье (1768–1830) в опубликованном трактате показал, что повторяющиеся математические функции можно представить в виде алгебраической суммы ряда синусоидальных и косинусоидальных волн, каждый член которого имеет свою частоту. Если моделируемая функция



Функция $f(x)$ – непрерывная, периодическая с периодом 2π: $f(x) = (1/2)\,a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots$, где $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ – постоянные, зависящие от формы $f(x)$

имеет частоту f_0, то первый синусоидальный член имеет частоту f_0, второй имеет частоту $2f_0$, и т. д. Член с частотой f_0 называется основной или первой гармоникой, остальные члены называются высшими гармониками. Амплитуда каждого члена выбирается так, чтобы воспроизводилась требуемая форма при сложении всех членов.

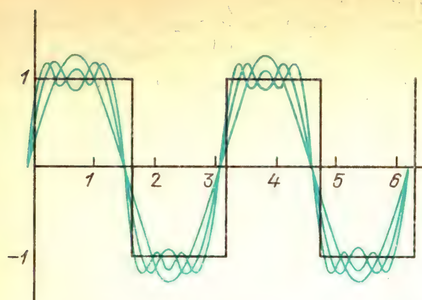
Совсем не очевидно, что утверждение Фурье справедливо, но эта книга представляется малоподходящим местом для его доказательства. Мы можем, однако, показать правдоподобность этой идеи, демонстрируя, что получается при сложении нескольких синусоидальных и косинусоидальных волн. На первых двух приводимых рисунках показано сложение основной и второй гармоник. На рис. *а* вторая гармоника имеет такую же амплитуду, как и основная. На рис. *б* ее амплитуда вдвое меньше. Еще одна пара рисунков (*в*, *г*) иллюстрирует соответствующее



Сложение основной и второй гармоник с одинаковыми амплитудами (*а*), основной и второй гармоники вдвое меньшей амплитуды (*б*), основной и третьей гармоник с одинаковыми амплитудами (*в*), основной и третьей гармоники вдвое меньшей амплитуды (*г*)

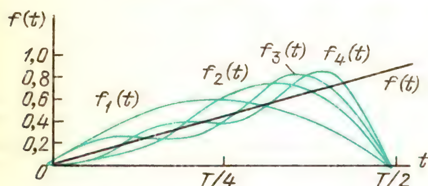
сложение основной и третьей гармоник ($f = 3f_0$). Обратите внимание насколько форма результирующих волн отличается от первого случая.

Если нужно воспроизвести волну сложной формы, для получения хорошего приближения потребуется много синусоидальных слагаемых. Это значит, что требуется много гармоник, простирающихся в области высоких частот. Особенно трудно воспроизвести острые углы контура исходной волны. На рисунке показано последовательное сложение первых трех членов ряда Фурье для прямоугольного импульса. Отметьте, какой эффект достигается на каждом этапе аппроксимации. Для хорошего воспроизведения углов прямоугольного



Последовательное сложение первых трех членов ряда Фурье для прямоугольного импульса: $f(x) = (4/\pi)\sin x + (4/3\pi)\sin 3x + (4/5\pi) \times \times \sin 5x + \ldots$

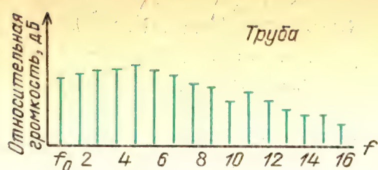
импульса потребовалось бы гораздо больше членов. Подобное суммирование для пилообразного импульса показано на следующем рисунке. И на этот раз аппроксимация оказывается неплохой для постепенно поднимающейся части зубца пилы, но потребовалось бы

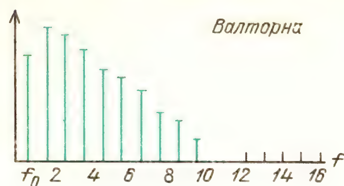


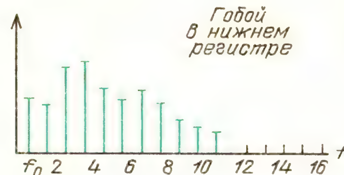
Последовательное сложение первых четырех членов ряда Фурье для пилообразного импульса: $f(x) = (2\pi)\sin(2\pi t/T) - (2/2\pi) \times \times \sin(2\pi \cdot 2t/T) + (2/3\pi)\sin(2\pi \cdot 3t/T) - (2/4\pi) \times \times \sin(2\pi \cdot 4t/T) + \ldots$

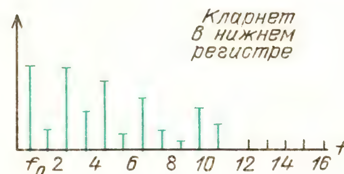
гораздо больше членов для воспроизведения острой вершины и резкого спада на оригинале.

Когда труба и гобой оба звучат на среднем *A*, каждый из них создает 440 повторяющихся импульсов в секунду. Однако импульсы гобоя выглядят иначе, чем импульсы трубы. Формы импульсов для ряда различных инструментов были приведены на с. 15. Каждый характерный вид импульса можно представить в виде суммы основной и большого числа высших гармоник. Отличие формы одного импульса от другого определяется распределением амплитуд и фаз этих гармоник. У каждого инструмента есть свой собственный рецепт на эти амплитуды. Графическое представление таких рецептов для нескольких









Относительная громкость основной и высших гармоник в начальной стадии звучания музыкальных инструментов

инструментов показано на приводимых выше рисунках.

При обсуждении диапазона слышимых звуков в главе 15 было указано, что большинство инструментов и человеческий голос имеют основную частоту ниже 2000 Гц. Тем не менее высококачественные системы звукозаписи должны быть в состоянии воспроизводить частоты вплоть до 20 000 Гц. Теперь мы можем понять, зачем нужен столь протяженный диапазон частот. Есть хорошее подручное правило, с помощью которого можно определить условия воспроизведения музыкальных нот: требуются все гармоники вплоть до десятой. Нота частотой 2000 Гц в звучании голоса или музыкального инструмента не является синусоидальной волной с частотой 2000 Гц. Для верного воспроизведения особенностей ее формы могут понадобиться гармоники с часто-

тами вплоть до 20000 Гц. Это подручное правило зависит, конечно, от природы музыкального инструмента. Любой звук, извлекаемый щипком или ударом, имеет склонность содержать повторяющиеся импульсы с острыми краями, включающие гармоники высоких частот. Верное воспроизведение звуков колокольчика или музыкального треугольника, или даже рояля служит хорошей проверкой качества звукозаписывающей системы.

ИЗМЕНЕНИЕ ФОРМЫ ВОЛНОВОГО ИМПУЛЬСА ПРИ ЕГО РАСПРОСТРАНЕНИИ

Как мы видели, повторяющиеся импульсы неправильной формы, движущиеся в некотором направлении, можно рассматривать как результат наложения большого числа синусоидальных волн с кратными частотами. Если в среде нет поглощения или это поглощение не зависит от частоты и если скорость волн не зависит от частоты, то импульсы будут сохранять свою первоначальную неправильную форму. Именно таковы обычные условия распространения звуковых волн в воздухе или электромагнитного излучения в вакууме. Однако во многих других случаях скорость волнового движения, как и поглощение энергии волн, или излучения зависят от частоты.

Зависимость скорости от частоты называется *дисперсией*. Причину столь странного названия можно понять, наблюдая гребень волны на поверхности воды. Первоначально острый гребень по мере распространения вскоре становится более округлым и постепенно расплывается. Причина этого станет ясна, если вы заметите рябь крошечных волн малой длины, выползающих вперед из-под основного волнового импульса – высокочастотные компоненты движутся быстрее и поэтому выползают вперед. Без этих компонент главный импульс становится более округлым, постепенно принимая форму основной синусоидальной гармоники.

Скорости волн, о которых до сих пор шла речь, – это были *фазовые* скорости. Например, в уравнение $f\lambda = v$ входит фазовая скорость. *Групповая* скорость – это скорость центра волнового импульса. Она может быть значительно меньше любой из фазовых скоростей. Сам волновой импульс образуется в результате совместного действия многих синусоидальных составляющих. Отдельные синусоидальные волны вливаются в этот импульс и снова выскальзывают из него, интерферируя конструктивно в определенной области, чтобы образовать импульс. Распространяющаяся энергия сосредоточена в импульсе и взаимно уничтожается во всех других местах в результате деструктивной интерференции этих отдельных волн. В зависимости от того, как фазовая скорость изменяется с частотой, групповая скорость может быть как больше, так и меньше фазовой. Для определенных частот спектра электромагнитного излучения, обычно в рентгеновской области, фазовая скорость в большинстве веществ в действительности больше скорости света в вакууме c. Однако групповая скорость при этом немного меньше c. Оказывается, что и в этом случае никакая энергия (или информация) не может передаваться быстрее, чем со скоростью c.

Вопрос 16-9
Если синусоидальный сигнал определенной частоты имеет в веществе скорость, большую чем c, почему нельзя использовать этот сигнал для передачи информации или энергии?

На форму волновых импульсов влияет также и то, что происходит с ними при передаче через среду, и то, что происходит с ними на границах. Нередко поглощение вдоль пути зависит от частоты. Подобным же образом на границах отношение отраженной интенсивности к переданной дальше может зависеть от частоты (напомним, что наши простые формулы для импеданса были получены при некоторых предположениях о волнах в среде). Во многих музыкальных инструментах высокочастотные составляющие волновых импульсов поглощаются уже внутри или излучаются инструментом с повышенной эффективностью. И в том, и в дру-

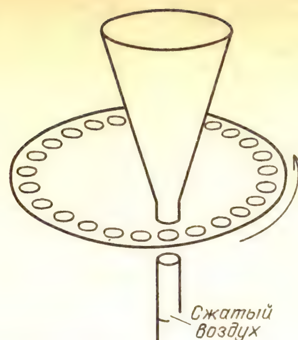
гом случае волновое движение утрачивает свои высокочастотные гармоники, сохраняя лишь основную частоту и несколько слабых гармоник. Поскольку характерное звучание инструмента обеспечивается определенным составом гармоник, даже опытные музыканты с трудом узнают инструмент, если начальные стадии звучания каждой ноты удаляются электронной техникой при воспроизведении. Длительные непрерывные тона трубы, тромбона и даже гобоя звучат очень похоже. Звуки, извлекаемые щипком или ударом по струнам, довольно быстро превращаются в почти чисто синусоидальные тона.

Дополнительный материал

Извлечение звука в музыкальных инструментах

Любой музыкальный инструмент состоит из какого-либо источника колебаний и некоторого устройства для передачи энергии колебаний в воздух с приемлемой эффективностью. Исходное колебание редко бывает синусоидальным; обычно оно состоит из последовательности одинаковых импульсов, формы которых могут быть весьма разнообразными. Осциллирующая система представляет собой часть резонаторной системы или связана с ней. Резонаторная система характеризуется собственным набором предпочтительных частот колебаний. Она реагирует на основной тон и обертоны возбуждающих импульсов и излучает их в воздух с различной эффективностью в зависимости от их частоты и от формы резонатора. Задающим вибратором может быть натянутая струна, или вибрирующие губы, или голосовые связки, или турбулентный воздух в суженном канале. Резонаторной системой может служить деревянный ящик с тщательно подобранной формой, который может вибрировать, отзываясь на целый ряд частот, или это может быть заключенный в трубу столб воздуха, реагирующий только на определенные частоты.

Связи между вибратором и резонаторной системой, к которой он подключен, могут быть весьма разнообразными. Например, в механической сирене сжатый воздух продувается сквозь отверстия в быстро вращающемся диске. Частота точно определяется числом отверстий, пересекающих струю воз-



Механическая сирена

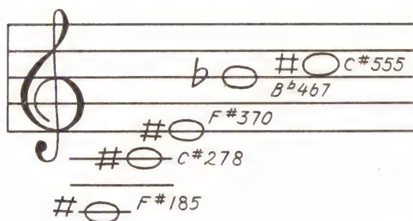
духа за каждую секунду. Даже тогда, когда воздушная струя проходит через рупор для концентрации звука в одном направлении, отражения волн давления от конца рупора не оказывают никакого влияния на частоту источника.

Частоты струнных инструментов также не зависят от резонатора. Основная частота и форма отдельных импульсов в струне зависят только от массы, натяжения, длины струны и в первую очередь от того, как ее возбуждают. Однако музыка, которую мы воспринимаем от струнного инструмента, зависит от реакции резонаторной системы на различные гармоники, присутствующие в форме импульса, и от эффективности, с которой резонатор может посылать эти частоты в окружающий воздух.

Другой предельный случай управления частотой реализуется в органной трубе. Здесь колебания в источнике звука возбуждаются самоуправляемым впуском импульсов сжатого воздуха в один из концов трубы, содержащей бегущие импульсы волн сжатия. Отраженные импульсы сами включают механизм, обеспечивающий их восполнение; таким образом частота колебаний определяется формой резонаторной системы. Однако даже в этом случае источник имеет некоторые привилегии. Если подобрать должным образом давление воздуха или направление его впуска в трубу, турбулентный воздух у отверстия сможет впустить в трубу добавочный импульс сжатия, когда первый находится еще только на другом конце трубы. Тогда в трубе будут существовать одновременно два импульса, проходящих друг сквозь друга, и каждый из них сам включает себе восполнение, когда он возвращается к отверстию. Труба будет звучать на частоте своей первой гармоники, что в случае трубы

с открытым концом дает ноту на октаву выше.

Органные трубы конструируются для игры только на высоте тона, соответствующей основной частоте. Следовательно, в трубе в каждый момент находится только один импульс избыточного давления. Однако у многих других духовых инструментов возбуждающим вибратором можно управлять так, чтобы посылать в трубу один, или два, или три, или много импульсов, прежде чем возвратится первый после отражения от другого конца. Высота звука инструмента определяется тем, сколько раз в секунду достигают конца трубы содержащиеся в ней импульсы. Так, у флейты при данном наборе отверстий, которым определяется эффективная длина трубы, музыкант может изменять положение губ для того, чтобы посылать в трубу от одного до семи импульсов одновременно. Таким способом можно получить семь тонов различной высоты (хотя и не обязательно семь различных октав). Подобным же образом горнист может извлекать звук пяти (или больше) тонов различной высоты с помощью инструмента без клавиш. В случае горна и большинства других медных инструментов самый низкий *музыкальный* тон в действительности получается



Пять обычно используемых нот горна (можно играть и более высокие ноты). Обратите внимание, что их частоты приблизительно кратны 92 Гц, т. е. основной частоте f_0

на второй гармонике, когда в трубе находятся одновременно два импульса избыточного давления. (Иногда можно получить звучание и на первой основной гармонике. Такой звук напоминает рычание и называется «педальной» нотой.)

В язычковых музыкальных инструментах, таких, как кларнет или гобой, сочетание губ музыканта и язычков инструмента попросту играет роль клапана из турбулентного воздуха в органной трубе. Частота, с которой открывается язычок, чтобы впустить очередной импульс воздуха, управляется отражением предыдущего импульса по его возвращении к язычку. Музыкант выбирает различные частоты, открывая и закрывая отверстия в трубке. Эти действия изменяют эффективную длину трубки и тем самым время пробега импульса туда и обратно. Для определенного набора отверстий музыкант может увеличить высоту тона до следующей гармоники, открывая одно из отверстий, чтобы перевести трубу в моду колебаний, содержащую два импульса одновременно.

Извлечение звука человеческим голосом и медными инструментами занимает промежуточное положение между управлением частотой с помощью источника и с помощью резонатора. Голосовые связки гортани вибрируют под напором проносящегося мимо них воздуха. У мужчин мышцы этих связок обычно более массивны, чем у женщин. Следовательно, можно ожидать, что голосовые связки мужчин будут вибрировать на более низкой частоте. И в самом деле, некоторые мужчины маленького роста обладают густым басом, и в то же время крупные женщины могут иметь лирическое сопрано.

В случае медных инструментов, на которых играют прижатыми к мундштуку губами, губы должны вибрировать как раз на частоте звука, который хотят получить. Действительно, горнист может сыграть сигналы на одном мундштуке вообще без горна, и эти сигналы вполне можно узнать. С другой стороны, губы горниста не вполне свободны в выборе частоты своих колебаний. Движение губ до некоторой степени зависит от прибытия отраженных импульсов, способствующих включению нового импульса давления и тем самым поддержанию собственной частоты колебания. Чтобы убедиться в этом, попробуйте играть на трубе или горне, заполненном гелием. Высота любой ноты окажется много больше ожидаемой, но затем вернется к норме по мере вытекания гелия из инструмента. Благодаря малой атомной массе гелия скорость звука в гелии в несколько раз больше, чем в воздухе. Импульс избыточного давления может пройти до конца инструмента и обратно много быстрее, что приведет губы в колебания с более высокой частотой.

Существует стандартный лекционный опыт, наглядно демонстрирующий такой же эффект с человеческим голосом. Если лектор сделает один глубокий вдох гелия, следую-

щие несколько фраз у него прозвучат так, как если бы их говорил утенок Дональд*). Если для лектора такой эффект – это всего лишь трюк, то он вырастает в серьезную проблему для водолазов, которые дышат смесью гелия с кислородом вместо смеси азота с кислородом. Слушающим их речь на поверхности становится нелегко понимать или расшифровывать их слова. Сдвиг частоты принимает довольно запутанную форму, поскольку механизм извлечения звука здесь более сложен, чем у духовых инструментов. Очевидно, что отражение волн не слишком сильно влияет на голосовые связки. Однако они производят большое число обертонов, резонирующих в различных полостях горла, носа и рта. Основная частота голосовых связок не изменяется при заполнении горла гелием, но резонансные частоты полостей сдвигаются вверх. Поэтому высокие обертоны усиливаются в большей степени, чем низкие. (Если вам когда-либо доведется исполнить этот трюк с гелием, делайте не более одного глубокого вдоха гелия. Гелий не ядовит, но это все же не кислород. Нужно всего около трех вдохов для заполнения легких. Исчерпав таким способом запас кислорода в легких, вы можете моментально потерять сознание.)

Любой из музыкальных инструментов, имеющих тенденцию поддерживать собственную частоту колебаний, определяет также и форму производимых в нем импульсов избыточного давления. Вместо плавно изменяющейся синусоидальной формы эти импульсы обычно бывают крутыми, содержащими много гармоник. Рецепты состава гармоник для некоторых инструментов были приведены на с. 62.

Напомним, однако, что форма импульсов, а значит, и состав гармоник, изменяется от начала к концу звучания ноты. Начало каждой ноты в зависимости от того, каким способом она берется, содержит намного больше высокочастотных гармоник с большими амплитудами.

Вопрос 16-10

Складывается впечатление, что существуют два способа получения гармоник. Если вы впускаете в трубу импульсы так, что там в каждый момент находится только один импульс, высшие гармоники появляются из-за формы импульсов избыточного давления. С другой стороны, в некоторых инструментах можно получить два или больше импульсов в трубе в каждый момент, тоже создавая этим высшие гармоники. Различаются ли эти два образа действий?

Когда струнный инструмент возбуждается щипком, излом струны носится по ней взад и вперед, постепенно уменьшаясь по амплитуде, а также постепенно утрачивая остроту своей вершины и превращаясь в нечто, напоминающее половину синусоидальной волны. Вначале форму излома представляет множество гармоник. Если струна не связана с резонаторной системой, передаваемый в воздух звук слаб и не музыкален. Высокочастотные высшие гармоники возмущают окружающий воздух более эффективно, чем основная, что делает звук тонким. Основная частота ноты определяется временем, которое требуется излому для совершения одного пробега туда и обратно.

Когда вы ведете смычком по струне скрипки, фактически вы просто особым способом дергаете ее. Канифоль на волосе смычка помогает захватить струну скрипки и оттянуть ее движущимся смычком. Когда излом на струне становится слишком острым, скрипичная струна освобождается от смычка и срывается назад. Возмущение распространяется в обе стороны и отражается от обоих концов струны. Тем временем смычок захватывает струну снова и оттягивает ее, образуя новый излом. Теперь наступает решающий момент в последовательности событий. Та часть предыдущего импульса, которая начинала движение в сторону мостика, совершив полный пробег туда и обратно, срабатывает как спусковой механизм для следующего излома, и вся последовательность событий повторяется. Поэтому основная частота определяется временем, которое требуется излому для совершения пробега вперед и назад вдоль струны. В каждый момент в струне есть только один такой бегущий излом. Однако при исключительных и неблагоприятных обстоятельствах в результате неправильного пользования смычком в струну могут оказаться введенными два излома. Тогда возникает пронзительный скрип. Особенно часто такое случается с виолончелью или другими басовыми струнными

*) Персонаж мультфильмов Уолта Диснея. *(Примеч. ред.)*

инструментами. Это одна из причин, по которым не следует разрешать маленьким детям играть на струнных инструментах на публике.

Когда струны прикреплены к резонаторному ящику, например к корпусу скрипки, имеющие форму изломов волновые импульсы приводят в движение дерево корпуса и воздух в полости инструмента. Теперь система в целом резонирует на все гармоники, которыми образован импульс в форме излома. Большая площадь поверхности инструмента способствует лучшей передаче низших гармоник, включая основную. И, как следствие, слышимый нами звук становится сочным и густым.

Обратите внимание, что теперь мы ответили на вопрос, поднятый в разделе о резонансных линиях: «Как можно подводить энергию к натянутым струнам или трубам на резонансной частоте?» В случае возбуждаемых смычком струн или органных труб *отраженный импульс сам управляет своим восполнением*, и таким образом поддерживается должная фаза возбуждающего осциллятор внешнего воздействия.

Вопрос 16-11

Если корпус скрипки способствует излучению энергии в окружающий воздух, откуда берется эта дополнительная энергия?

Итак, мы описали две, по-видимому, различные, реакции струн и труб на повторяющиеся возмущения. Во-первых, мы показали, как в результате отражений в системе могут установиться стоячие волны. Эти стоячие волны синусоидальны, имеют частоты, которые находятся в простых кратных отношениях друг с другом, а их длины волн в целое число раз меньше длины линии. Хотя стоячие волны возникают в результате интерференции двух одинаковых волн, распространяющихся в противоположных направлениях, оказывается, что сама стоячая волна не распространяется. Во-вторых, мы утверждали, что в музыкальных инструментах звук производится каким-либо волновым импульсом, который проносится вдоль инструмента, отражается от его конца и затем, возвратившись в свое первоначальное положение, управляет запуском следующего импульса. Какая же из этих точек зрения правильна? Оказывается, что обе.

Бегущий волновой импульс, будь то щипок в струне или область повышенного давления в трубе, математически можно представить суммой ряда Фурье многих синусоидальных волн. Среди этих волн есть одна на основной частоте, равной частоте, с которой бегущий импульс совершает пробег туда и обратно. Другие синусоидальные волны имеют частоты, кратные основной. Они образуют обертоны. Каждая из этих волн — гармоник имеет длину волны из набора допустимых для образования стоячих волн в данной линии или трубе.

Высота тона, воспринимаемого на слух для некоторого звука, обычно (но не всегда) соответствует основной частоте. Когда протяжный тон некоторого инструмента постепенно утрачивает обертоны, это происходит из-за поглощения или более эффективного излучения высших гармоник. Остается стоячая волна основной частоты. С точки зрения модели бегущих импульсов, у импульса избыточного давления или импульса в форме оттянутой струны острые края при этом оказались утраченными, т. е. остался синусоидальный импульс, интерферирующий со своим отражением.

Размеры и форма музыкальных инструментов очевидным образом связаны с характерными для них звуками. Вообще говоря, маленькие инструменты производят ноты сопрано, а большие инструменты — басовые ноты. Во всех случаях основная частота определяется временем, которое требуется импульсу для совершения пробега вперед и назад по инструменту. Чем длиннее инструмент, тем больше это время и поэтому ниже частота.

Для духовых инструментов существует прямая связь между длиной трубки и длиной волны извлекаемого звука. Мы уже вывели эти соотношения для органных труб. Те же формулы применимы и к большинству других инструментов. Поскольку большинство инструментов действует подобно трубам, от-

Действительная длина горна равна 176 см, $f_0 = 92$ Гц, $\lambda = 343/92 = 3{,}7$ м. (Для трубы с двумя открытыми концами $\lambda_{осн} = 2l$, $l = 1{,}85$ м.) Самая низкая нота, на которой может звучать горн, равна $f = 184$ Гц, $\lambda = 1{,}85$ м

крытым с обоих концов (возбуждающие колебания происходят на одном из них), основная длина волны приблизительно вдвое превышает длину трубы (см. с. 55). Как мы уже отмечали, этот основной тон у большинства медных инструментов немузыкален и его нелегко получить. Частота самой низкой ноты, которую можно использовать, обычно в два раза выше основной. Для возбуждения этой ноты в инструмент вводятся два импульса в течение времени одного пробега туда и обратно. Длину трубки можно изменять, нажимая пистоны и прибавляя этим дополнительные витки в случае трубы, выдвигая скользящую трубку в случае тромбона или открывая и закрывая боковые отверстия трубки (что приводит к изменению эффективной длины) в случае флейты или кларнета.

Длина волны в воздухе для основной ноты, производимой струной скрипки, не равна удвоенной длине струны.

Вопрос 16-12

Почему? Кстати, заметьте, что все четыре струны скрипки имеют одинаковую длину, и все же каждая из них производит свою, отличную от других основную ноту.

Форма и размер инструментов связаны с их рабочим диапазоном частот еще в одном отношении. Гобой не только короче, чем фагот, труба короче, чем саксофон, а у скрипки струны короче, чем у контрабаса, но инструменты сопрано также тоньше или меньше в диаметре. Эта особенность связана с условиями передачи энергии вибрирующей системы в окружающий воздух. Чем ниже частота, тем большая площадь граничащей с воздухом поверхности требуется для эффективной передачи энергии. Вспомните, как в «Знакомстве с явлениями» пульсация вибрирующей проволочной вешалки для пальто происходила с низкой частотой, но только высокочастотные гармоники этих пульсаций передавались непосредственно в воздух. Вы слышали густые тона основной частоты и низкочастотных гармоник только тогда, когда энергия подводилась прямо к вашим барабанным перепонкам.

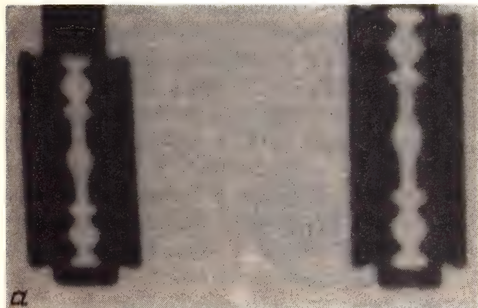
Как подручное правило можно принять, что инструмент не производит или по крайней мере не посылает в воздух ноты, для которых длина волны в воздухе много больше, чем размеры самого инструмента. В случае флейты самая низкая из воспроизводимых нот имеет длину волны, примерно вдвое превышающую длину флейты. В случае трубы длина волны самой низкой ноты примерно равна длине трубки инструмента (около 5 футов). У скрипки самая низкая воспроизводимая нота примерно в четыре раза больше длины корпуса. ⟨...⟩

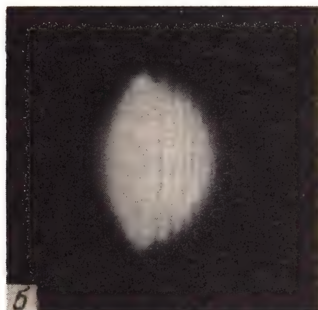
Скрипка, альт, виолончель, контрабас

Восприятие звука органами слуха

До сих пор мы описывали различные предметы, которые могут вибрировать и посылать в воздух волны избыточного давления. Что происходит, когда эти волны достигают наших ушей? Мы говорим, что слышим звук или музыку, но каким образом колебания давления воздуха превращаются в музыку в нашем сознании? Первые стадии такого процесса имеют механическую природу, и мы их достаточно хорошо понимаем. Механическая конструкция нашего уха, право же, чрезвычайно умна. Вдумайтесь только в решаемую им задачу – колебания давления воздуха в одну миллионную и даже биллионную долю атмосферы должны производить некоторое действие на нервы, подходящие к уху. Вспомните, что вибрирующему телу нелегко вызвать колебания воздуха, если только оно не обладает поверхностью достаточно большой площади, которая толкала бы взад и вперед соприкасающийся с ней воздух. Точно так же воздух с низкой эффективностью возбуждает колебания в твердых тканях организма.

На приводимых фотографиях показаны два вида тени, отбрасываемой лезвием безопасной бритвы. Первая из них (слева на рис. *а*) дает возможность судить о том, почему свет по общему мнению распространяется прямолинейно. Однако вторая фотография (*б*) говорит совсем о другом. Источником света



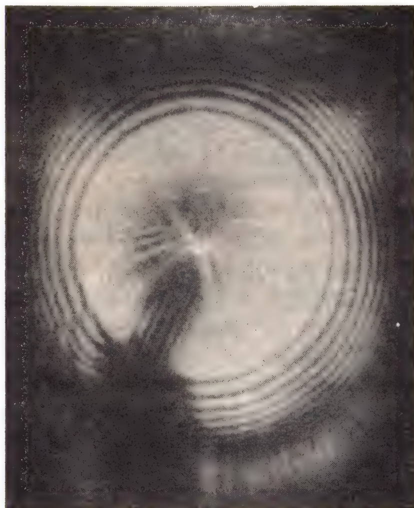


Тень (слева), отбрасываемая лезвием безопасной бритвы, (*а*); тень, отбрасываемая маленьким участком лезвия бритвы, освещенным монохроматическим источником (*б*)

здесь служил лазер, создающий очень параллельный световой пучок (состоящий из плоских волн) в очень узком диапазоне частот. О таком свете говорят, что он монохроматичен; это не значит, что такой свет характеризуется одной в точности определенной длиной волны, но разброс длин волн очень мал.

Тень на второй фотографии отбрасывается маленьким участком лезвия бритвы. Граница тени – отнюдь не резкая, но в то же время и не диффузная. В области, где можно было бы ожидать равномерную освещенность, протянулись отчетливые светлые и темные полосы. Более того, некоторое количество света попадает в область геометрической тени.

На следующей фотографии показана тень от круглого диска, тоже освещенного лазерным пучком. Вокруг ободка образуются чередующиеся светлые и темные кольца. (Обратите внимание на то, что первая полоса света ярче, чем общая освещенность внешней области.)



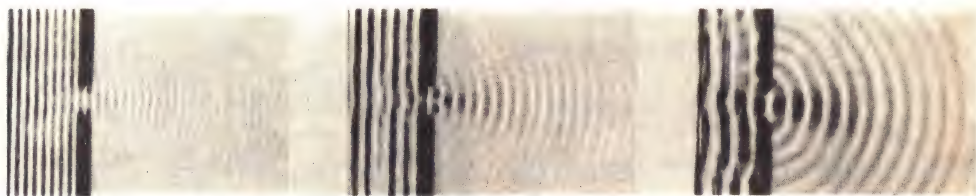
Тень, отбрасываемая шариком от подшипника, освещенным гелий-неоновым лазером (шарик был укреплен на вертикальном стержне). Яркое пятно в центре тени известно как «пятно Пуассона» или «пятно Араго»

Наиболее замечательная особенность такого вида тени состоит в том, что прямо в центре геометрической тени образуется яркое светлое пятно. Очевидно, что световые волны огибают диск таким образом, что в центральной области тени они усиливают друг друга.

Поскольку волны выглядят изгибающимися при прохождении мимо препятствия, посмотрим, что происходит, когда мы пытаемся сформировать узкий пучок из большой плоской волны. В опытах с волнами на воде мы пытались сделать это, помещая в воду два барьера, чтобы преградить волнам путь всюду, кроме узкой щели между барьерами. То же самое можно сделать и со звуковыми волнами, но препятствия должны быть твердыми и звукопоглощающими. Один из способов получения этого эффекта со звуковыми волнами состоит в том, чтобы поместить громкоговоритель внутри комнаты и напра-

вить его в сторону открытой двери, ведущей наружу. В этом случае нельзя изменять ширину отверстия, но можно изменять длину волны звука. Как мы увидим, эффект загибания волн зависит от *отношения длины волны к ширине щели*. Для световых волн эффект загибания можно получить, используя перестраиваемую щель с ножевыми краями. Наибольшее раскрытие ножей в таких щелях может не превышать одного миллиметра. В «Знакомстве с явлениями» вам предлагалось получить качественное представление об этом эффекте со световыми волнами, рассматривая удаленный источник света просто через зазор между двумя пальцами, почти прижатыми друг к другу.

Во всех таких случаях узкое отверстие (но очень большое по сравнению с длиной волны) создает узкий пучок, как и следовало ожидать. Если, однако, вы попытаетесь сделать пучок еще уже, постепенно закрывая зазор, как показано на приводимой последовательности фотографий, пучок начинает расширяться. Угловой разброс пучка возрастает,

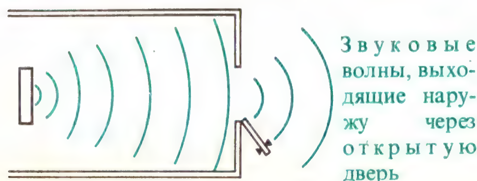


Плоские волны на поверхности воды, проходящие через узкий зазор. При увеличении длины волны угловая ширина пучка возрастает

и наконец, когда ширина щели становится порядка одной длины волны, щель действует так, как если бы она была линейным источником, испускающим цилиндрические волны.

Вопрос 16-13

Если вы будете пытаться наблюдать такое расширение пучка со звуковыми волнами, посылая их наружу через входную дверь, какую частоту следует использовать, чтобы получить длину волны, примерно равную ширине двери?

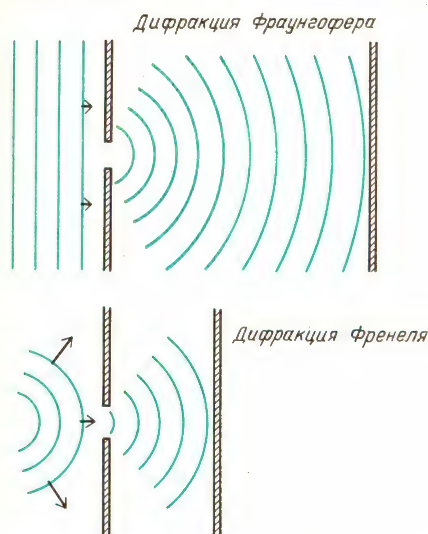


Звуковые волны, выходящие наружу через открытую дверь

Теперь мы должны объяснить, почему волны изгибаются, когда они проходят возле препятствий. Такое объяснение очень тесно связано с причиной, по которой плоские волны продолжают распространяться прямолинейно, не расходясь в разные стороны. Еще на с. 20, когда мы ввели модель построения волн по Гюйгенсу, мы предположили, что каждую точку надвигающегося волнового фронта можно рассматривать как источник нового набора волн. Если фронт волны первоначально был плоским, то он и остается плоскостью, движущейся в прежнем направлении. Однако в соответствии с построением Гюйгенса каждая точка фронта рассматривается как источник *сферических* волновых фронтов. Мы утверждали, что интерференция приводит к взаимному уничтожению волновых эффектов по всем направлениям, кроме направления, перпендикулярного к гребням волн. Для полного уничтожения по любому направлению, кроме направления вперед, необходим вклад вторичных волн от *каждой* точки исходного плоского волнового фронта. Если какая-то часть исходного плоского волнового фронта не дает вклада, то может возникнуть усиление вторичных волн еще под одним или несколькими углами, кроме направления вперед. Если надвигающаяся плоская волна проходит через узкую щель, то исключаются вклады вторичных волн от точек, лежащих по обе стороны щели. То, что пройдет сквозь щель, будет уже не вполне плоской волной. Например, в предельном случае, когда

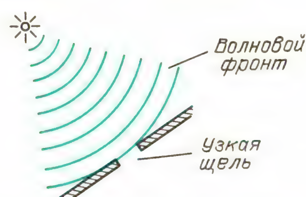
ширина щели становится меньше, чем длина волны, прошедшая через щель волна ведет себя так, как если бы она исходила от линейного источника, и радиально расширяется в двух измерениях.

Для некоторых простых расположений нетрудно просуммировать действия вторичных волн Гюйгенса и таким образом предсказать интерференционный рисунок волн после их прохождения сквозь щель. Для упрощения будем считать, что на узкое отверстие надвигается настоящая плоская волна. Ситуация была бы более сложной, если



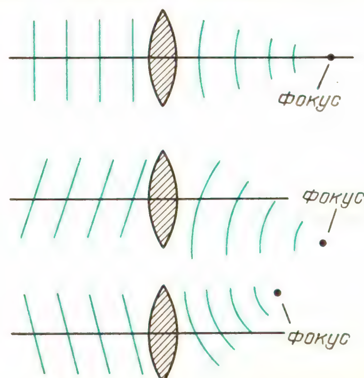
бы волны исходили из точечного источника, находящегося на небольшом расстоянии от отверстия. В таком случае исходная волна расширялась бы радиально, вследствие чего колебания в плоскости отверстия не происходили бы все в одинаковой фазе. Если первоначально мы имеем плоские волны и рассматриваем интерференционную картину на большом расстоянии от препятствия, то наблюдаемое явление называется дифракцией Фраунгофера. Если фронт исходной волны не является плоским и мы изучаем интерференционную картину вскоре за препятствием, то явление называется дифракцией Френеля.

В случае световых волн имеется дополнительная особенность, благодаря которой приближение Фраунгофера оказывается хорошим. Из-за того, что длина световой волны очень мала, а вызывающие дифракцию щели очень узки, дифракционную картину обычно наблюдают на расстояниях, больших по сравнению с раскрытием щели. Более того, прежде чем образовать дифракционную картину, свет от щели часто проходит через линзу. Когда мы образуем щель с помощью сложенных пальцев и наблюдаем удаленный источник света, выполняются все условия, необходимые для использования приближения Фраунгофера. Поскольку источник света находится на большом расстоянии, волновые фронты, падающие на щель



Почти плоский волновой фронт от удаленного точечного источника в случае узкой щели

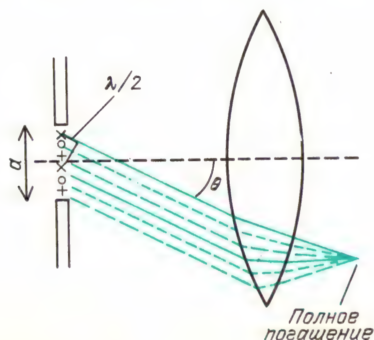
между пальцами, можно считать плоскими. После того как свет пройдет между пальцами, он входит в хрусталик глаза и фокусируется на сетчатке, расположенной на дне глазного яблока. В главе 17 мы изучим действие линз на волновые фронты. Самое важное, что нам нужно знать сейчас,— это то, что линза фокусирует плоский волновой фронт в одну точку. На рисунке показаны некоторые плоские волновые фронты, достигающие линзы и затем сходящиеся к своим точечным изображениям. Обратите внимание, что каж-



дая плоская волна фокусируется в некоторую точку – фокус. Но это не одна и та же точка для всех плоских волн. Положение фокуса зависит от угла, который плоские волны образуют с оптической осью линзы.

Теперь проанализируем интерференцию волн, исходящих от щелевого отверстия в препятствии. В двумерном случае мы можем мысленно разделить отверстие на произвольное число малых участков, каждый из которых в соответствии с принципом Гюйгенса можно рассматривать как источник круговых волновых фронтов. Все эти точечные источники совершают колебания в одинаковой фазе, так как мы предполагаем, что они лежат на одном и том же фронте исходной плоской волны. В первоначальном прямом направлении фронты волн остаются в фазе, и линза соберет эти волны в центральную фокальную точку. При отклонении на малые углы в каждую сторону от прямого направления гребни волн находятся почти в одинаковой фазе, и фронты этих волн будут сфокусированы в точки, лежащие по обе стороны от центрального изображения, лишь с небольшой степенью взаимной компенсации. Однако при больших углах отклонения от направления вперед разные точки гребней волн не находятся в фазе друг с другом, и поэтому произойдет некоторая деструктивная интерференция, приводящая к уменьшению интенсивности света, когда линза соберет его в некоторый фокус. Для некоторых определенных углов эта деструктивная интерференция будет полной.

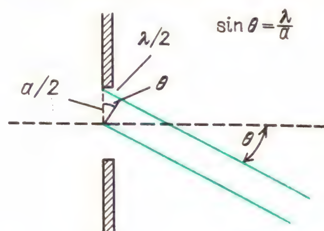
На данном рисунке показано, при каком расположении происходит полная деструктивная интерференция света, проходящего через узкую щель. Мы разделили узкую щель на две части: верхнюю и нижнюю. В пределах каждой половины имеется множество точечных источников. Мы провели отрезок перпендикулярно к направлению θ. Свету, исходящему из верхней точки верхней половины щели, до этого отрезка пришлось пройти на $\lambda/2$ большее расстояние, чем свету из верхней точки нижней половины щели. Поэтому световые колебания из этой верхней точки сдвинуты по фазе на 180° относительно световых колебаний от нижней точки. Такое же геометрическое соотношение выполняется для каждой пары точек из верхней и нижней половин, разделенных расстоянием $a/2$. Для каждого точечного источника в нижней половине щели найдется парный точечный источник в верхней половине. Для определенного угла θ вклады от этих подобранных пар источников взаимно уничтожаются. Следовательно, интенсивность света в интерференционной картине совсем исчезает в точке, соответствующей углу θ.



Этот критический угол θ определяется соотношением между длиной волны света и шириной щели:

$$\sin\theta = \frac{\lambda/2}{a/2} = \frac{\lambda}{a}.$$

До тех пор пока угол θ мал (не превышает 30° или около того), можно пользоваться приближенным выражением



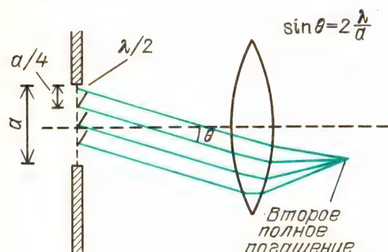
$$\theta \approx \lambda/a.$$

Те же самые геометрические соображения можно использовать и когда щель мысленно разделена на четыре, или шесть, или восемь равных частей. Для каждого из этих случаев может существовать такой угол, что подобранные пары точечных источников будут создавать волны, компенсирующие

друг друга. При разделении отверстия на четыре части, как показано на рисунке, критический угол полного погашения дается соотношением

$$\sin\theta = \frac{\lambda/2}{a/4} = 2\frac{\lambda}{a}.$$

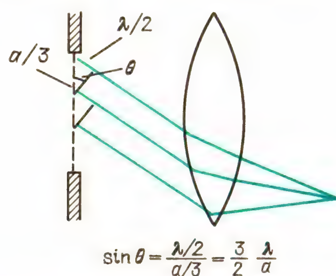
В общем случае полное гашение будет



осуществляться для любого угла, удовлетворяющего условию

$$\sin\theta = n\lambda/a,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Следует ожидать, что мы увидим светлые полосы между линиями полного погашения. Не совсем просто точно рассчитать интенсивность в пределах этих полос или даже положение максимальной яркости. Отметьте, к примеру, что интенсивность должна спадать по обе стороны от центрального максимума, поскольку для любого направления, отличающегося от направления вперед, будет происходить частичное погашение. Один из способов оценить полную энергию света, попадающего в первую световую кайму (между первой и второй линиями погашения), состоит в том, чтобы мысленно разделить щель на три части, как показано на рисунке. Если мы направим свет так, что будет выполняться условие $\sin\theta = (\lambda/2)/(a/3)$, то



Волны от верхней трети щели полностью гасят волны от второй трети, остаются только волны от нижней трети щели

парные точечные источники в двух из трех частей образуют вторичные волны, вклады которых скомпенсируют друг друга.

Вопрос 16-14

Будут ли тогда все вторичные волны от остающейся трети щели приходить без интерференции?

Использованный нами грубый аргумент приводит к предсказанию, что *амплитуда* результирующей волны в первой светлой полосе составляет лишь 1/6 часть полной амплитуды исходной волны. Однако это не значит, что интенсивность света в первой светлой полосе будет равна 1/6 от первоначальной интенсивности. Вспомните, что интенсивность волны пропорциональна квадрату ее амплитуды. Поэтому интенсивность в первой светлой полосе составляет 1/36 от первоначальной интенсивности, или около 3%. Действительная интенсивность, которую можно вывести при более полном анализе, составляет 4,7%. Чтобы найти результат интерференции во второй светлой полосе, нам пришлось бы мысленно разделить отверстие щели на пять равных частей. Вклады от двух из них были бы скомпенсированы вкладами от двух других, а интерференция вторичных волн от остающейся пятой части приводит к компенсации остаточной амплитуды примерно наполовину. Результирующая амплитуда составила бы лишь 1/10 часть исходной, а результирующая интенсивность – только около 1% исходной.

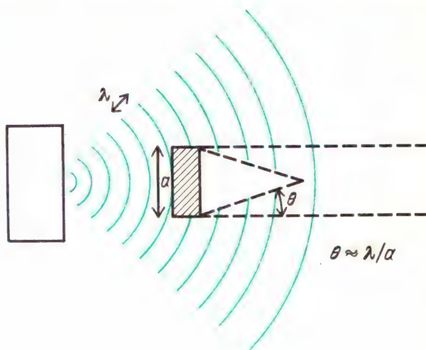
В действительности интенсивность в этой полосе равна 1,7%. В первую пару светлых боковых полос, расположенных по обе стороны от центрального максимума, идет 9,4% энергии, а во вторую пару – 3,4%. В целом все боковые полосы получают около 15% энергии. Остающиеся 85% приходятся на центральный максимум. На фотографиях приводятся дифракционные картины, полученные при различной ширине щели. Еще раз обратите внимание на то, что по мере уменьшения ширины щели ширина интерференционной картины возрастает.

Дифракционные картины отклонения лазерного пучка при прохождении сквозь щели. Вверху – наиболее узкая щель, внизу – наиболее широкая. Обратите внимание, что для самой узкой щели получается наибольшее расстояние между дифракционными полосами

Другие картины, возникающие в результате дифракции, можно анализировать тем же методом, который был использован выше для дифракции от отдельной щели. В любом случае дифракция обусловлена тем, что вклады вторичных волн от некоторых участков исходной плоской волны оказываются заблокированными. Вклады от остающихся участков интерферируют конструктивно или деструктивно как внутри, так и вне области геометрической тени. Вдоль прямолинейных краев тени будут расположены параллельные светлые и темные полосы. В случае круговых отверстий или препятствий будут видны кольцевые полосы. Одним из наиболее эффектных примеров дифракции может служить яркая область в центре тени, которую видно на фотографии на с. 70. В других местах тени вклады вторичных волн, приходящих от окружающей препятствие области, полностью компенсируются. Однако в центре вклад от ближайшей к диску кольцевой области доминирует, и вклады с изменяющимися фазами от окружающих концентрических областей оказываются недостаточными для полного погашения.

Каждый раз, когда волны проходят через отверстие или мимо препятствия, угловое положение первого минимума картины дифракционных полос зависит от отношения λ/a, где a – ширина щели или диаметр отверстия или препятствия. Для кольцевых дифракционных полос от булавочного отверстия или любого другого отверстия, или препятствия с круговой геометрией направление на первый минимум дается выражением $\sin\theta \approx \theta = 1{,}2\lambda/a$.

В «Знакомстве с явлениями» вы, возможно, пытались получить звуковую

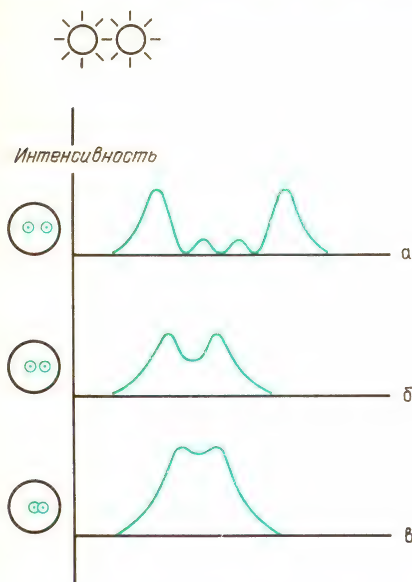


тень, помещая кресло с мягкой обивкой или человека между громкоговорителем и вашим ухом. Как показано на рисунке, волны изгибаются за препятствием на угол, приблизительно равный λ/a. Какого рода тень можно ожидать для звука частотой 2000 Гц?

Хотя мы говорили о дифракционных картинах, создаваемых булавочными отверстиями, отверстие любого размера будет создавать некоторую дифракционную картину. Например, наибольший диаметр зрачка вашего глаза составляет около 8 мм. (Размер зрачка колеблется, конечно, в зависимости от освещения.) Изображение точечного источника на сетчатке глаза будет представлять собой не точку, а дифракционный кружок. Его угловая полуширина равна $\theta = 1{,}2\lambda/a$. Для видимого света и для зрачка глаза диаметром 8 мм угол $\theta = 1{,}2\cdot(5\cdot10^{-7}\ \text{м})/(0{,}8\cdot10^{-2}\ \text{м}) = 7{,}5\cdot10^{-5}$ рад $= 0{,}0043°$.

Может показаться, что о столь малом угле едва ли стоит беспокоиться. Предположим, однако, что вы смотрите на два очень удаленных точечных источника, таких, как фары автомобиля, находящегося на большом расстоянии. Если

автомобиль находится достаточно близко, дифракционная картина на сетчатке вашего глаза будет выглядеть так, как показано на рис. *а*. Если же автомобиль далеко, картина на сетчатке может быть такой, как показано на рис. *б* или даже рис. *в*. В последнем случае центральный



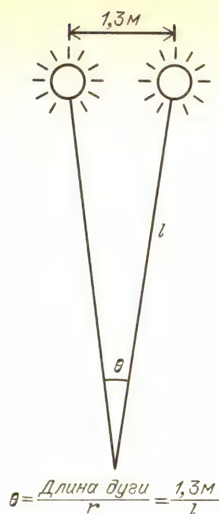
максимум одной дифракционной картины приходится на минимум дифракционной картины от второго источника. Если бы источники находились еще дальше, оба изображения слились бы настолько, что ваш глаз не мог бы различить, видит он два источника или один. Глаз не мог бы *разрешить* два таких источника. Угловая разрешающая сила линзы с круглым отверстием дается выражением $\theta = 1{,}2\lambda/a$. Как мы уже подсчитали, предел разрешения человеческого глаза составляет приблизительно $7{,}5 \cdot 10^{-5}$ радиан. На каком расстоянии должен находиться автомобиль, чтобы его фары были видны под углом $7{,}5 \cdot 10^{-5}$ радиан? Расстояние между фарами автомобиля равно примерно 1,3 м. Как видно из следующего рисунка,

$$7{,}5 \cdot 10^{-5}\ \text{рад} = 1{,}3\ \text{м}/l,$$

$$l = 1{,}7 \cdot 10^{4}\ \text{м} = 17\ \text{км}.$$

(Из-за ореолов фары будут казаться слившимися на меньшем расстоянии.)

Разрешающая сила микроскопа или телескопа служит определяющей харак-



теристикой его функциональных возможностей. Поскольку линзы объектива микроскопа имеют примерно такие же размеры, что и глаз человека, его разрешающая сила приблизительно такая же, как у глаза. Если фокусное расстояние объектива равно 1 см, то расстояние между предметами, которые могут быть разрешены, равно

$$\Delta x = (7{,}5 \cdot 10^{-5}\ \text{рад}) \cdot (1 \cdot 10^{-2}\ \text{м}) = 7{,}5 \cdot 10^{-7}\ \text{м}.$$

Микроскоп с такими характеристиками в состоянии разрешить два точечных объекта, находящихся на расстоянии 0,75 микрометра. Разрешающая сила 200-дюймового телескопа-рефлектора обсерватории Маунт Паломар гораздо больше. Поскольку диаметр зеркала примерно в 600 раз больше, чем у зрачка глаза, минимальный разрешимый угол должен быть в 600 раз меньше, чем у невооруженного глаза. Поэтому угловое разрешение большого зеркала равно примерно $1 \cdot 10^{-7}$ радиан, что составляет около 0,02 угловых секунд.

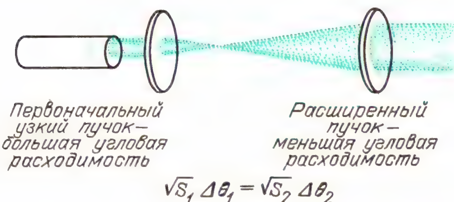
Дифракция ограничивает параллельность лазерного пучка. Для большинства лазеров крошечной апертурой служит не диаметр выходного окна или диаметр пучка на выходе, а, скорее, его наиболее узкое поперечное сечение в середине лазерного стержня. В типичном гелий-неоновом лазере минимальный диаметр пучка в пределах прибора равен всего лишь четверти миллиметра.

Поэтому можно ожидать, что дифракционный угол составит

$$\theta = \frac{1{,}2 \cdot 5 \cdot 10^{-7}\ \text{м}}{0{,}25 \cdot 10^{-3}\ \text{м}} = 2{,}4 \cdot 10^{-3}\ \text{рад.}$$

В действительности дифракционный угол лазерного пучка составляет только около половины только что рассчитанного значения. Интенсивность лазерного пучка не распределена равномерно по его сечению, а изменяется в соответствии с законом Гаусса. В результате ограничивающая пучок апертура оказывается «мягче» и приводит к меньшей дифракции, чем апертура с резкими краями.

Расходимость лазерного пучка ограничена дифракцией, но, как мы увидим в следующей главе, расходимость пучков большинства прожекторов с обычными лампами накаливания ограничивается конечными размерами нити накала или светящегося тела. Пучок любого вида удовлетворяет некоторому требованию сохранения. Если пучок с помощью линз или зеркал преобразуется, например, так, что его *поперечное сечение* становится меньше, то должна возрасти его *угловая расходимость*. И наоборот, узкий лазерный пучок можно

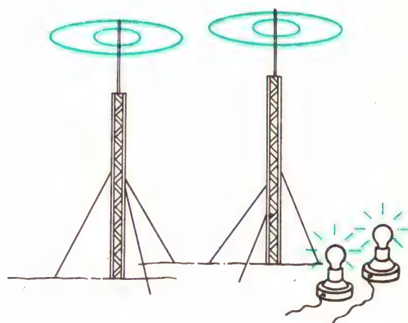


расширить так, чтобы он имел большее поперечное сечение и, следовательно, меньшую расходимость.

ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ВОЛН ОТ ДВУХ ИСТОЧНИКОВ

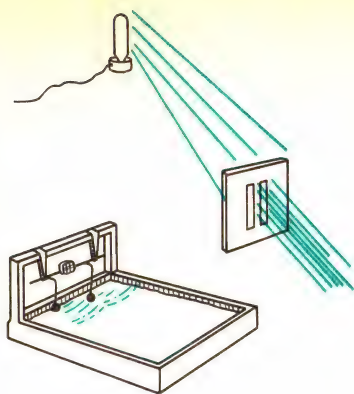
Исторически интерференция волн, происходящих от *одного* источника или проходящих через *одно* отверстие, получила название дифракции. Взаимодействие между волнами от *отдельных* источников или волнами, проходящими по *раздельным* каналам, было названо интерференцией. Эти явления не различаются по своей физической природе. В одном отношении интерференцию волн от двух источников понять легче, нежели дифракцию. Для расчета дифракционной картины нам приходится мысленно разделять источник волн на множество маленьких участков и затем рассчитывать фазы и интенсивности волн, приходящих от каждого из этих источников. Когда же у нас всего два источника (или две щели, сквозь которые могут проходить волны), можно принять, что каждый из них действует как линейный источник и что в этих источниках волны находятся в фазе друг с другом.

Последний момент очень важен. На рисунке показаны некоторые возможные способы получения волн от



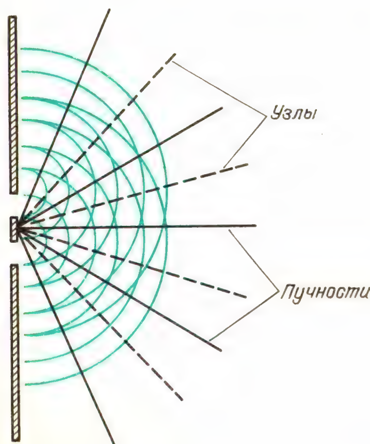
двух источников. В случае двух радиоантенн фазовое соотношение между двумя сигналами управляется радиостанцией, питающей обе антенны. В случае двух осветительных ламп фазовые соотношения в световых волнах, приходящих от них в какую-либо точку, носят совершенно случайный характер. В масштабах человеческой шкалы времени такой свет *некогерентен*. В точке, находящейся на некотором расстоянии от ламп, соотношение фаз между световыми волнами, приходящими от этих источников, остается неизменным в течение не более 10^{-8} секунды.

Когда обе щели освещаются единственным источником, находящимся так далеко, что его, по существу, можно считать точечным, достигающие щелей световые колебания происходят в фазе. Цуг волн, достигающий щелей, может резко начинаться и обрываться каждые 10^{-8} секунды, но в каждый момент фаза колебаний в одной щели совпадает с фазой в другой.



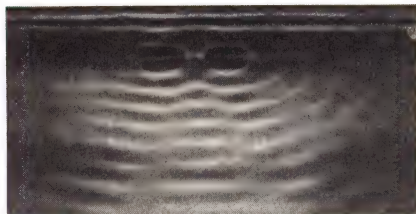
Свет в пучке от проекционного фонаря для диапозитивов не когерентен по фазе при переходе от одной точки к другой в одном и том же поперечном сечении пучка. Этот свет исходит от поверхности нити накала, которую даже приближенно нельзя считать точкой. Свет из некоторой точки поверхности нити не находится в фазе со светом из любой другой точки. Однако лазерный пучок образован световыми волнами, находящимися в фазе по всему поперечному сечению пучка.

В следующем разделе мы рассмотрим еще и другие способы, при которых световые колебания от двух или большего числа источников могут оказаться в фазе. Подобные явления, нередко встречающиеся в природе, происходят, когда пучок света делится на два или большее число пучков с помощью отражения или преломления, а затем эти пучки соединяются так, как если бы они исходили от двух или большего числа



различных источников. Поскольку разделенные пучки происходят только из одного пучка, фазовые соотношения между ними остаются постоянными.

Проанализируем сначала классический опыт с двойной щелью, описанный в 1800 году английским ученым Томасом Юнгом (1773–1829). Его геометрия показана на рисунке. Иллюстрацию этого эффекта с волнами на поверхности воды можно увидеть на фотографии.



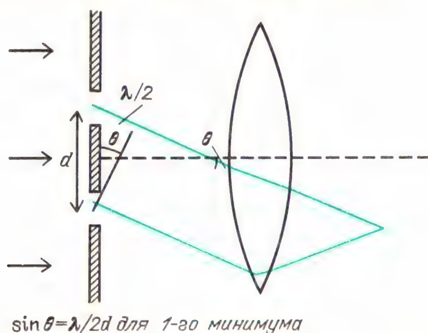
Интерференционная картина, возникающая при прохождении плоских волн на поверхности воды через двойную щель

Обратите внимание, что на геометрическом рисунке, показывающем волновые фронты, и на иллюстрации с волнами на воде существуют узловые линии, где интерференция носит деструктивный характер. В картине, создаваемой интерференцией света, эти узловые линии проявляются как темные полосы.

При получении и анализе таких картин мы используем узкие щели, ширина которых меньше расстояния между щелями, и принимаем, что эти щели действуют, по существу, как линейные источники. В нашей двухмерной геометрии волновые фронты имеют цилиндрическую форму. Нужно также использовать волны с определенной длиной волны, что в случае света означает, что источник должен быть по возможности монохроматическим.

Есть еще одна дополнительная особенность в явлении интерференции от двойной щели, на первый взгляд не очевидная. На большом расстоянии от двойного источника *основная* картина (за исключением интерференции, которую мы изучим чуть позже), по существу, такая же, как и в случае *единственного* источника. Вы можете убедиться в этом на пруду, если бросите в воду два камня рядом друг с другом. Расхо-

дящиеся на поверхности воды волны постепенно сливаются в одну большую круговую картину. В случае света экран обычно находится от щелей на расстоянии, бо́льшем по сравнению с расстоянием между ними. Центральные максимумы дифракционных картин от каждой из двух щелей налагаются друг на друга. Часто экран помещается в фокальной плоскости линзы (как и сетчатка, расположенная в фокусе хрусталика нашего глаза). Тогда совмещение центральных максимумов отдельных дифракционных картин будет полным.



sin θ=λ/2d для 1-го минимума

Теперь исследуем определенное расположение, показанное на рисунке. Свет от верхней щели проходит дополнительное расстояние в половину длины волны. Поэтому свет, достигающий экрана по верхнему пути, сдвинут по фазе на 180° относительно света, приходящего по нижнему пути. В данном месте экрана оба пучка интерферируют деструктивно, образуя темную область, или узел. При этом геометрические соотношения принимают вид

$$\sin\theta = \lambda/2d.$$

Деструктивная интерференция двух пучков будет происходить также и тогда, когда дополнительное расстояние для верхнего пучка равно $(3/2)\lambda$ или $(5/2)\lambda$. В общем случае *узел* будет получаться при выполнении условия

$$d\sin\theta = (2n+1)\lambda/2, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots$$

Если же дополнительное расстояние, проходимое верхним пучком, равно *целому* числу длин волн, эти волны будут усиливать друг друга, что приведет к образованию светлых полос, или пучностей. Геометрическое условие для пучностей имеет вид

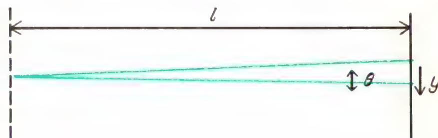
$$d\sin\theta = m\lambda, \quad m = 0,\ 1,\ 2,\ \dots$$

Эти светлые и темные полосы, образующие *картину интерференции* от двух щелей, существуют в пределах *дифракционной огибающей*, создаваемой каждой щелью.

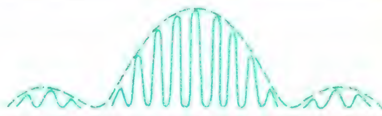
Рассчитаем комбинированную картину интерференции и дифракции от двух щелей, имеющих ширину 0,1 мм каждая и находящихся на расстоянии 0,5 мм друг от друга. В наших обозначениях $a = 0{,}1$ мм и $d = 0{,}5$ мм. Первый минимум *дифракционной* огибающей получается при

$$\theta = (5\cdot 10^{-7}\ \text{м})/(1\cdot 10^{-4}\ \text{м}) = $$
$$= 5\cdot 10^{-3}\ \text{рад}.$$

На экране, расположенном в 1 метре от щелей, первый минимум дифракционной картины окажется на расстоянии



y от центрального максимума, где $y = \theta l = (5\cdot 10^{-3}\ \text{рад})\cdot(1\ \text{м}) = 5$ мм. Полная ширина центрального *дифракционного* максимума составит таким образом 10 мм. Первый минимум *интерференционной* картины получается при $\theta = \lambda/2d = (2{,}5\cdot 10^{-7}\ \text{м})/(5\cdot 10^{-4}\ \text{м}) = 0{,}5\cdot 10^{-3}$ рад. На экране, удаленном на 1 метр, этот первый минимум интерференционной картины окажется при $y = \theta l = (0{,}5\cdot 10^{-3}\ \text{рад})\cdot(1\ \text{м}) = 0{,}5$ мм. Ширина центрального максимума *интерференционной* картины составит 1 мм. Результирующая картина показана на рисунке. Дифракционная картина



формирует огибающую для интерференционных максимумов.

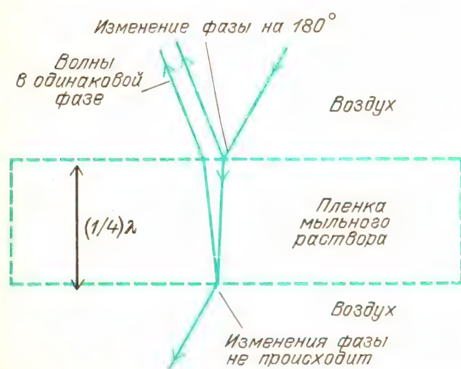
Все интерференционные эффекты зависят от отношения длины волны к размеру отверстий или расстоянию между ними. Одни и те же уравнения управ-

ляют поведением световых волн, волн на воде, звуковых волн. Одна из причин, по которым трудно наблюдать эффекты интерференции световых волн, объясняется малой длиной волны. Чтобы сделать интерференционные картины доступными для наблюдения, раскрытия щелей или расстояния между ними должны быть очень малы. Другая причина, по которой эти эффекты со светом не всегда видны даже в тех геометрических условиях, где их можно ожидать, обусловлена тем, что интерференционные полосы будут окрашены и перекроются при использовании источника белого света.

Вопрос 16-15
Предположим, что в некотором месте интерференционной картины от двух щелей расположен узел для красного света. Какова будет ситуация для синего света?

ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ПРИ РАСЩЕПЛЕНИИ И ВОССОЕДИНЕНИИ ЕДИНСТВЕННОГО ПУЧКА

На самом деле мы видим множество интерференционных картин в повседневной жизни. Так как обычно они создаются белым солнечным светом, выглядят они как окрашенные спектры. Один из наиболее известных примеров – это цветные кольца, которые видны на поверхности тонких пленок нефти, или окрашенные участки пленки мыльных пузырей. На рисунке показана

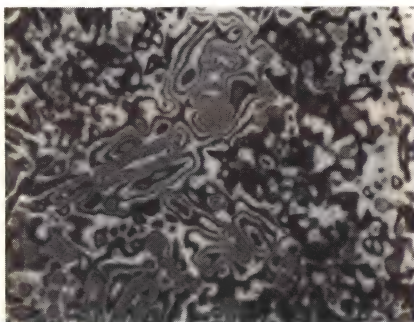


геометрия для одной типичной ситуации. Падающий пучок частично отражается от верхней поверхности тонкой пленки и частично передается внутрь. Отраженный луч на поверхности изменен по фазе на 180°, поскольку отражение происходит при падении из среды с низким импедансом (воздух) на среду с высоким импедансом. Переданный пучок проходит сквозь толщу пленки. Часть этого пучка отражается внутрь пленки от второй границы. Это отражение происходит без изменения фазы, потому что пучок падает из среды с высоким импедансом и отражается от границы среды с низким импедансом. Испытавший внутреннее отражение пучок возвращается к первой поверхности и частично проходит через нее, выходя наружу параллельно с пучком, отразившимся первый раз на этой поверхности. Если дополнительное расстояние, пройденное второй частью пучка, равно половине длины волны, то он выйдет наружу в фазе с первой частью пучка. Эти волны будут усиливать друг друга при данной определенной длине волны, определенной толщине пленки и определенном значении угла падения света, входящего в пленку. Для другой толщины пленки или другой длины волны взаимное усиление волн произойдет для другого угла падения. Следовательно, разные цвета видны в разных местах и под разными углами.

Вопрос 16-16
Легко выдувать мыльные пузыри и наблюдать возникающие в их тонкой оболочке интерференционные цвета. В любой такой пленке жидкость все время стекает вниз, отчего в верхней части пленка становится все тоньше. Незадолго перед тем, как пленка становится слишком тонкой и лопается, она чернеет. Очевидно, что свет всех цветов испытывает деструктивную интерференцию, когда пленка становится достаточно тонкой. Почему это происходит?

Узор в виде концентрических кругов часто виден в прижатых друг к другу тонких пленках. Классическая демонстрация этого явления была описана Ньютоном и носит название колец Ньютона. Хотя Ньютон и изучал это

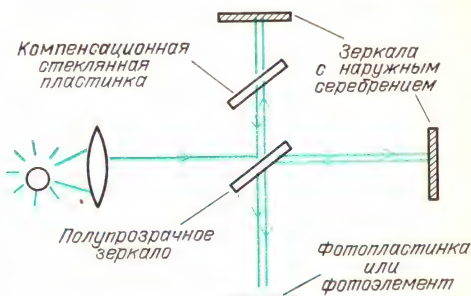
явление, он не приписывал его к проявлениям волнового движения. На приводимой фотографии видны кольца Ньютона, а рисунок дает геометрическую схему этого эффекта. Ситуация здесь очень похожа на то, что было при интерференции в тонкой пленке. В данном случае роль пленки играет прослойка воздуха, заключенная между двумя телами с большим импедансом. Кольцевой рисунок интерференционных полос



Кольца Ньютона

обусловлен осевой симметрией прослойки воздуха.

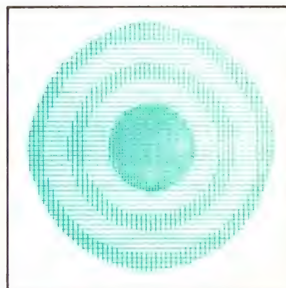
Некоторые приборы, играющие чрезвычайно важную роль в научных исследованиях, используют явление интерференции пучка света, расщепленного на две части и затем снова соединяемого. Классическим прибором такого типа является интерферометр Майкельсона. Американский физик Альберт Майкельсон (1852–1931) больше всего гордился своими работами по измерению скорости света, но наибольшую славу принесло ему осуществление опыта, описанного в главе 11 и известного как «опыт Майкельсона – Морли». В этой же главе был также описан и интерферометр Майкельсона. Его современные модификации до сих пор используются в научных исследованиях. Схема интерферометра показана на рисунке. Первое зеркало расщепляет исходный пучок света на две части. Если оба световых пучка затрачивают на распространение в точности одинаковые промежутки



времени, они достигнут фотопластинки в одинаковой фазе. Эффект будет таким же, как если бы свет совсем не расщеплялся. Чтобы обеспечить равенство времен прохождения, на пути второго пучка нужно поставить компенсационную стеклянную пластинку.

Вопрос 16-17
Почему?

Если промежутки времени, требующиеся для прохождения этих путей, слегка различны, наблюдателю будет казаться, что есть два различных источника, один из которых расположен чуть сзади другого. Поскольку у этих источников по отношению друг к другу соотношение фаз остается постоянным, в месте расположения наблюдателя они создадут интерференционную картину. Если дальние зеркала в точности перпендикулярны друг к другу, интерференционная картина будет выглядеть так, как показано на рисунке. Концентриче-



Картина, наблюдаемая в интерферометре при перпендикулярных зеркалах

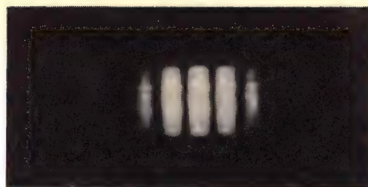
ские круги обусловлены осевой симметрией разности длин путей от двух источников. На практике часто одно из зеркал чуть-чуть наклоняют, в результате чего в месте расположения наблюдателя интерференционные полосы идут почти параллельно друг другу.

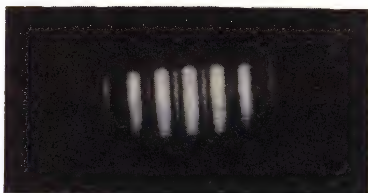
Большое достоинство интерферометра Майкельсона заключается в том, что пути пучков могут быть разнесены друг от друга вплоть до расстояний в несколько метров. Тогда с каждым пучком можно обращаться отдельно, включая введение прозрачных веществ на пути пучка или передвижения зеркала для увеличения разности хода. Например, если часть пути одного из пучков проходит через откачанную кювету, в которую постепенно напускается какой-либо газ, время прохождения сквозь этот слой будет постепенно возрастать. Это возрастание времени распространения приводит к непрерывному изменению интерференционной картины в точке наблюдения. Чередующиеся темные и светлые полосы проходят через поле зрения, и каждое изменение на один период соответствует дополнительной разности хода в одну длину волны. Таким способом можно измерить скорость света в газе как функцию давления.

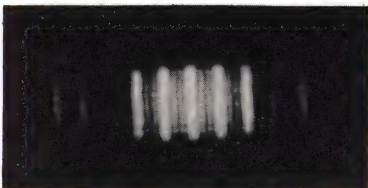
Если медленно передвигать одно из зеркал, интерференционные полосы в поле зрения наблюдателя будут перемещаться, причем сдвигу на одну полосу соответствует смещение зеркала на половину длины волны. В усложненном виде такая техника была использована Майкельсоном для выражения длины стандартного метра (стержневого эталона) через длину волны света.

ДИФРАКЦИОННАЯ РЕШЕТКА. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ОТ МНОГИХ ИСТОЧНИКОВ

Если вместо всего двух щелей для получения интерференции использовать много щелей, положение узлов и пучностей можно определять с помощью тех же самых геометрических соображений. На фотографиях показаны эффекты использования разного числа щелей. Во всех случаях ширина щелей и расстояния между ними остаются прежними.







Изменения в картине интерференции при увеличении числа щелей

Один из очевидных эффектов использования более чем двух щелей заключается в том, что интенсивность каждого максимума становится больше. Пропускается большее количество света. В случае трех щелей в каждом максимуме складываются три амплитуды вместо двух. Поэтому *интенсивность* возрастает в отношении 9 к 4. Но при изучении фотографии можно увидеть еще более важный эффект увеличения числа щелей. Максимумы не только становятся ярче; они становятся у́же. Вклады от множества щелей складываются конструктивно, когда угол, характеризующий направление на точку наблюдения, имеет в точности нужное значение, но для слегка ме́ньших или слегка бо́льших углов появляется много вкладов, приводящих к деструктивной интерференции.

Угловое положение максимумов, создаваемых многими щелями, зависит от длины волны. Следовательно, мы получаем прибор, который может образовать спектр, разлагая белый свет на составляющие его цвета. В течение последнего столетия неимоверный объем научной работы опирался на анализ све-

та в соответствии с его распределением по длинам волн или частотам. Прибор для точного исследования называется *спектрометром*. На фотографии показан общий вид типичного спектрометра. Анализирующим устройством, которое

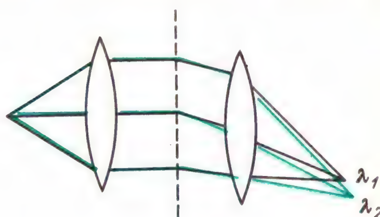
отклоняет пучок в соответствии с длиной волны, может служить либо преломляющая призма, либо решетка с большим числом щелей.

Созданы дифракционные решетки, имеющие до 24 000 линий на сантиметр. Поэтому у них расстояние между щелями составляет $4 \cdot 10^{-7}$ см, что равно длине волны синего света. Чем меньше расстояние между щелями, тем больше угол, соответствующий конструктивной интерференции для определенной длины волны. Чем больше общее число линий (но не просто линий на 1 см), тем меньше ширина отдельного максимума. Последнее свойство связано с разрешающей силой дифракционной решетки, характеризуемой отношением $\lambda/\Delta\lambda$. Ширина максимума вносит неопределенность $\Delta\lambda$ при измерении длины волны λ. Если $\Delta\lambda/\lambda$ (относительная неопределенность) мала, то разрешающая сила высока.

Вопрос 16-18

Предположим, что у вас есть 2- и 1-дюймовая решетки, обе с одним и тем же числом линий на сантиметр. Так как у 2-дюймовой решетки в два раза больше щелей, амплитуда волн в ее максимумах должна быть вдвое больше, чем у 1-дюймовой, и поэтому интенсивность света в максимумах должна быть в четыре раза больше. Как может интенсивность в максимумах быть в четыре раза больше, если полная энергия света, входящая в 2-дюймовую решетку, в два раза больше энергии, входящей в 1-дюймовую решетку?

Хотя входящий в дифракционную решетку белый свет будет растянут в непрерывный спектр цветов, излучение светящегося газа образует лишь отдельные линии разных цветов. Каждый химический элемент, будучи разогрет до свечения в газообразной фазе, испускает свой собственный набор длин волн. Сами по себе «спектральные линии» формируются геометрией системы наблюдения. Исследуемый свет входит через



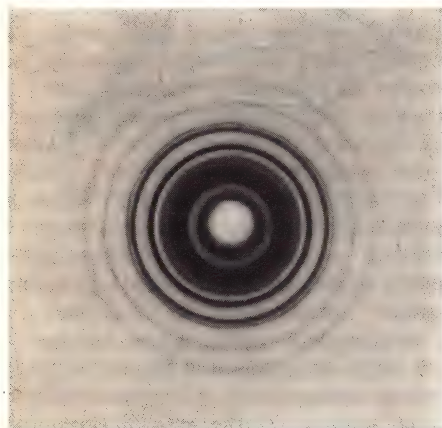
щель коллиматора и затем проходит сквозь дифракционную решетку (или отражается от нее). Решетка образована прямолинейными штрихами. Сама спектральная линия – это изображение щели коллиматора, но угловое положение этой линии определяется происходящими в атоме процессами, от которых зависит длина волны соответствующего излучения.

ДРУГИЕ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫЕ УЗОРЫ

Долгоиграющие пластинки и перья скворцов часто отбрасывают цветные блики, обычно синие или пурпурные. Эти эффекты вызваны интерференцией света, отражаемого правильными рядами тесно расположенных рефлекторов.

Другой пример интерференции волн дает дифракция рентгеновского излучения. Рентгеновское излучение, способное проникать на некоторую глубину в твердые тела, имеет длины волн, очень близкие к расстояниям между атомами твердого тела. Многие вещества, такие как металлы или соли, являются кристаллическими; другие содержат сложные, но правильные массивы атомов, как в длинных цепных молекулах живых тканей. Когда рентгеновское излучение рассеивается в таких регулярных структурах, его волновое движение можно анализировать как ин-

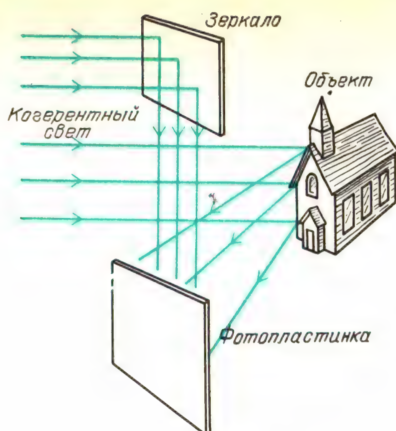
терференцию волн от множества разных упорядоченно расположенных источников. Исследование таких интерференционных картин сильно осложняется тем, что рассеяние происходит в трехмерной структуре. И тем не менее каждое кристаллическое расположение создает свою неповторимую картину деструктивной и конструктивной интерференции рентгеновского излучения. На фотографии показан пример такой картины. Отталкиваясь от подобных интерференционных узоров, кристаллографы



Дифракционная картина рентгеновского излучения в алюминии. Во время экспозиции тонкопленочная мишень вращалась для получения круговой картины

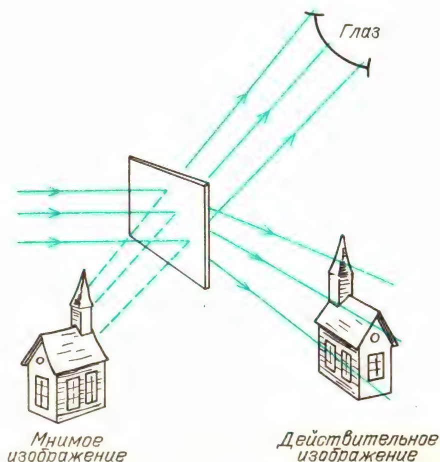
сумели узнать расположение атомов во многих кристаллах, включая такие сложные структуры, как структура носителя наследственной информации ДНК.

Обычная фотография регистрирует энергию света, отраженного каждым элементом объекта в направлении объектива фотокамеры и далее на пленку. Фотография другого типа, называемая *голограммой*, регистрирует *интерференционную картину*, создаваемую когерентным светом, падающим непосредственно на пленку, и тем же когерентным светом, отраженным от фотографируемого объекта. Геометрия эксперимента для получения такой голограммы показана на рисунке. Обратите внимание, что никакая оптика здесь не нужна. Каждый участок фотопластинки (пленки) записывает информацию от всего объекта. Когерентный свет соз-



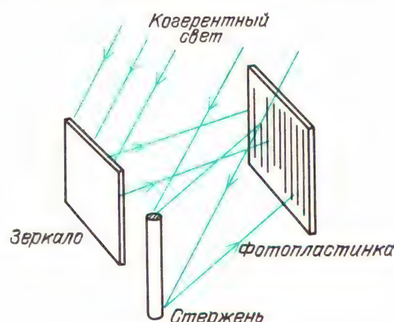
дается лазером, который должен быть достаточно мощным, чтобы за необходимое время экспозиции не изменилось взаимное расположение источника света, объекта и пленки. Относительное положение должно оставаться неизменным с точностью до малой доли длины световой волны, так как на пленке регистрируется интерференционная картина.

На полученной таким способом фотографии нет никакого изображения, которое можно было бы увидеть при обычном освещении. На ней зарегистрирована интерференционная картина, содержащая информацию о разностях фаз между отраженным от объекта светом и светом, который попал непосредственно на пленку. Если же эту фотографию рассматривать при освещении когерентным светом лазера или даже почти когерентным светом сильного точечно-

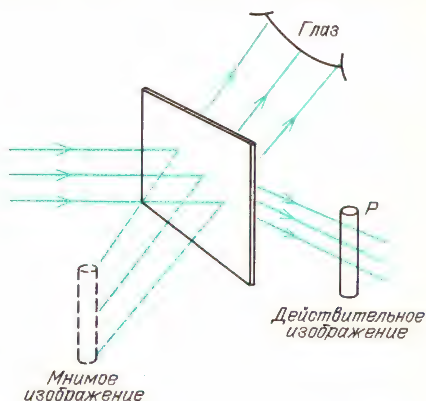


го источника, исходная сцена восстанавливается и ее можно видеть как действительное изображение, расположенное перед пленкой, или как мнимое изображение, находящееся по другую сторону пленки. В глаз наблюдателя попадает свет, дифрагировавший на зафиксированных пленкой интерференционных полосах – светлых в тех местах, где были узлы интерференционной картины и темных – где были пучности. Попадающая в глаз наблюдателя дифрагировавшая на голограмме волна образует на сетчатке изображение, в точности такое же, какое образовалось бы при непосредственном рассматривании объекта. Более того, это изображение в левом глазу отличается от изображения в правом в точности так же, как при непосредственном рассматривании объекта (предмета). Поэтому вы видите предмет в трех измерениях. Перемещая голову относительно пленки, вы можете осматривать предмет с разных точек зрения в тех же пределах, как если бы вы с этих точек смотрели непосредственно на предмет.

Один из путей понять, почему интерференционная картина позволяет увидеть исходный предмет, состоит в том, чтобы проанализировать интерференционную картину, возникающую при очень простой геометрии. Предположим, что фотографируемый предмет представляет собой длинный (зеркальный) стержень, как показано на рисунке. Когерентный свет, отраженный



стержнем, интерферирует со светом, падающим прямо на пленку. В результате возникает интерференционная картина в виде ряда темных и светлых полос, покрывающих всю пленку. После обработки из пленки получается прозрачный диапозитив. Если осветить его плоской волной когерентного света, цилиндрические вторичные волны, исходящие от прозрачных полос, образуют интерференционный максимум в некотором месте *P*. Расходящиеся из этого места волны будут казаться исходящими от



настоящего стержня. Другой набор расходящихся от пленки фронтов цилиндрических волн будет казаться исходящим из освещенного стержня, расположенного по другую сторону пленки.

Обратите внимание, что соответствующая форме стержня интерференционная картина возникала сразу во всех частях пленки. Положение стержня определялось расстоянием между светлыми и темными полосами. Если стержень расположен близко к пленке, это расстояние сначала велико, а затем быстро уменьшается. Если стержень расположен далеко от пленки, это расстояние всюду почти одинаково. Если бы предмет состоял из двух взаимно перпендикулярных стержней, образующих крест, на пленке возникло бы две системы перпендикулярных полос. Если бы предмет был точкой, интерференционный узор представлял бы собой ряд концентрических колец. Конечно, сложный предмет порождает сложный интерференционный узор, но когда когерентный свет проходит через этот узор и, дифрагируя, создает свой интерференционный рисунок в наших глазах, мы видим в точности такое чередование светлых и темных мест, которое мы воспринимаем как образ настоящего предмета.

Обратите внимание, что при использовании плоской опорной волны дифракционная картина *от пленки с зарегистрированной на ней дифракционной картиной* соответствует изображению исходного предмета.

Дифракционный узор от булавочного отверстия →

Дифракционная картина от

→ изображение точки (точечный источник).

Дифракционный узор от щели →

Дифракционная картина от

→ изображение щели. Подобным же образом интерференционный узор, образуемый при наложении когерентного света и отраженного предметом когерентного света, → голограмма.

Дифракционная картина от голограммы → изображение исходного предмета.

РЕЗЮМЕ

Волна, распространяющаяся вдоль оси x со скоростью v, имеющая длину λ и период T, может быть описана выражением

$$y = A \sin \frac{2\pi}{\lambda}(x - vt) =$$

$$= A \sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) = A \sin(kx - \omega t),$$

где $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число, $\omega = 2\pi/T$ – круговая частота.

Если источник волн и приемник находятся в относительном движении, наблюдаемая частота будет отличаться от частоты источника на величину доплеровского сдвига:

Наблюдатель движется относительно среды:

$$f'_{\text{набл}} = f_{\text{ист}}\ (V \pm v)/V.$$

Источник движется относительно среды:

$$f_{\text{набл}} = f'_{\text{ист}} V/(V \pm v).$$

Здесь f – частота в системе отсчета, связанной со средой, V – скорость волн в среде, v – скорость источника или наблюдателя относительно среды.

Сдвиг Доплера в спектрах звезд и галактик – ключевой метод исследования в астрономии. В случае электромагнитного излучения, когда нет никакой «среды» для распространения волн, сдвиг Доплера зависит только от относительной скорости источника и наблюдателя:

$$f_{\text{набл}} = f_{\text{ист}}\left[1 \pm \frac{v}{c} + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 \pm \ldots\right].$$

Интерференция волн зависит от их относительных фаз и от того, остаются ли эти фазовые соотношения постоянными. Большинство обычных источников создают некогерентное излучение; его фаза изменяется быстро и случайным образом.

Во многих средах волны могут проходить друг сквозь друга, не оказывая никаких возмущений. Однако там, где они налагаются, амплитуды могут складываться конструктивно или деструктивно. В большинстве рассматриваемых примеров мы предполагаем, что это сложение происходит линейно – в противном случае возникают новые частоты. Когда две волны, распространяющиеся вместе, имеют частоты f_1 и f_2, в результате наложения волн возникают биения – волна с огибающей частотой $(f_1 - f_2)/2$ и частотой тонкой структуры $(f_1 + f_2)/2$:

$$y = \left[2A \cos\left(2\pi \frac{f_1 - f_2}{2} t\right)\right] \times$$

$$\times \sin\left(2\pi \frac{f_1 + f_2}{2} t\right).$$

Если периодические волновые импульсы распространяются взад и вперед вдоль линии длиной l, отражаясь от концов с малыми потерями, и если время распространения туда и обратно равно периоду импульсов, то в линии наступает резонанс. Амплитуда импульсов будет нарастать (ее рост ограничи-

вается потерями). Условия резонанса: $T = 2l/v$ или $l = \lambda/2$, если фаза на каждом из концов не изменяется или изменяется на 180°. Условия резонанса выполняются также при $l = (n/2)\lambda$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$ для линий, закрытых или открытых на обоих концах, и при $l = (n/4)\lambda$, где $n = 1, 3, 5, \ldots$ для линий, открытых на одном конце. Если эти резонансные условия выполняются для синусоидальной волны, в линии устанавливаются стоячие волны. *Огибающая* такого возмущения не перемещается вдоль линии, хотя сам эффект создается двумя волнами, распространяющимися в противоположных направлениях и поддерживающими друг друга с помощью отражений на концах линии.

Сложные синусоидальные волны можно представить в виде суммы двух или большего числа синусоидальных волн с кратными частотами. Музыкальные звуки состоят из основной частоты, которая обычно определяет высоту тона, и многочисленных обертонов с кратными частотами.

Музыкальные инструменты имеют некоторый источник колебаний, соединенный с резонирующей и излучающей системой. Во многих инструментах сигнал, отраженный на конце резонансной линии, сам управляет своим восполнением, поступающим либо от смычка, либо от губ, либо от турбулентного воздушного потока. Восприятие звука органом слуха зависит от согласования импеданса воздуха с импедансом жидкости в полости уха и от раздражения нервных клеток, которые расположены вдоль столбика, резонирующего на разных частотах.

Когда когерентные волны взаимодействуют в двух (или трех) измерениях, устанавливаются сложные картины узлов и пучностей. Параллельные волновые фронты, проходя через узкую щель ширины a, расширяются и образуют угловое распределение с центральным максимумом, половинный угол которого определяется соотношением $\sin\theta = \lambda/a$. Параллельный пучок света при прохождении через круглое отверстие диаметром a образует ряд коаксиальных конических узловых поверхностей, первая из которых имеет угол при вершине $\theta = 1{,}2\lambda/a$. Два удаленных точечных источника, находящихся на таком угловом расстоянии друг от друга, создают изображения как раз на пределе разрешения, когда можно установить, что свет исходит из двух источников, а не из одного.

Интерференция волн от двух когерентных линейных источников, например световых волн от удаленного источника, проходящих через две параллельные щели с расстоянием d между ними, приводит к образованию картины узлов, положения которых определяются соотношением

$$d\sin\theta = (2n + 1)\lambda/2.$$

Свет от одного источника можно расщепить на два пучка, которые затем могут интерферировать друг с другом. Этот эффект отвечает за образование колец Ньютона и целенаправленно используется в интерферометре Майкельсона.

Дифракционная решетка из большого числа параллельных штрихов формирует более яркие и узкие максимумы. Дифракционные решетки используются в спектрометрах для получения спектров источников света. Чем больше число штрихов решетки и чем меньше расстояние между ними, тем выше разрешающая сила $\lambda/\Delta\lambda$.

Интерференцию света легко наблюдать с помощью интенсивных когерентных световых пучков, которые теперь стали доступными благодаря лазерам. Голограммы представляют собой фотопластинки, на которых записана интерференция света от когерентного источника с некоторой долей света из того же пучка, отраженной объектом. При рассматривании голограммы, освещенной частично когерентным светом, в глаз попадает свет, дифрагировавший на этой интерференционной картине, который и создает изображение исходного объекта.

Ответы на вопросы

16-1. При $x = 0$ $y = 0$. При $x = {}^1/_4\lambda$ $y = A\sin\pi/2 = A$. При $x = {}^1/_2\lambda$ $y = A\sin\pi = 0$. При $x = 3{}^1/_4\lambda$ $y = A\sin(6{}^1/_2\pi) = A\sin\pi/2 = A$.

16-2. Для описания одиночных импульсов или волн, движущихся влево, подставьте $x + vt$ вместо x. Другими словами, измените знак v на противоположный. Поэтому гауссов импульс, движущийся влево, описывается выражением

$$y = Ae^{-(x+vt)^2/2\sigma^2}.$$

Положение пика определяется из условия $x + vt = 0$. Если $t = 1$ с, то $x = -v$, где все величины выражены в СИ.

16-3. Если $v = 0$, наблюдатель неподвижен и $f' = f$. Если $v = V/2$, то $f' = f\frac{V - V/2}{V} = f/2$. Частота звука, воспринимаемая наблюдателем, на октаву ниже, чем частота источника. Если $v = V$, наблюдатель движется со скоростью звука и ничего не слышит от источника.

16-4. Если $v = 0$, эффект Доплера отсутствует и $f = f'$. Для других указанных скоростей ограничимся случаем, когда источник движется от наблюдателя. Мы можем сравнить эти эффекты с рассмотренными в вопросе 16-3, где наблюдатель удалялся от источника. Отличие данного случая заключается в том, что теперь наблюдатель неподвижен относительно воздуха, сквозь который удаляется прочь источник. Если $v = V/2$, то $f/f' = V/(V + v) = V/(V + V/2) = 2/3$. Напомним, что в сравнительной ситуации из 16-3 отношение частот было 1/2. Если $v = V$, то $f/f' = V/(V + v) = 1/2$. В сравнительном случае из 16-3 отношение частот было равно нулю. Наблюдатель вообще не слышал бы звука. Ясно, что отнюдь не безразлично, будет ли удаление обусловлено движением источника или наблюдателя относительно воздуха.

16-5. В случае звука различие в 1% между f и f' получается при $v/V = 0{,}01$ независимо от того, движется ли относительно воздуха источник или наблюдатель. Заметьте, что оба выражения различаются лишь на 1 часть от 10^4, поскольку $v^2/V^2 = 1 \cdot 10^{-4}$. Сдвиг частоты в 1% имел бы место при $v = 3{,}4$ м/с. Для доплеровского сдвига в 1% в случае электромагнитного излучения отношение $v/c = 0{,}01$. Поэтому $v = 3 \cdot 10^6$ м/с.

16-6. Заметьте, что на третьей позиции рисунка первая отраженная волна полностью уничтожает правую часть надвигающейся волны. Однако спустя четверть цикла, как показано на четвертой позиции рисунка, отраженная волна полностью перекрывается с падающей волной (хотя они и распространяются в противоположных направлениях) и обе волны усиливают друг друга. Начиная с этого момента непрерывно происходит *деструктивная* интерференция волн вблизи границ и *конструктивная* интерференция посередине. Результирующий контур выглядит как половина синусоидальной волны, неподвижно закрепленная на границах и осциллирующая между положительным и отрицательным значениями амплитуд в центре.

16-7. Но почему энергия непременно должна передаваться через узловую точку? В идеализированном случае при отсутствии трения амплитуда отраженной волны равна амплитуде падающей волны. Когда потерь энергии не происходит, систему и не нужно питать энергией и поэтому нет нужды, чтобы какая-либо энергия передавалась через узловую точку. В реальных условиях потери энергии происходят на протяжении линии либо при отражениях. Для компенсации этих потерь энергия должна подводиться, падающая волна должна быть больше, чем отраженная, и узловые точки будут лишь приближенными.

16-8. Условия получения стоячей волны включают определенное соотношение между частотой, скоростью волн и длиной среды. Поскольку скорость волн зависит от напряжения среды, выделенные частоты также зависят от этого напряжения.

16-9. *Чисто* синусоидальная волна никогда не начинается и никогда не кончается. Информацию можно передать, лишь принуждая волну пульсировать или по крайней мере включая ее или выключая. Непрерывная волна ничего не говорила бы слушателю. Однако пульсирующая волна обязательно содержит в себе некоторые синусоидальные волны других частот, которые складываются так, чтобы погасить главную синусоидальную волну до ее начала и после ее окончания. Такой волновой импульс перемещается с групповой скоростью, которая никогда не превосходит скорости света.

16-10. Когда звучит основной тон, в трубе в каждый момент находится только один импульс. Он проносится вперед и назад, отражаясь от одного конца и восполняясь на другом. Это, однако,

еще не приводит к стоячей волне такого типа, как показано на с. 57, где бегущая *синусоидальная* волна имела определенное соотношение между своей длиной волны и длиной трубы. Поскольку волновой импульс в музыкальном инструменте обычно не является чисто синусоидальной волной, его можно представить суммой ряда Фурье, в которую входит синусоидальная волна той же основной частоты и другие синусоидальные волны с кратными частотами. Хотя высота воспринимаемого на слух тона соответствует основной частоте, насыщенный тон получается благодаря присутствию высших гармоник. Одиночный импульс, снующий взад и вперед, математически может быть представлен в виде линейного наложения стоячих синусоидальных волн основной и кратных частот.

Когда звучит вторая гармоника, *два* равноотстоящих импульса мечутся взад и вперед, каждый со своим набором гармоник. Если первоначально было 100 импульсов в секунду, теперь будет 200 импульсов в секунду. В этом случае высота тона (обычно) соответствует частоте второй гармоники. (При определенных обстоятельствах наш слух может субъективно настроиться на высоту тона, соответствующую основной гармонике.)

16-11. Корпус скрипки позволяет струне излучить в воздух ту же самую энергию за меньшее время. После щипка струна быстрее теряет энергию.

16-12. Длина струны основного тона *в воздухе* определяется частотой колебаний струны и скоростью звука *в воздухе*. Частота пульсаций струны определяется длиной струны и скоростью передачи волновых импульсов *в струне*.

16-13. Дверь обычного жилого дома имеет ширину около 70 см. Следовательно, требуется частота

$$f = v/\lambda = (340\ \text{м/с})/(0{,}7\ \text{м}) = 490\ \text{Гц}.$$

Эта частота лежит между *B* и *A*, по которой настраиваются инструменты оркестра.

16-14. Нет, потому что свет от верхней части остающейся трети щели должен пройти расстояние на половину длины волны большее, чем свет от нижней части этой трети. Поэтому в пределах остающейся трети щели происходит частичное погашение вкладов. В качестве первого приближения можно предположить, что около половины точечных источников скомпенсируют вклады друг друга. Если мы сложим амплитуды оставшихся после этого вторичных волн, получим только около половины от одной трети полного числа вторичных волн, исходящих от всей щели.

16-15. Уравнение для узла от двух щелей имеет вид

$$d \sin\theta = (2n + 1)\lambda/2 = (n + 1/2)\lambda.$$

Уравнение для пучности от двух щелей:

$$d \sin\theta = m\lambda.$$

Рассмотрим случай первого узла для красного света: $n = 0$. Этот узел окажется при $d \sin\theta = \lambda/2 = 7 \cdot 10^{-7}$ м$/2 = 3{,}5 \cdot 10^{-7}$ м. Первая пучность для синего света окажется при $d \sin\theta = \lambda = 4 \cdot 10^{-7}$ м. Первая пучность для синего света находится почти в том же месте, где расположен первый узел для красного цвета. Поэтому это место будет выглядеть синим. Наложение узлов и пучностей для красного и синего света происходит по всей интерференционной картине. Интерференционная картина выглядит подобно серии радуг, набегающих друг на друга.

16-16. Когда толщина пленки становится меньше 1 мкм и меньше четверти длины волны из-за дополнительного пути сквозь пленку и обратно, то происходит лишь небольшое изменение фазы. Но все еще остается разность в 180° из-за различия условий отражения на внешней и внутренней поверхностях. Следовательно, для любого цвета световые пучки от первого и второго отражений находятся в противофазе. Поверхность выглядит черной.

16-17. Свет, отражающийся вверх от полупрозрачного зеркала, не проникает внутрь зеркала. Свет, проходящий через это зеркало направо, трижды проходит сквозь толщу его стеклянной подложки, прежде чем отразится вниз. Помещая стеклянную пластинку такой же толщины и под таким же углом на пути пучка света, распространяющегося вверх и вниз, мы уравниваем оптические длины обоих путей.

16-18. Ширина каждого максимума, которая определяет $\Delta\lambda$, обратно пропорциональна полному числу линий решетки *N*. Поэтому ширина максимумов,

формируемых 2-дюймовой решеткой, составляет только половину ширины максимумов, формируемых 1-дюймовой решеткой. Двухдюймовая решетка пропускает вдвое больше света, чем 1-дюймовая, и направляет его в максимумы, ширина которых вдвое меньше. Поэтому интенсивность спектральных линий, формируемых 2-дюймовой решеткой, в четыре раза больше.

Задачи

1. Сделайте рисунок, который давал бы качественную картину того, что происходит при прохождении плоских волн на поверхности воды через узкую щель.

2. Измерьте длину какого-нибудь музыкального инструмента (игрушечного или настоящего) и найдите частоту и длину волны самой низкой ноты, которую он может воспроизвести.

3. Дайте словесное определение всем символам, входящим в уравнение

$$y = A\sin(kx - \omega t),$$

и укажите, как они связаны с другими величинами.

4. Смещение отрезка веревки дается выражением

$$y = A\sin(kx - \omega t).$$

Чему равно значение y при $x = 10{,}0$ м и $t = 1{,}5$ с, если амплитуда равна 2,0 см, длина волны 0,5 м и период равен 0,1 с?

5. Чему равно значение y в задаче 4, если $x = 7{,}6$ м и $t = 1{,}5$ с?

6. Можно ли осуществить на практике демонстрацию эффекта Доплера, приводя будильник в движение по окружности? Примите разумные значения для высоты тона и частоты звука будильника; выберите приемлемые радиус и скорость движения; оцените осуществимость определения результирующих изменений высоты тона.

7. Автомобиль с включенным звуковым сигналом, звучащим на частоте 400 Гц, движется мимо вас со скоростью 60 миль/ч. Звук какой частоты слышите вы до и после того, как автомобиль пройдет рядом с вами?

8. Если удаленная галактика, уносящаяся от нас со скоростью, равной половине скорости света, излучает свет, длина волны которого в той галактике равна $4 \cdot 10^{-7}$ м, то какой будет длина волны принимаемого нами света?

9. Девяносто лет назад в Огайо Майкельсон выполнил прецизионный эксперимент со своим интерферометром, используя видимый свет. Он направил две половины светового пучка по разным путям и затем соединил их снова. Он смог определить даже столь малую разность их фаз, как 30°. Какую разность *времен* распространения мог он определить таким образом? Примите $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ м.

10. Вдоль пружины распространяется волна. Движение двух точек, отстоящих на 20 см друг от друга, происходит со сдвигом по фазе на 60°. Чему равна скорость волны, если ее частота равна 2 Гц?

11. Если при настройке инструментов оркестра гобой звучит с частотой 440 Гц, а частота трубы равна 450 Гц, какой будет частота их общего тона и сколько биений происходит в секунду?

12. Чему равна частота каждой из первых пяти гармоник струны скрипки, настроенной на 192 Гц?

13. Если длина струны скрипки равна 40 см и основная частота 400 Гц, чему равна скорость волн в струне? Чему равна длина волны в струне? Чему равна длина волны в воздухе? (Примем, что при комнатной температуре скорость звука в воздухе равна 344 м/с.)

14. Чему равна длина волны для второй гармоники в открытой с обоих концов трубе длиной 2 м? Чему равна длина волны для первого обертона, если труба открыта на одном конце и закрыта на другом?

15. Постройте тщательно графики функций $A\sin\theta$ и $(A/2)\sin 2\theta$ на одном чертеже в интервале от $\theta = 0$ до $\theta = 360°$. Сложите обе кривые и проведите результирующую кривую на том же чертеже другим цветом.

16. Сделайте набросок интерференционной картины, создаваемой отверстием в виде двух щелей, расстояние между которыми в четыре раза больше ширины каждой из них ($\lambda \ll a$).

17. Сделайте набросок дифракционных картин, создаваемых одиночной щелью ($\lambda \ll a$) для света, в состав которого входят две длины волны: синего света с $4 \cdot 10^{-7}$ м и красного с $7 \cdot 10^{-7}$ м.

18. Для каких частот звука можно ожидать резкой тени, отбрасываемой креслом с мягкой обивкой?

19. Два небольших громкоговорителя, расположенные примерно на уровне головы, присоединены к общему звуковому генератору, так что они излучают звук на высоте 344 Гц в одинаковой фазе. Расстояние между их центрами равно 1 м. Экспериментатор находится непосредственно перед одним из громкоговорителей, а затем отодвигается от него до тех пор, пока не обнаружит первый минимум громкости звука. На каком рас-

стоянии от первого громкоговорителя он находится? На каком расстоянии от второго?

20. Чему равно расстояние между параллельными щелями, если на экране, находящемся на расстоянии 1 м от щелей, ширина красных интерференционных полос ($\lambda = 7 \cdot 10^{-7}$ м) равна 2 мм? ($\theta = 2$ мм/м).

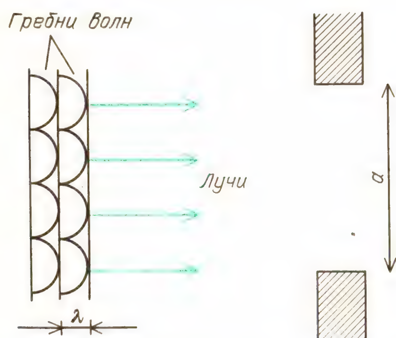
21. Чему равна угловая ширина центрального максимума дифракционной картины от щели шириной 0,1 мм для синего света ($\lambda = 4 \cdot 10^{-7}$ м)?

22. Пучок от радара автоинспектора должен быть достаточно узок, чтобы он покрывал только один автомобиль на расстоянии около 100 м. Какой примерно должна быть длина волны для получения такого пучка, если отверстие рупора радара имеет диаметр 30 см?

23. Когда зеркала в интерферометре Майкельсона установлены точно перпендикулярно друг к другу, интерференционная картина представляет собой ряд кольцевых концентрических узлов и пучностей. Объясните своими словами, почему так получается.

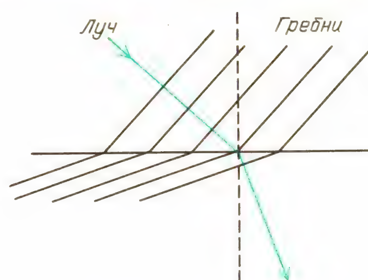
ГЛАВА 17. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

Для многих практических целей можно считать, что свет действительно распространяется прямолинейно. То же самое относится и к звуковым волнам, и к радиосигналам, и к волнам на поверхности воды, и к любым другим видам волновых движений, если только длина волны мала по сравнению с любыми ограничениями поперечных размеров пучка ($\lambda \ll a$). В таких условиях приближенно можно считать, что



волны распространяются вдоль траектории, перпендикулярной к волновому фронту. Эти траектории по определению называются *лучами*. Хотя луч представляет собой математическую линию, всем нам доводилось видеть световые пучки, которые дают приближенное представление о лучах. Например, пучок света от проекционного фонаря, пробивающийся сквозь запыленный воздух аудитории, очерчен лучами. Иногда мы видим солнечные «лучи», выходящие из просвета в облаках или из узкой щели в неплотно закрытой двери.

Вместо того чтобы иметь дело с отражением, преломлением или дифракцией волновых фронтов, часто бывает легче вводить в рассмотрение лучи, перпендикулярные к волновым фронтам. Такое приближение называется *геометрической* (лучевой) оптикой в противоположность полному волновому рассмотрению, называемому *физической* оптикой. Законы и правила, которые мы



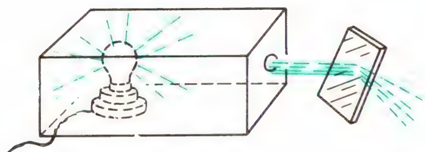
изучим, можно применять к любому виду волнового движения. Однако большинство примеров мы позаимствуем из оптики, поскольку приближение $\lambda \ll a$ применимо к многочисленным и часто встречающимся ситуациям в случае видимого света.

Объяснение большинства явлений, с которыми предстоит познакомиться в этой главе, опирается на простые законы, описывающие отражение и преломление лучей. При этом все же могут возникнуть трудности, поскольку зеркала и линзы, осуществляющие отражения и преломления, могут иметь самые разнообразные формы. С их помощью лучи можно направлять из одного места в другое, чтобы создавать изображения разных типов.

Оптические приборы, используемые в повседневной жизни и в научных исследованиях, представляют собой комбинации из линз и зеркал. Изучая поведение лучей, мы изучим также устройство человеческого глаза, фотоаппарата, гигантских телескопов, заглядывающих в глубины Вселенной.

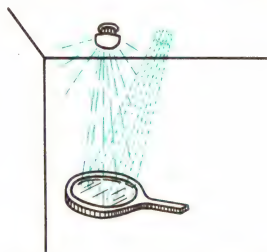
ЗНАКОМСТВО С ЯВЛЕНИЯМИ

1. Первое, что вам следует сделать, – это еще раз внимательно рассмотреть световые пучки, создаваемые карманными фонарями или светом, проходящим сквозь небольшие отверстия. Вы можете получить световой пучок, накрывая электрическую лампочку картонным коллиматором, как показано на рисунке. Такой коллиматор не фокусирует пучок, а просто задерживает все



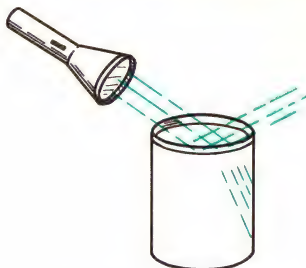
лучи, распространяющиеся в любом направлении, за исключением узкого телесного угла, определяемого отверстием. Направьте ваш световой пучок под разными углами на плоское зеркало. Убедитесь по крайней мере качественно, что угол отражения равен углу падения.

2. Если у вас есть ручное зеркало, слегка вогнутое или увеличивающее с одной стороны и плоское с другой, понаблюдайте, что происходит со световым пучком, когда вы направляете его перпендикулярно к искривленной стороне и перемещаете по поверхности зеркала. Отраженный пучок не возвращается к источнику. Этот эффект можно увидеть другим способом, если отразить свет от плафона обратно к потолку. Проделайте это сначала с помощью плоской стороны зеркала, а затем – с помощью искривленной. В последнем



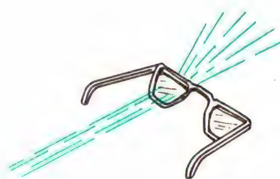
случае, передвигая зеркало вверх и вниз, вы сможете сфокусировать на потолке изображение источника. Если вы сместите зеркало выше или ниже места, обеспечивающего хороший фокус, изображение на потолке станет расплывшимся.

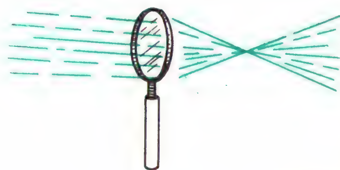
3. Направьте узкий пучок света в стеклянный сосуд, заполненный водой.



Если вода слегка загрязнена, а еще лучше, если вы добавите в нее щепотку сухого молока, вы сможете действительно увидеть световые лучи в воде. Наблюдайте, как изгибается траектория света при входе в воду. Попробуйте брать разные углы падения и посмотрите, будут ли ваши наблюдения хотя бы качественно подтверждать закон Снелла ($\sin i/\sin r = 4/3$ для воды).

4. Пропустите узкий пучок света сквозь линзу очков, а также через увеличительное стекло (лупу). Если очки





принадлежат близорукому человеку, их действие на пучок будет прямо противоположным действию, оказываемому увеличительным стеклом. Линзы очков для дальнозоркого человека в основе своей представляют собой то же самое, что и увеличительное стекло.

5. Воспользуйтесь увеличительным стеклом для получения изображения источника света. Источником света может служить Солнце или обыкновенная лам-

па накаливания. В любом случае отбросьте изображение на лист бумаги. Если источником служит Солнце и увеличительное стекло достаточно большое, а ваша рука тверда, то вы сможете получить настолько интенсивное изображение, что бумага воспламенится. Однако будьте осторожны. Столь горячее изображение будет также и настолько ярким, что сможет повредить вашим глазам при пристальном рассматривании.

С помощью увеличительного стекла вы сможете также получить изображение любой ярко освещенной сцены. Обратите внимание на характер такого изображения. Перевернуто ли оно вверх

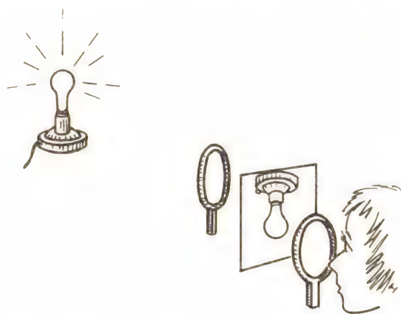
ногами? Обращено ли в нем правое и левое?

Еще один способ получения изображения с помощью увеличительного стекла состоит в том, чтобы поднести стекло близко к глазам и воспользо-

ваться им для увеличения. Попробуйте с его помощью читать печатный шрифт. Где находится изображение в этом случае? Перевернуто ли оно вверх ногами, заменено ли в нем правое на левое? Обратите также внимание на расположение вашего глаза относительно шрифта, когда вы пользуетесь увеличительным стеклом, и сравните его с расстоянием от глаз до шрифта, когда вы читаете без увеличительного стекла.

6. Несколько раз в день вы, возможно, смотритесь в обычное зеркало. Где находится ваше изображение в зеркале? Воспользуйтесь линейкой или мерной лентой и попробуйте вместе со своим изображением измерить разделяющее вас расстояние. Что происходит с вашим изображением, когда вы подходите ближе к зеркалу? Обратите внимание, что ваше изображение не перевернуто вверх ногами, но в нем левая сторона заменена на правую. Почему так получается? Что произойдет, если повернуть голову на 90° в сторону?

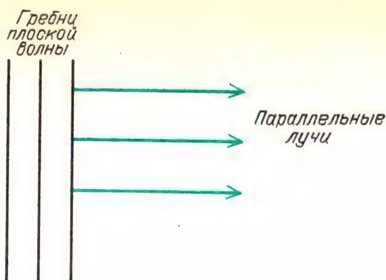
7. Если вам удастся достать два увеличительных стекла или две любые собирающие линзы, вы сможете сделать телескоп или микроскоп. Расположите линзы, как показано на рисунке. Смотрите на что-нибудь очень яркое, например на лампу или на сцену на открытом

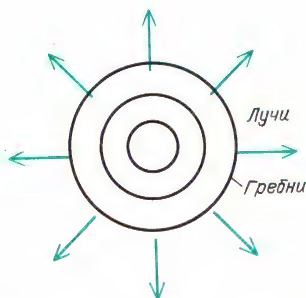


воздухе. Пусть первая линза создает изображение на листке толстой полупрозрачной бумаги. Вторую линзу используйте как увеличительное стекло, чтобы для рассматривания этого изображения вы смогли расположить глаз поближе к листку бумаги. Когда получите хорошо сфокусированное изображение, уберите листок бумаги и сможете еще лучше видеть это изображение. В каком месте появляется изображение? Выглядит ли оно более крупным, чем исходный объект? Будет ли оно прямым или перевернутым?

ПОВЕДЕНИЕ ЛУЧЕЙ

Лучевая оптика представляет собой просто удобное приближение для волновой оптики. Сами лучи лучше всего представлять себе как нормали к волновым фронтам (т. е. линии, перпендикулярные к фронтам). Если волновые фронты плоские, то лучи перпендикулярны к этим плоскостям, параллельны друг другу и проходят на равных рас-





стояниях друг от друга. Если волновые фронты круговые (в случае двух измерений) или сферические (в случае трех измерений), то лучи радиальны.

Выходящие из источника лучи распространяются прямолинейно до тех пор, пока свойства среды на их пути остаются неизменными. Эти лучи непрерывны, если среда не поглощает энергии волнового движения. Интенсивность волны можно выразить качественно через число лучей, проходящих через единичную площадку. В дальнейшем мы воспользуемся такой количественной моделью при описании электрических и магнитных полей. Однако в случае лучей света мимоходом отметим только, что если световые лучи расходятся, интенсивность света должна уменьшаться, если же они сходятся, интенсивность возрастает. Если волны расширяются от точечного источника в двух измерениях, лучи направлены по радиусам и равномерно распределены по окружности. Поскольку длина окружности пропорциональна радиусу, а полное число лучей при увеличении радиуса остается постоянным, число лучей на единицу длины окружности должно быть обратно пропорционально радиусу. И в самом деле, интенсивность волны, расширяющейся равномерно от точечного источника в двух направлениях, обратно пропорциональна расстоянию от источника. Подобным же образом интенсивность, создаваемая точечным источником, равномерно излучающим в трех измерениях, обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника. И на этот раз число лучей, выходящих из источника, не зависит от расстояния, но площадь поверхности сферы растет как $4\pi r^2$. Поэтому число лучей на единицу площади пропорционально $1/r^2$.

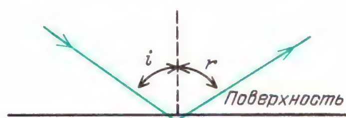
Когда мы прослеживаем ход лучей при отражении и преломлении, нам нужно задавать их направление по отношению к граничным поверхностям. Стандартное соглашение, приводящее к простейшим правилам, заключается в том, чтобы измерять угол между лучом и *перпендикуляром* к поверхности.

Вопрос 17-1

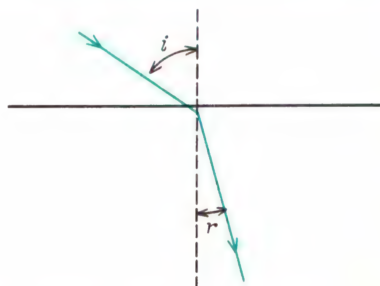
Каким соотношением связан этот угол с углом между волновым фронтом и поверхностью границы?

ОТРАЖЕНИЕ ОТ ПЛОСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В предыдущей главе мы уже видели, что при отражении плоской волны от плоской границы угол падения равен углу отражения. Подобное построение для лучей показано на рисунке. Если



Угол падения и угол отражения, образуемые лучо́м и перпендикуляром к поверхности, $i = r$



Угол падения и угол преломления

поверхность однородна на большой площади, так что весь падающий параллельный пучок отражается под одним и тем же углом, то поверхность и процесс отражения от нее называют *зеркальными*. Конечно, хорошее зеркало должно делать нечто большее, чем просто поддерживать параллельность отражаемых лучей. Мы ожидаем, что зеркала должны делать это без поглощения заметной доли падающих лучей и без всяких различий для разных цветов. Большинство зеркал лишь приближенно можно считать идеальными. Обычное зеркало состоит из металлического слоя, нанесенного на заднюю сторону

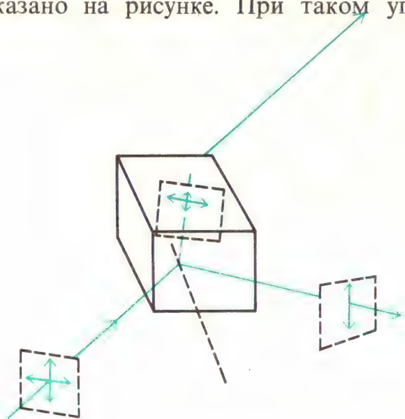
гладкой стеклянной пластины и затем покрытого каким-либо веществом, чтобы предохранить зеркало от потускнения. Слой стекла одновременно выполняет функции гладкой плоской подложки для тонкого металлического отражателя и также средства защиты металлического зеркала от механических повреждений и потускнения. Поскольку передняя поверхность стекла также отражает некоторую долю падающего на нее света, в таком зеркале обычно можно видеть двойное изображение. Слабое изображение слегка отделено в пространстве от главного изображения, так как передняя зеркальная поверхность стекла находится чуть-чуть ближе к предмету.

Наша способность видеть в обычных условиях в основном обусловлена отражением. Свет от солнца или лампы падает на окружающие нас тела, и небольшая часть этого света отражается в наши глаза. В любом случае отраженный луч покидает тело под углом, равным углу падения. Однако поверхности большинства тел настолько грубы, что падающие на любой участок поверхности лучи отражаются во многих различных направлениях. Каждая точка поверхности тела действует как точечный источник излучения. Такое тело представляет собой *диффузный отражатель*. Будет ли тело диффузным или зеркальным, зависит от длины волны падающего излучения. Если ориентация отражающей поверхности хаотически изменяется в пределах длины волны, отражение будет полностью диффузным. Поверхности многих тел достаточно гладки, чтобы давать и некоторое зеркальное отражение наряду с диффузным. Этот эффект проявляется в виде блеска, который виден под определенным углом, таким, что угол между падающим светом и перпендикуляром ко всей поверхности равен углу отраженного блеска.

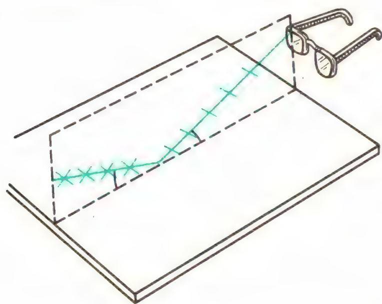
Поскольку диффузное отражение заставляет каждый участок поверхности тела действовать подобно точечному излучателю, мы можем видеть освещенные тела под любыми углами. Более того, отраженный свет дает нам информацию в большей степени о поверхности тела, чем о расположении источника. В частности, большинство тел в разной степени поглощают падающий свет в зависимости от строения их поверхности. Поскольку поглощение зависит от частоты, мы живем в цветном мире. Если свитер поглощает зеленый и синий свет в высокочастотном конце видимого спектра, то к нашим глазам он будет отражать только желтый, оранжевый и красный свет. Такой свитер скорей всего будет выглядеть оранжевым.

Эффективность отражения света на поверхности по сравнению с поглощением или проникновением внутрь зависит от поляризации света. Как мы видели в главе 16, световые волны представляют собой поперечные колебания электрического и магнитного полей. В вакууме эти колебания всегда перпендикулярны к направлению распространения. Но направление колебаний в этой поперечной плоскости может быть любым. В случае неполяризованного света направление колебаний остается неизменным в течение не более 10^{-8} с, после чего случайным образом изменяется на некоторый угол. Отраже-

ние света происходит с большей эффективностью, если направление колебаний электрического поля параллельно отражающей поверхности. Поэтому отраженный свет частично поляризован, как показано на рисунке. При таком угле



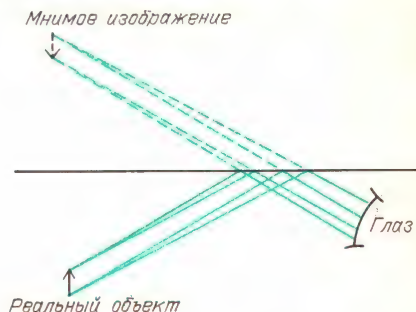
падения, когда отраженный луч и луч, прошедший через поверхность, взаимно перпендикулярны, отраженный луч будет полностью поляризован. Такой угол падения известен как *угол Брюстера*. Поскольку отраженный блеск поверхности обычно сильно поляризован, его можно в значительной степени ослабить, надевая очки с поляроидными стеклами, у которых направление пропускания перпендикулярно к отражающей поверхности. Чаще всего мы видим



блеск горизонтальных поверхностей, поэтому солнцезащитные очки с поляроидами пропускают свет вертикальной поляризации и задерживают свет горизонтальной поляризации.

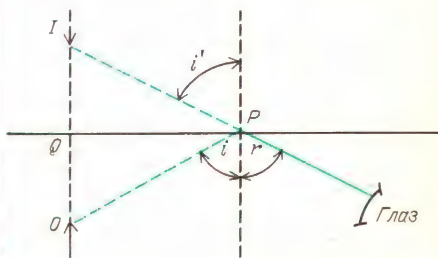
В зеркале мы видим отраженный мир так, как будто просто смотрим через окно. Хотя видимые нами изображения находятся позади зеркала, мы не можем к ним прикоснуться или поместить за зеркалом фотопластинку, чтобы их зарегистрировать. Такие изображения называются *мнимыми*.

Изображение любого предмета (объекта) находится на таком же расстоянии за зеркалом, на каком находится предмет перед зеркалом. Нам кажется, что попадающие в наши глаза лучи выходят прямо из изображения. Действительные траектории световых лучей от предмета к зеркалу и от зеркала к глазу показаны на рисунке. Обратите внима-

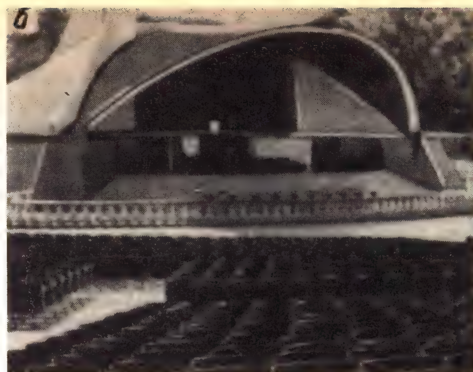


ние, что приведенное построение основано на том, что угол отражения равен углу падения.

Вопрос 17-2
Как из этого геометрического построения следует, что изображение должно находиться на таком же расстоянии за зеркалом, на каком находится предмет перед зеркалом?



На фотографиях показаны зеркала для волн двух других типов. Первое, представляющее собой открытую проводящую сетку, служит хорошим отражателем для микроволн. Второе, представляющее собой монолитную бетонную стену, обеспечивает зеркальное отражение звуковых волн. В обоих случаях мы встречаемся с двумя требованиями, которые должны быть удовле-



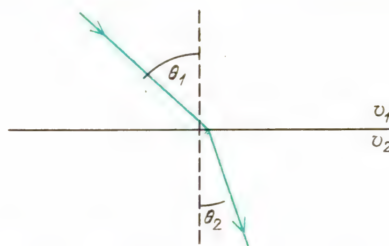
Отражатель радара (*а*); отражатель звука в виде бетонной раковины (*б*)

творены для зеркального отражения. Первое требование заключается в том, что зеркала не должны сильно поглощать падающее излучение. Для микроволн такое зеркало должно быть хорошим проводником электричества; для звуковых волн поверхность зеркала должна быть достаточно жесткой, чтобы она заметным образом не вибрировала и не поглощала энергию из-за трения. Второе требование заключается в том, что зеркала должны быть достаточно гладкими в пределах отдельных участков, больших по сравнению с длиной волны. И микроволны, и звуковые волны имеют длину волны, во много раз превосходящую расстояние между проводниками или между неровностями поверхности бетона.

Вопрос 17-3
Будет ли проволочная сетка хорошим отражателем для звуковых волн, и будет ли бетонная стена хорошим отражателем для микроволн?

ПРЕЛОМЛЕНИЕ

В главе 16 мы видели, что волны, продвигающиеся из одной среды в другую, изменяют направление своего движения. Степень преломления зависит от отношения скоростей волн в двух средах. Это соотношение, выведенное в главе 15 на с. 22, называется *законом Снелла*. Датский астроном и математик Виллеброрд Снелл (1521 – 1626) работал в этой области незадолго до Гюйгенса и Ньютона. Рисунок иллюстрирует этот закон с помощью лучей, а не волновых



гребней. Выражение закона Снелла через скорости волн имеет вид

$$\sin\theta_1/\sin\theta_2 = v_1/v_2.$$

Вопрос 17-4
Скорость света в воде составляет примерно три четверти от скорости света в воздухе. Если пучок света переходит из воздуха в воду с углом падения 30°, чему равен угол преломления в воде? Насколько близко в такой ситуации отношение $\sin\theta_1/\sin\theta_2$ к θ_1/θ_2?

Отношение скорости света в вакууме c к скорости света в прозрачной среде v называется *показателем преломления* данной среды:

$$n = c/v.$$

Для большинства прозрачных веществ и для большинства длин волн $n > 1$. (Поскольку v – фазовая скорость, возможны обстоятельства, в которых $n < 1$, но, как мы видели в главе 16, групповая скорость не может превосходить c.)

Скорость света в среде, а отсюда, и ее показатель преломления зависят от частоты. Как уже было упомянуто, это свойство называется дисперсией. Здесь приведены показатели преломления ряда прозрачных веществ для длин волн на границах и в середине видимой области спектра.

преломления и n – показатель преломления прозрачной среды. Однако применять эту простую формулу нужно с осторожностью – нельзя забывать, что падающий луч проходит в воздухе. Если луч начинается в стекле или в воде, лучше возвратиться к более полной форме закона Снелла.

Показатели преломления различных веществ

Вещество	n			Δn* (синий – красный)
	$\lambda = 4{,}4 \cdot 10^{-7}$ м (синий)	$5{,}89 \cdot 10^{-7}$ м (желтый)	$6{,}6 \cdot 10^{-7}$ м (красный)	
Воздух	1,000296	1,000293	1,000291	0,000005
Вода	1,340	1,333	1,331	0,009
Этиловый спирт	1,370	1,362	1,360	0,010
Полиметил метакрилат (люцит)	1,501	1,491	1,488	0,013
Плавленый кварц	1,470	1,458	1,455	0,015
Стекло крон цинковый	1,528	1,517	1,513	0,015
Стекло легкий флинт	1,594	1,575	1,570	0,024
Стекло тяжелый флинт (свинцовый хрусталь)	1,945	1,890	1,875	0,070
Алмаз	2,465		2,407	0,058

*) Величина Δn (синий – красный) служит мерой дисперсии вещества. Преломление белого света в алмазе или свинцовом стекле приводит к образованию широких цветных спектров. Призма из воды или люцита не даст широкого спектра.

Прежде всего рассмотрим некоторые из вызываемых преломлением явлений, не обращая внимания на различия, связанные с длиной волны. Затем вернемся назад и примем во внимание дисперсию.

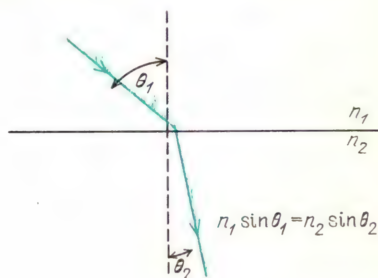
Закон Снелла можно следующим образом выразить через показатели преломления:

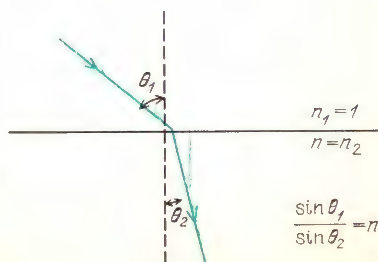
$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{v_1/c}{v_2/c} = \frac{1/n_1}{1/n_2} = \frac{n_2}{n_1},$$

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 .$$

В такой форме закон Снелла особенно полезен и прост в употреблении. Часто, однако, встречаются задачи, где свет проходит из воздуха в некоторую прозрачную среду. В таком случае $n_1 \approx 1$ (хотя в действительности показатель преломления воздуха при нормальном атмосферном давлении равен 1,0002957 для сине-фиолетового света и 1,0002914 для красного света), тогда $\sin\theta_1/\sin\theta_2 = n$, где θ_1 – угол падения, θ_2 – угол

Хотя закон Снелла и закон отражения дают значения наблюдаемых углов для преломленного и отраженного лучей, эти законы ничего не говорят о том, какая доля падающего света про-

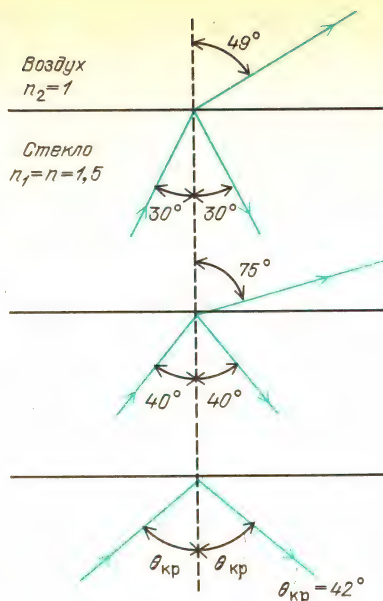




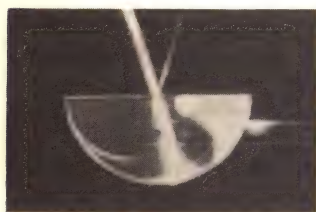
ходит во вторую среду или отражается. Эта доля сильно зависит от угла падения света. Для света, направленного перпендикулярно к чистой поверхности стекла, отражается только около 4%. При угле падения 80° отражается около 50%. Как мы видели, отраженный свет сильно поляризован; преимущественное направление колебаний электрического поля параллельно поверхности. При падении под углом Брюстера, когда отраженный и преломленный лучи направлены под прямым углом друг к другу, отраженный луч полностью поляризован.

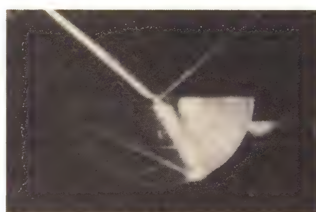
Вопрос 17-5

Следует ли из нашего рассмотрения, что преломленный луч тоже полностью поляризован, когда падающий луч направлен под углом Брюстера?



Приводимые фотографии иллюстрируют относительную интенсивность отраженного и преломленного лучей для некоторых углов падения. Напомним, что хотя преломление зависит от отношения *скоростей волн* в двух средах, степень отражения зависит от соотношения *импедансов* этих сред. Как мы видели, волны могут отражаться от границы между воздухом в трубе и воздухом снаружи: несмотря на то, что скорости волн в этих областях одинаковы, импедансы различны.





Если свет выходит из среды, такой как стекло или вода, и преломляется в среду, такую как воздух, характеризуемую более высокой скоростью, закон Снелла остается в силе; но нужно соблюдать аккуратность в обозначениях для двух сред и углов. На рисунке показано несколько подобных случаев. Подсчитаем углы для случая, когда угол падения равен 30°, а прозрачным веществом является стекло с показателем преломления $n = 1{,}5$:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2,$$

$$1{,}5 \sin 30° = 1 \sin\theta_2,$$

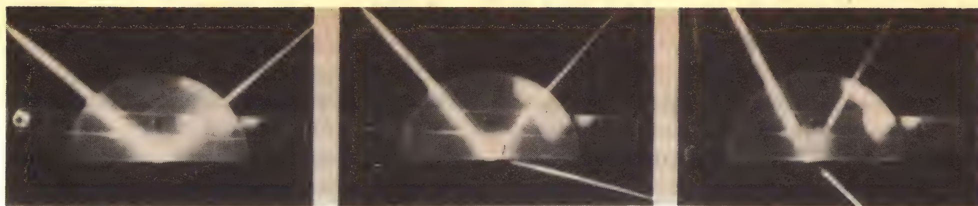
$$\sin\theta_2 = 0{,}75, \quad \theta_2 = 49°.$$

В этом случае угол преломления больше, чем угол падения. Обратите внимание на рисунках и фотографиях, что происходит по мере увеличения угла падения. Интенсивность отраженного луча возрастает, в то время как доля преломленного света уменьшается. В конце концов угол преломления достигает 90° и интенсивность преломленного света обращается в нуль. Это происходит при условии

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin 90° = n_2,$$

$$\sin\theta_1 = n_2/n_1.$$

Если вторая среда — это воздух, то $n_2 = 1$ и $n_1 = n$ — показатель преломления



прозрачного вещества, в котором лежит падающий луч.

В этом случае критический угол падения равен

$$\sin\theta_{кр} = 1/n.$$

За пределами этого критического угла весь падающий изнутри свет отражается и совсем не проходит во вторую среду. Это явление называется *полным внутренним отражением*. Для воды этот угол равен

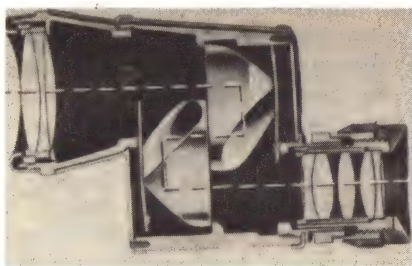
$$\sin\theta_{кр} = 1/1{,}33 = 3/4,$$

$$\theta_{кр} = 49^\circ.$$

Для стекла с $n = 1{,}5$ критический угол полного отражения равен

$$\sin\theta_{кр} = 1/1{,}5 = 2/3, \quad \theta_{кр} = 42^\circ.$$

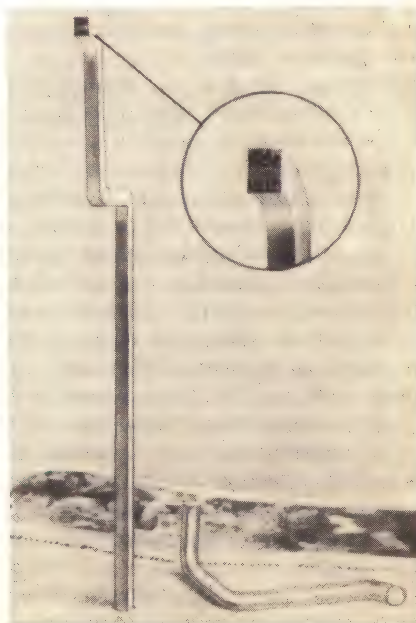
Когда свет отражается (перпендикулярно) от очень хороших плоских зеркал, около 10% света теряется. При полном внутреннем отражении потерь



Вид в разрезе 7 × 35 широкоугольного бинокля. Показаны призмы полного внутреннего отражения

не происходит. Это явление часто используется в оптических приборах, особенно когда требуется несколько отражений. Пример вы видите на рисунке. Благодаря нескольким отражениям в бинокле увеличивается проходимый светом путь, и изображение получается неперевернутым. Эти отражения происходят *внутри* стеклянных призм, а не от поверхностей обыкновенных зеркал, что уменьшает потери света.

Принцип полного внутреннего отражения используется также для передачи света вдоль длинных пластмассовых или стеклянных волокон. Световые лучи отскакивают взад и вперед от стенок, следуя за всеми изгибами и поворотами волокна. Как только свет отразился под углом, превышающим критический угол полного внутреннего отражения, он оказывается захваченным в веществе и продолжает взад и вперед отражаться без потерь сквозь стенки. Изготовлены переносящие свет таким образом волокна с очень малым диаметром, вплоть до 1 мкм. Такие волокна обладают большой гибкостью, их можно связывать между собой в пучки либо для передачи света по искривленным проходам, либо для передачи изображений из скрытых или удаленных мест. (В последнем слу-

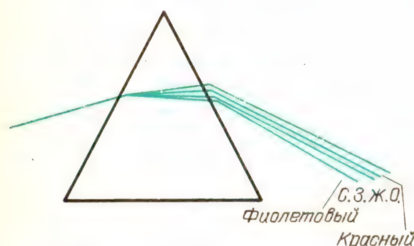


Волоконно-оптические световоды

чае должно быть выдержано неизменное взаимное расположение волокон, так чтобы свет от верхнего левого угла объекта появлялся в левом верхнем углу сечения пакета волокон.) Такие световоды теперь используются повседневно, особенно в медицине. Они могут быть сделаны достаточно компактными, чтобы вводить их по кровеносным сосудам и сквозь такие трубки, как мочеиспускательный канал. На фотографии показан внешний вид подобных устройств.

ДИСПЕРСИЯ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ

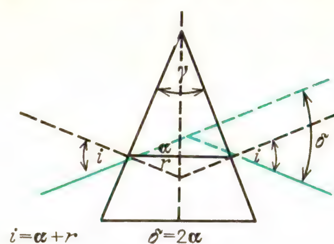
Поскольку показатель преломления зависит от частоты, преломленный пучок белого света разлагается в цветной спектр. Этот эффект показан на рисунке.



Отметьте, что синий, т. е. более высокочастотный, свет преломляется сильнее, чем красный. Очевидно, что скорость синего света в стекле меньше, чем скорость красного света.

Как можно видеть из таблицы показателей преломления, большой показатель преломления и сильная дисперсия не обязательно сопутствуют друг другу. Некоторые виды пластмасс имеют показатель преломления почти такой же, как у стекла, но значение этого показателя почти не зависит от частоты в видимой области спектра. Следовательно, эти пластмассы обладают очень слабой дисперсией. Взгляните в таблице на дисперсию в алмазе. Не только показатель его преломления имеет большую величину, но существует также заметная разница между значениями показателя преломления для синего и красного света. В этом главная причина игры бриллиантовых граней.

Преломление и дисперсию можно усилить, посылая свет сквозь призму так, чтобы он дважды испытывал преломление и сильно изменял свое направление. Показанный на рисунке пример характеризуется особенно простой для анализа геометрией. Свет падает под



$$i = \alpha + r \qquad \delta = 2\alpha$$

$$r = \frac{\gamma}{2}$$

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\sin(\alpha + r)}{\sin r} = \frac{\sin\left(\frac{\delta + \gamma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)} = n$$

таким углом, что луч внутри призмы параллелен ее основанию. Через δ обозначен *угол отклонения* – разница между конечным и исходным направлениями света. Можно выяснить на опыте или доказать аналитически, что δ имеет минимальное значение, когда луч внутри призмы параллелен основанию. Как при бóльших, так и при меньших углах падения угол отклонения возрастает. Однако при таком минимальном угле отклонение сравнительно нечувствительно к малым изменениям угла падения. С другой стороны, именно в условиях минимального отклонения преломление в призме наиболее чувствительно к частотной зависимости показателя преломления n, что обеспечивает оптимальное разрешение цветов.

Как можно видеть из сопровождающего рисунок вывода, угол отклонения связан с показателем преломления и с преломляющим углом призмы. Для призмы с углом 60° (или меньше) отношение синусов приблизительно равно отношению самих углов. Поэтому с приемлемой точностью получаем $n = (\gamma + \delta)/\gamma$, $\delta = (n - 1)\gamma$.

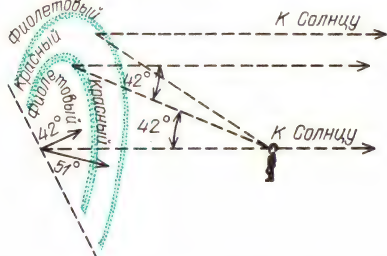
Вопрос 17-6
Какова будет ширина спектра, рассматриваемого с расстояния 1 м, в случае света, претерпевающего минимальное отклонение в алмазе, вырезанном с углом 60°? Вы видите практическое значение этого вопроса – можно ли наблюдать спектр, создаваемый обручальным кольцом?

Иногда призмы используют в качестве диспергирующих элементов в спектроскопах. Действие спектроскопов было описано в главе 16, а на фотографии на с. 83 показан общий вид одного из них. Существуют некоторые различия в использовании дифракционной решетки и призмы. Во-первых, создаваемая решеткой угловая дисперсия связана со структурой решетки простой моделью интерференции света от линейных источников. Синус угла отклонения прямо пропорционален длине волны. В случае преломления и дисперсии в прозрачной призме угол отклонения сложным образом зависит от микроструктуры ее материала. Более того, угол отклонения не связан каким-либо простым соотношением с длиной волны. Во-вторых, последовательность цветов в создаваемом призмой спектре обращена по сравнению с той, что дает решетка. Дисперсия приводит к большему отклонению синего цвета по сравнению с красным.

Дополнительный материал

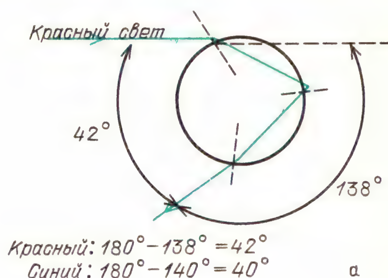
Наиболее известный пример преломления и дисперсии света впервые описан в Книге Бытия, где говорится, что бог наложил радугу на тучу в знак согласия между собой и земными существами. Он не собирается уничтожать их снова потопом (в следующий раз огнем).

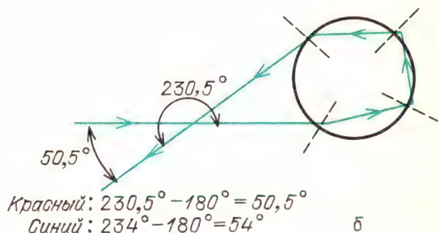
Радуга и другие проявления дисперсии, которые можно увидеть на небе, вызваны светом, взаимодействующим с каплями воды или кристалликами льда, взвешенными в воздухе. Некоторые из этих эффектов очень сложны. Здесь изображена обычная



радуга. Лучше всего ее видно после грозы, когда Солнце находится низко, но ярко светит через чистый от облаков участок неба. Чтобы увидеть радугу, вы должны повернуться спиной к Солнцу и смотреть в ту сторону, где все еще висят грозовые тучи. При благоприятных условиях видна цветная радуга, сине-фиолетовая с внутренней стороны и красная с внешней. Над первичной дугой иногда можно наблюдать более слабую вторичную дугу с обращенными цветами — красную внутри и сине-фиолетовую снаружи.

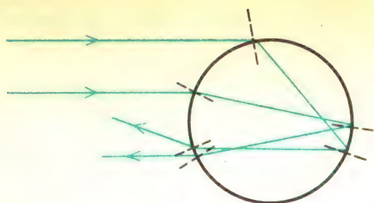
Приводящий к образованию радуги свет испытывает отражения и преломления в дождевых каплях. Это показано на следующем рисунке. Свет, приводящий к образованию первичной радуги, входит в верхней части капли и испытывает только одно отражение. Свет вторичной радуги входит





Угловые соотношения для первичной (*а*) и вторичной (*б*) радуги

в капли вблизи их дна и дважды отражается внутри капли. Поскольку при входе в каплю и при выходе из нее свет испытывает преломление, он подвергается также и дисперсии, так что каждый цвет выходит под своим определенным углом. На первый взгляд может показаться, что этого достаточно для объяснения существования радуги. Затруднения связаны с тем, что полный угол отклонения зависит не только от длины волны, но и от того, в какой точке исходный луч входит в каплю. Как видно из рисунка, луч, входящий вблизи вершины капли, отклоняется сильнее луча, входящего вблизи центра капли; большая часть света вблизи центра капли либо проходит насквозь, либо отражается под углом почти 180°. Свет от всех этих областей, попадая в наши глаза,



Лучи, падающие выше или ниже определенного участка капли, испытывают большее отклонение, чем лучи, формирующие радугу

будет представлять собой смесь цветов и поэтому будет казаться белым, так как солнечные лучи падают на всю поверхность капли.

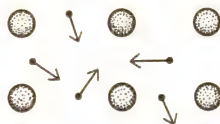
Существует, однако, специальное условие, из-за которого и возникают все особенности. Вблизи вершины капли есть определенная область, которая дает *минимум* отклонения по сравнению с областями, примыкающими к ней сверху и снизу. Этот минимальный угол составляет 138° для красного света и 140° для фиолетового. Как часто бывает в условиях подобного экстремума, лучи, падающие на каплю чуть выше или чуть ниже такой критической точки, отклоняются почти на одинаковые углы. Поэтому возникает небольшая концентрация света, отклоненного на эти определенные углы.

На первом из рисунков показано взаимное расположение Солнца, дождевых капель и наблюдателя. Наблюдатель видит в отклоненных каплями лучах концентрацию цветов вдоль конических поверхностей. Видимый наблюдателем угол раскрытия этого конуса равен 42° (180° – 138°) для красного света и 40° для фиолетового света. У вторичной радуги эти углы равны 50,5° для красного света и 54° для фиолетового.

Вершина этого светового конуса расположена в глазу наблюдателя. Центральная ось конуса проходит сквозь наблюдателя к Солнцу. Следовательно, если Солнце расположено у горизонта, наблюдатель увидит радугу на все 180°. Если Солнце стоит выше, световой конус наклонен к Земле, так что можно увидеть лишь небольшой верхний участок дуги. Когда Солнце поднимается над горизонтом выше, чем на 42°, радуга исчезает полностью. Конечно, если смотреть вниз в каньон, где есть водопад, или даже вниз на туман, образованный разбрызгивателем для полива газона, можно увидеть радугу и тогда, когда Солнце стоит высоко в небе. При должных условиях, особенно с самолета, можно увидеть все 360° радуги.

Модель для объяснения отражения, прозрачности и дисперсии. Когда свет входит внутрь стеклянной пластины, кажется, что он резко замедляется. Когда свет выходит наружу с противоположной стороны стекла, он снова распространяется со скоростью *c*. Существуют ли какие-то силы, замедляющие его в стекле? Если так, то каким образом эти силы ускоряют свет, когда он покидает стекло?

Чтобы исследовать эти проблемы хотя бы качественно, введем в рассмотрение модель света и вещества. Предположим, что вещество состоит из положительно заряженных ионов и отрицательно заряженных

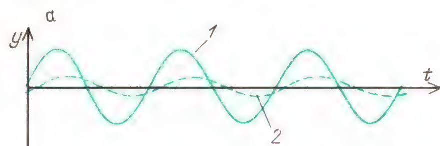


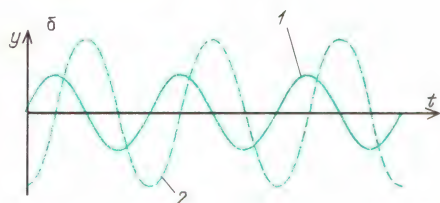
электронов, которые прикреплены к ионам как будто пружинками. Вообще говоря, будем полагать, что существенную роль играют лишь один или два электрона на каждый ион. Остальные сильно связаны с ионом или заэкранированы внешними электронами. В случае металлов пружинок нет; внешние электроны могут свободно бродить по всему кристаллу. В других веществах жесткость пружинок может быть различной, поэтому собственная частота колебаний связанного электрона может иметь разные значения.

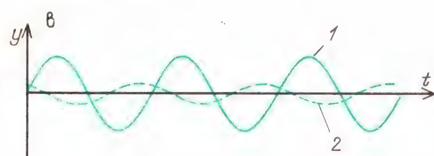
Вопрос 17-7

Такая модель выглядит как приближение к стандартной модели вещества, построенного из атомов. Известно, однако, что электроны в атомах вовсе не привязаны пружинками и что их положение и движение нужно описывать на основе квантовой механики, а не классической. Стоит ли пользоваться столь грубой моделью для взаимодействия света с веществом?

Ключ к нашей модели в том, что свет представляет собой электромагнитные колебания. Осциллирующее электрическое поле световой волны обеспечивает действующую на электрон силу и заставляет его совершать колебания. Если электрон связан подобно частице на пружине, амплитуда и фаза его вынужденных колебаний зависят от соотношения между частотой падающей волны и собственной частотой связанного электрона. Когда частота вынуждающей силы мала по сравнению с собственной частотой (рис. *а*), электрон будет следовать за вынуждающим колебанием с малой амплитудой



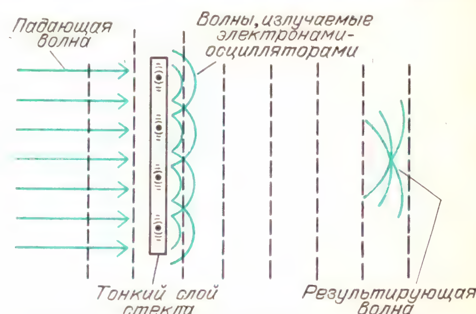




Амплитуда и фаза вынужденного движения связанных электронов при разных соотношениях между частотой вынуждающей силы и собственной частотой: *1* — вынуждающая сила, обусловленная падающим светом, *2* — вынужденное движение электрона

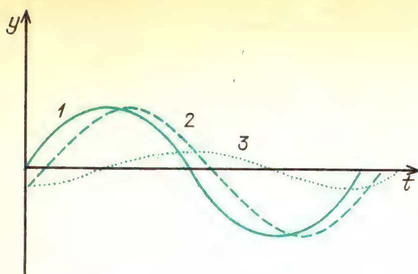
и слегка отставая по фазе. Если частота вынуждающей силы близка к собственной частоте (рис. *б*), то устанавливаются условия резонанса, когда амплитуда колебаний электрона велика, а сдвиг фаз равен 90°. Когда частота вынуждающей силы велика по сравнению с собственной частотой электрона (рис. *в*), то амплитуда колебаний последнего опять будет меньше, но они будут происходить почти в противофазе с колебаниями в вынуждающей электромагнитной волне.

До сих пор в нашей модели мы описывали вынужденные колебания электронов в веществе, когда сквозь него проходит электромагнитная волна. Следующий этап рассуждений базируется на материале, который мы изучим подробнее в главе 22. Ускоренно движущийся заряд излучает электромагнитные волны. Каждый электрон, приведенный в колебания падающей электромагнитной волной, сам становится источником



вторичных волн. *Результирующая* волна получается сложением исходной волны и всех этих новых волн. Что при этом происходит, очень трудно рассчитать количественно, но тем не менее такие расчеты выполнены и их результаты очень хорошо согласуются с опытом. Проблема здесь в том, что каждый электрон подвержен действию не только исходного излучения, но также и вкладов от всех своих соседей. Фаза каждого вклада зависит от расстояния до соответствующего соседа, а колебание последнего в свою очередь зависит от всех его соседей.

Результирующая волна на некотором расстоянии от целой плоскости электронов-осцилляторов, совершающих вынужденные колебания в одинаковой фазе, будет сдвинута по фазе на 90° относительно колебаний самих осцилляторов. (Излучение такой совокупности пропорционально *скорости* осцилляторов, а не их ускорению.) Продвигающаяся дальше электромагнитная волна состоит из исходной волны и совместного вклада от всех местных осцилляторов. Волна этих вкладов сдвинута по фазе на 90° относительно исходной волны, так как она зависит от скорости осцилляторов, плюс еще запаздывание или опережение по фазе из-за механической реакции самих электронов-осцилляторов. Результирующая волна либо отстает,



Соотношение между фазами результирующей волны и одной из элементарных волн (дающих вклад в нее) на некотором расстоянии от стекла: *1* – падающая волна, *2* – результирующая волна, немного отстающая по фазе, *3* – элементарные вклады, отстающие по фазе на 90°.

либо опережает волну, которая существовала бы в вакууме. В случае видимого света в стекле вынуждающая частота *ниже* собственной частоты связанных электронов. Из-за того, что волна вкладов от этих осцилляторов слегка задерживается по фазе, продвигающаяся волна в стекле перемещается медленнее, чем в вакууме. Как только волна покидает стекло, никаких фазовых задержек из-за местных осцилляторов уже нет и скорость волны снова равна *c*.

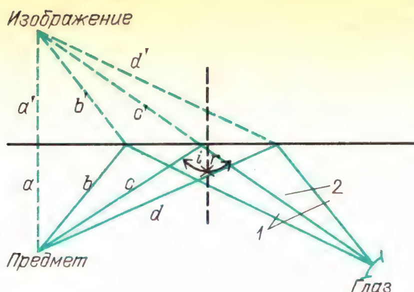
В некоторых веществах колебания связанных электронов могут приводить к другим внутренним движениям, вызывающим диссипацию исходной энергии. Такой эффект может зависеть от частоты. Например, может быть так, что энергия колебаний на частоте красного света будет превращаться в энергию хаотического теплового движения. В таком случае красный свет будет поглощаться, хотя при этом синий свет, возможно, будет передаваться без потерь.

Чем ближе частота падающего света к резонансной частоте связанных электронов вещества, тем больше запаздывание по фазе вынужденных колебаний электронов. В чистых прозрачных материалах вроде стекла часто́ты собственных колебаний электронов выше, чем часто́ты видимого света. Поэтому имеющий более высокую частоту синий свет будет ближе к собственной частоте связанных электронов и поэтому будет испытывать большее запаздывание по фазе, чем красный свет. Следовательно, скорость синего света в стекле меньше, чем красного. Однако при частотах более высоких, чем резонансная, в стекле будет происходить опережение по фазе. Это может наступить при некоторых частотах, лежащих в ультрафиолетовой или мягкой рентгеновской области. В таких областях частот фазовая скорость действительно превосходит *c*. Однако, как мы уже указывали ранее, никакую энергию или информацию нельзя посылать с такой скоростью. Групповая скорость всегда меньше, чем *c*.

Когда свет падает на гладкую металлическую поверхность, большая его часть отражается. Небольшая часть света поглощается, и совсем не передается свет в толщу металла. Электроны проводимости в металле не связаны с родительскими атомами и поэтому не имеют собственной частоты колебаний. При низких частотах в некоторых металлах, даже вплоть до частоты света, электроны проводимости свободны для мгновенной реакции на вынуждающую электромагнитную волну. Поле, которое они излучают в направлении вперед, сдвинуто по фазе на 180° и полностью компенсирует поле исходной волны, продвигающейся в металл. Это же поле, излучаемое в направлении назад, становится отраженной волной. Находящиеся вблизи поверхности большинства веществ электроны, как свободные, так и связанные, переизлучают некоторую часть падающей энергии назад, что и создает отраженный свет. Энергия падающих волн некоторых частот превращается в тепло. То, что переизлучаются избранные частоты, наполняет наш мир красками.

Принцип Ферма. Более 2000 лет назад Герон Александрийский (тот самый Герон, что изобрел реактивную паровую вертушку) доказал математически, что при отражении от плоского зеркала луч света выбирает самый короткий путь (рассматриваются только пути, ведущие от источника к детектору через отражение в зеркале). Он привел умное и, конечно, классическое доказательство. Соответствующие геометрические построения приведены на рисунке. Существенно, что изображение находится на таком же расстоянии позади зеркала, на каком находится предмет перед зеркалом, как это было показано в вопросе 17-2. Из всех лучей, выходящих из предмета и попадающих на зеркало, только один достигает наблюдателя, подчиняясь закону отражения. Угол отражения равен углу падения.

На рисунке показаны также еще два гипотетических пути, не подчиняющихся этому закону.



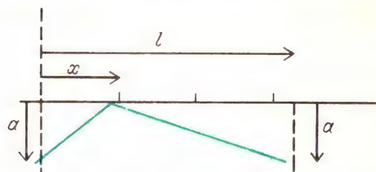
Для истинного пути угол $i = r$. Если $a = a'$, то $b = b'$, $c = c'$, $d = d'$. Кратчайшее расстояние от изображения до глаза – вдоль прямой c'. Так как $c = c'$, кратчайшее расстояние от предмета до глаза – по прямой c. 1 – гипотетические (более длинные) пути, 2 – истинный путь

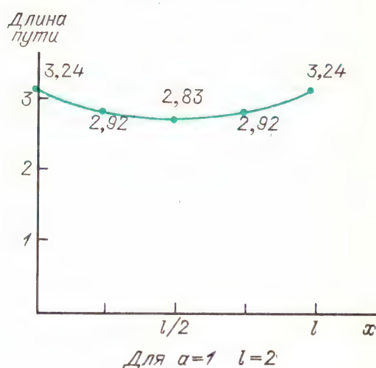
Утверждение Герона заключается в том, что истинный путь света короче, чем любой гипотетический путь. Конечно, кратчайшее расстояние от *изображения* до наблюдателя проходит вдоль прямолинейного пути. Однако благодаря симметричному расположению это расстояние равно расстоянию от *предмета* до наблюдателя. Гипотетические пути от *изображения* к наблюдателю длинее прямолинейного пути, а каждый из них равен соответствующему гипотетическому пути от *предмета* до наблюдателя.

Расстояние от предмета до зеркала и далее до наблюдателя можно выразить через общую переменную x-координату точки отражения на зеркале, показанную на верхней части следующего рисунка. В нижней части показана длина пути как функция от x. Когда наблюдатель находится на таком же расстоянии a от зеркала, путь минимален при $x = l/2$. Переменная l – это расстояние вдоль зеркала между перпендикулярами, опущенными из предмета и из точки, где находится наблюдатель.

В середине семнадцатого столетия Пьер Ферма (1608 – 1665) обобщил принцип Герона для световых лучей в различных средах, таких как стекло и воздух. Ферма трансформировал это правило от «кратчайшего пути» к «наименьшему времени». По некоторой причине свет из всех путей между двумя точками выберет тот, который требует меньшего времени по сравнению с любым другим близлежащим путем. Этот принцип может служить основой анализа и конструирования оптических приборов. Однако, как мы вскоре увидим, выбираемый светом путь в действительности дает экстремальное время – либо максимальное, либо минимальное.

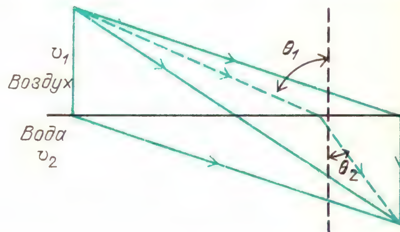
В качестве примера минимального времени рассмотрим путь (траекторию) преломленного луча, приходящего из некоторой





Длина пути для данного частного случая, где как предмет, так и глаз находятся на одинаковом расстоянии a от зеркала, равна $\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{a^2 + (l - x)^2}$

точки в воздухе в некоторую точку, находящуюся под водой. На рисунке истинный путь показан вместе с несколькими гипотетическими. Ричард Фейнман в своих «Лекциях по физике» указывает, что данная задача подобна той, с которой сталкивается служащий спасательной станции на берегу, когда он должен добраться к тонущему в воде за возможно короткое время. Спасатель может быстрее бежать по берегу, чем плыть по во-

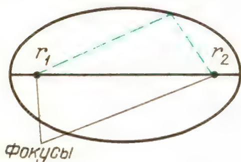


Истинный путь, которому соответствует кратчайшее время, проходит по ломаной линии. Этот путь удовлетворяет закону Снелла: $\sin\theta_1 / \sin\theta_2 = v_1/v_2$

де. Следует ли ему бежать сразу к воде и затем плыть по прямой, следует ли ему бежать по прямой к точке, лежащей против тонущего, и затем плыть кратчайшее расстояние или ему следует бежать и затем плыть, двигаясь все время по прямой между исходным положением и тонущим человеком? Ни по одному из этих путей перемещение не происходит за столь короткое время, как по пути, удовлетворяющему закону Снелла: $\sin\theta_1/\sin\theta_2 = v_1/v_2$. Этот закон справедлив как для распространения света, так и для перемещения спасателя.

Не существует простого чисто геометрического доказательства, что в этом случае перемещение, согласно закону Снелла, происходит за минимальное время*). Но можно опять выразить время через переменную x – координату точки, в которой траектория пересекает границу. Значение x, для которого время минимально, тоже дает углы, соответствующие закону Снелла.

Траектория, которую выбирает свет при распространении из одной точки в другую, не обязательно соответствует минимуму времени. Обратимся к геометрии эллипса.



Расстояние из одного фокуса до любой точки эллипса и далее до другого фокуса постоянно. Если в одном фокусе находится точечный источник света, весь его свет отразится от эллипса и пройдет через другой фокус (в случае трех измерений вместо эллипса следует взять эллипсоид вращения). Поскольку расстояние от точечного источника до любой точки эллипса и обратно до второго фокуса постоянно, то же относится и к занимаемому времени. Поэтому в данном случае световые лучи выходят из источника, достигают любой точки эллипса и затем отражаются к другому фокусу, всегда распространяясь за одно и то же время независимо от того, где они падают на поверхность эллипса.

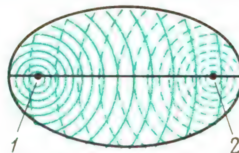
*) Здесь автор, по-видимому, не прав: простое геометрическое доказательство закона Снелла можно найти в тех же «Лекциях по физике» Р. Фейнмана, на которые он ссылается выше. (*Примеч. пер.*)

Вопрос 17-8

Значит ли это, что существуют лучи, для которых угол отражения не равен углу падения?

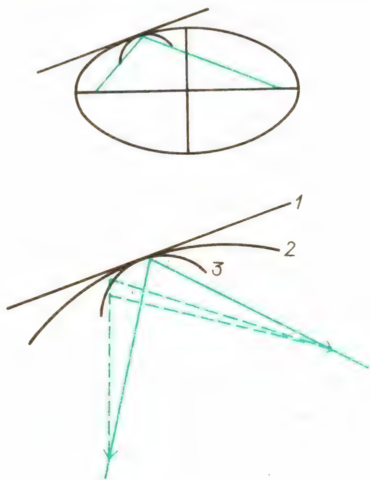
Есть еще один важный момент, связанный с равенством времен распространения света из одного фокуса эллипса в другой. Поскольку это время одинаково для всех путей, свет всегда прибывает в другой фокус в одинаковой фазе, каким бы путем он туда ни попал. Поэтому разные волны будут все усиливать друг друга во втором фокусе.

Волны, выходящие из одного фокуса *1*, отражаются в другой фокус *2*



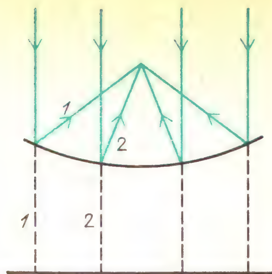
Прибытие в фазе и взаимное усиление представляет собой необходимое условие прихода волн в фокус. Воспользуемся этим требованием при анализе фокусирующих свойств зеркал и линз.

На этом рисунке показан один из лучей, отраженных внутри эллипса. В точке отражения луча проведена прямая, изображающая плоское зеркало, касающееся эллипса в этой точке. Изобразим также внутреннюю кривую, которая представляет зеркало большей кривизны. Определенный угол отражения в данной точке дает время распространения,



Альтернативные пути: равные для эллиптического зеркала *2*, бо́льшие для плоского зеркала *1*, меньшие для сферического зеркала *3*

которое *не зависит* от положения точки отражения для эллиптического зеркала, *минимально* для плоского зеркала и с очевидностью *максимально* для зеркала большей кривизны. Здесь имеем пример обобщения принципа Ферма. Время, затрачиваемое светом при распространении из одной точки в другую, либо минимально, либо максимально, либо постоянно. Во всех трех случаях это время заметно не изменяется при малых отклонениях от истинного пути.



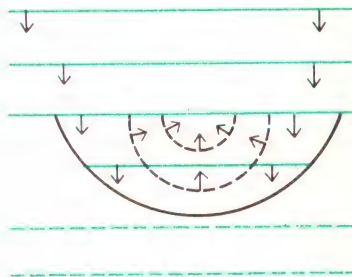
Параллельные лучи света (*1*, *2*) отражаются в фокус от параболической поверхности

ОТРАЖЕНИЕ В КРИВЫХ ЗЕРКАЛАХ

Как мы видели в «Знакомстве с явлениями», вогнутое зеркало может фокусировать световые лучи. Обычно мы представляем себе вогнутое зеркало в виде небольшого сегмента сферы. Большинство вогнутых зеркал, используемых для практических нужд, имеют сферическую форму главным образом потому, что сферу изготовить легче, нежели часть параболоида или эллипсоида. Однако неочевидно, что любая из этих искривленных поверхностей будет отражать все падающие на нее из одной точки лучи в некоторую фокальную точку.

Мы уже видели, что вследствие принципа Ферма все лучи, выходящие из одного фокуса эллипсоида, прибудут в другой фокус в одинаковой фазе. А что можно сказать о лучах, испущенных из некоторой точки, расположенной вблизи одного из фокусов? Соберутся ли все эти лучи в одну точку, находящуюся, быть может, на таком же расстоянии от второго фокуса? К сожалению, это не так, хотя, как мы увидим, с определенными ограничениями такое приближение может оказаться достаточно хорошим.

В случае астрономических телескопов свет приходит от столь удаленных объектов, что все лучи от некоторой звезды параллельны друг другу. Допустим, что нам нужно сфокусировать эти лучи в одну точку. На рисунке показаны параллельные лучи, приближающиеся к искривленной поверхности. Изображенная кривая представляет собой параболу; в трех измерениях это была бы часть параболоида. *Парабола* — это геометрическое место точек, расстояние от которых до некоторой прямой равно расстоянию до фокуса. Такое построение и показано на рисунке. Если все приближающиеся к параболе лучи параллельны друг другу, они представляют плоскую волну, которая пришла бы во все точки данной прямой в одинаковой фазе (если бы на ее пути не было искривленного зеркала). Для каждого из падающих на зеркало лучей расстояние до этой прямой равно расстоянию до фокуса. Поэтому все лучи прибудут в фокус в одинаковой фазе и усилят там друг друга. Такое соотношение фаз

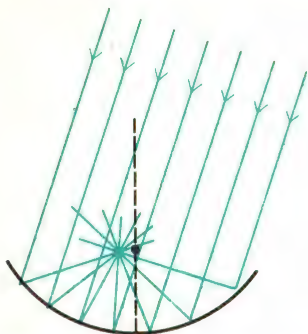


Параллельные плоские волновые фронты света отражаются от параболической поверхности так, что в фокус они прибывают в фазе друг с другом

и есть условие для получения фокуса. Детальное аналитическое или графическое исследование рассмотренного расположения показывает, что каждый луч удовлетворяет закону, согласно которому угол отражения должен быть равен углу падения.

Параболическое зеркало идеально собирает параллельный пучок света в фокус при условии, что этот свет па-

раллелен оси параболы. Что происходит, когда свет приходит от другой звезды, расположенной не на оси? Входящие лучи параллельны друг другу, как показано на следующем рисунке, но не параллельны оси. Может быть, они тоже соберутся в точечный фокус? К сожалению, нет, но если угол между лучами и осью зеркала мал, фокальная область будет очень мала, почти как точка.

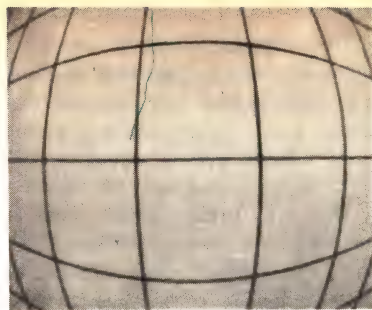


Вопрос 17-9

Чтобы сфокусировать лучи от точечного объекта, находящегося на конечном расстоянии, искривленное зеркало должно иметь форму *эллипсоида.* Чтобы сфокусировать параллельные лучи, искривленное зеркало должно иметь форму *параболоида.* Где проходит граница между этими двумя формами, если точечный объект все дальше и дальше перемещать от зеркала?

Небольшой сегмент сферического зеркала трудно отличить от небольшого сегмента параболоида или элипсоида. Фактически при стандартном методе изготовления параболического астрономического зеркала начинают со сферического зеркала и затем слегка углубляют центральную часть для превращения его в параболоид.

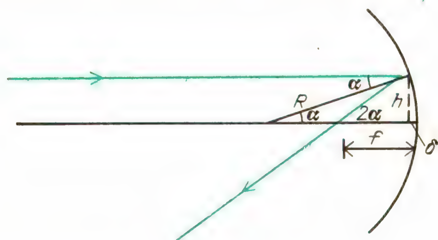
Теперь мы собираемся вывести приближенные правила, относящиеся к образованию изображений в сферических зеркалах. Эти правила справедливы, пока расстояния от лучей до оси зеркала малы по сравнению с радиусом его кривизны и пока углы между лучами и осью малы. На фотографии приведен пример того, что получается, когда



Сильная сферическая аберрация. Исходная сетка состояла из параллельных и перпендикулярных прямых

эти условия не выполнены. Такое искажение изображений называется *сферической аберрацией.*

Первое, что следует выяснить в связи со сферическими зеркалами – что происходит со светом, падающим на зеркало параллельно его оси. Поскольку малый участок сферы можно считать приближением к малому участку параболоида, можно ожидать, что такие лучи сойдутся на оси в маленькой фокальной области, если не в точке. На рисунке показано, как параллельный оси



луч отражается назад и пересекает ось зеркала. Радиус, проведенный из центра сферы, перпендикулярен к зеркалу в точке падения. Поскольку угол отражения равен углу падения и поскольку равны внутренние накрест лежащие углы между параллельными прямыми, обозначенные на рисунке одной буквой углы равны между собой. При выводе используем два приближения. Считаем, что δ мало по сравнению с f и R. Предполагаем также, что h мало по сравнению с f и R, так что $\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$ и $\operatorname{tg}2\alpha \approx 2\alpha$. Оба приближения эквивалентны условию, чтобы рассматривались только *параксиальные* лучи, т. е. лучи, проходящие вблизи оптической оси и образующие малые углы с ней. Когда это

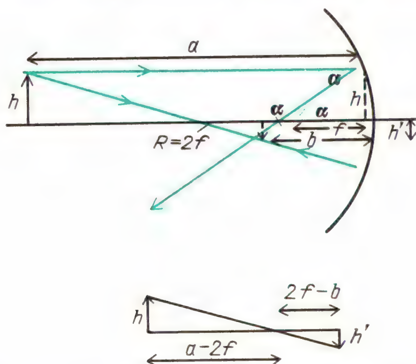
условие удовлетворено, то

$$\operatorname{tg}\alpha = h/(R-\delta),\ \operatorname{tg}2\alpha = h(f-\delta),$$

$$2h/(R-\delta) = h(f-\delta),\ f \doteq R/2.$$

Наш вывод показывает, что все параллельные оси лучи отражаются назад и проходят через фокус, который расположен на оси на расстоянии $f = R/2$ от зеркала.

Теперь нужно выяснить, что происходит с лучами, исходящими из расположенного перед зеркалом объекта. При образовании в зеркале изображения реального предмета лучи из различных точек предмета должны сходиться в соответствующих точках изображения. Каждая точка предмета испускает лучи во всех направлениях. Лишь небольшая



часть этих лучей перехватывается зеркалом и отражается назад к области, где находится изображение. На рисунках мы представляем предмет в виде небольшой стрелки. Необходимо выяснить, будут ли все лучи, исходящие из острия стрелки, сходиться в некоторой точке. Если это так, то нужно найти положение этой точки. Вместо того чтобы рисовать все лучи, выходящие из острия стрелки, начинаем с построения лишь двух из них, траектории которых нам уже известны. Первый луч параллелен оптической оси. Как мы только что видели, этот луч пересечет ось в фокусе зеркала на расстоянии f. Еще один луч, траекторию которого легко определить, проходит через центр кривизны зеркала и поэтому отражается точно назад на самого себя. Эти два луча пересекают друг друга на расстоянии b от зеркала. Хотя пока нет никакой гарантии, что все остальные лучи из острия стрелки тоже пройдут именно через эту точку, выразим расстояние b до изображения через расстояние a до объекта и фокусное расстояние зеркала f:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{f} = \frac{h'}{b-f},$$

$$\frac{h}{h'} = \frac{f}{b-f} = \frac{a-2f}{2f-b},$$

следовательно,

$$f(2f-b) = (b-f)(a-2f),$$

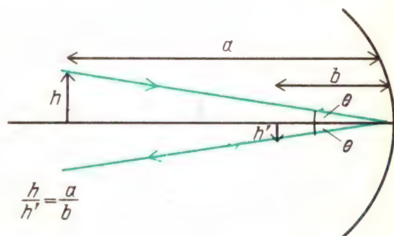
$$2f^2 - fb = ab - af - 2fb + 2f^2,$$

$$af + bf = ab.$$

Разделив последнее выражение на abf, получим окончательную формулу, которая содержит простое и симметричное соотношение между расстоянием до изображения, расстоянием до объекта и фокусным расстоянием:

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{1}{f}.$$

Теперь можно найти направления других лучей, выходящих из острия стрелки и падающих на зеркало. Можно начертить любой из них, потребовав, чтобы угол отражения был равен углу падения. Существует еще один луч, для которого это построение выполнить особенно просто. Это луч, выходящий



из острия стрелки и падающий на зеркало в точке на оси. Если этот луч также проходит через ту же самую точку-изображение, образованную двумя первыми лучами, как показано на рисунке, то должно существовать простое соотношение между высотой объекта, высотой изображения и расстояниями от объекта и от изображения. Это соотношение имеет вид

$$\frac{h}{h'} = \frac{a}{b}.$$

И обратно, если это соотношение между высотой объекта и высотой изображения согласуется с тем, что дают первые два луча, то третий луч *должен* тоже пройти через точку пересечения первых двух. В соответствии с геометрическим построением для первых двух лучей

$$\frac{h}{h'} = \frac{f}{b-f}.$$

Выразим f через расстояния до объекта и до изображения:

$$f = \frac{ab}{a+b}.$$

Поэтому

$$\frac{h}{h'} = \frac{f}{b-f} = \frac{ab/(a+b)}{b - ab/(a+b)} = \frac{ab}{ab + b^2 - ab} = \frac{a}{b}.$$

Поскольку эти геометрические соотношения согласуются друг с другом, мы показали, что третий луч тоже проходит через точку пересечения первых двух лучей.

В действительности все лучи, выходящие из острия и отраженные зеркалом, проходят через точку-изображение острия стрелки. Однако для нахождения этой точки достаточно воспользоваться только двумя из трех показанных нами главных лучей.

Итак, *главные лучи*:

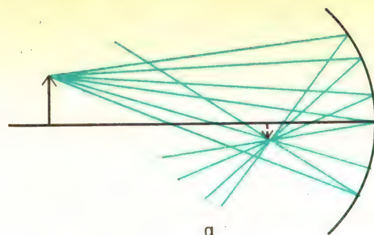
идущий параллельно оптической оси отражается через фокус;

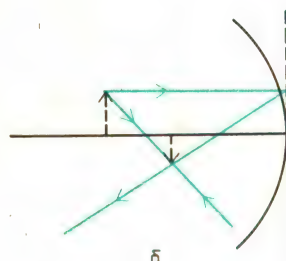
идущий через центр кривизны $R = 2f$ отражается назад, в самого себя;

направленный к центру зеркала отражается под таким же углом к оптической оси.

Использование этих главных лучей облегчает графическое построение (даже в наброске) и упрощает алгебраические выводы. Обратите внимание, что в процессе доказательства того, что все три луча проходят через одну и ту же точку, мы вывели также простое выражение для увеличения изображения. Отношение высоты изображения к высоте объекта равно

$$\frac{h'}{h} = \frac{b}{a}.$$





Все лучи из острия стрелки, отраженные зеркалом, проходят через одну и ту же точку пересечения (пока для них выполняются условия используемого приближения) (*а*); в рамках приближений, сделанных при выводе формул для сферического зеркала, удобнее чертить главные лучи так, как если бы они отражались от плоского зеркала, касающегося сферического зеркала в точке на оптической оси (*б*)

Мы проследили только за ходом лучей, выходящих из острия стрелки, но ту же самую процедуру можно использовать для любой точки стрелки. Все изображение получается в плоскости, перпендикулярной к оптической оси. Этот результат, однако, верен лишь приближенно. Для больших объектов, точки которых значительно удалены от оси, изображение не лежит в одной плоскости, и изображения далеких от оси точек будут размытыми.

Обратите внимание на характер изображения, формируемого сферическим зеркалом в том расположении, которое только что было рассмотрено. Прежде всего, это изображение перевернуто вверх ногами и меньше, чем предмет. Лучи действительно проходят через изображение, расходясь затем из него так, как если бы они исходили из светящегося предмета. Если в плоскость изображения поместить лист бумаги, это изображение можно увидеть на бумаге, как на экране для проекций. Такое изображение называется *действитель-*

ным в противоположность *мнимому* изображению, которое видят наши глаза по другую сторону плоского зеркала.

В «Знакомстве с явлениями» вы наблюдали действительное изображение, создаваемое сферическим зеркалом, отражая свет лампочки вогнутым зеркалом для бритья. Вы можете также увидеть подобное изображение, глядя в углубление блестящей ложки. Обратите внимание, что ваше изображение

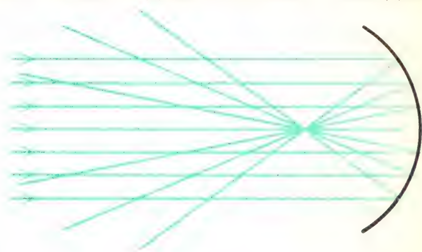
Действительное перевернутое изображение лампочки, отбрасываемое на стену вогнутой стороной зеркала для бритья. Плоская сторона создает обычное мнимое изображение человека, который держит зеркало

в ложке перевернуто. Если воспользоваться в качестве объекта острием карандаша, можно действительно добиться, чтобы изображение острия было расположено перед ложкой, и даже коснуться этого изображения самим объектом. Отметьте искажение изображения на некотором расстоянии от оптической оси углубления ложки. Конечно, углубление ложки будет лишь приближенно сферическим, но ведь и сама сфера является только приближением к правильной форме зеркала.

Теперь у нас есть два способа для нахождения положения изображений, создаваемых сферическим зеркалом. Мы можем делать наброски, используя главные лучи, или можем использовать выведенные выше простые алгебраические формулы. Используем сразу оба способа и найдем положение и размер изображений предметов, находящихся на разных расстояниях от зеркала. Вскоре увидим, что в определенных обстоятельствах расстояние до изображения b становится отрицательным. Как нам покажет набросок, это условие означает, что изображение становится мнимым и кажется расположенным по другую сторону кривого зеркала. Имея дело с зеркалами, мы должны условиться о правиле знаков, которое определяло бы смысл положительных и отрицательных расстояний. Во всех случаях будем считать расстояние положительным, если оно лежит в области, где свет действительно распространяется. Поэтому для рассмотренного до сих пор расположения все величины b, a, f и R положительны. Далее рассмотрим случай, когда R и f отрицательны. Он соответствует выпуклому зеркалу, центр кривизны которого лежит с противоположной стороны, где свет не распространяется.

Рассмотрим теперь ряд случаев формирования изображений в параксиальных лучах для разных расстояний до объекта, начиная с объекта, расположенного в бесконечности.

1. Где находится изображение, когда объект расположен в бесконечности? Если объект действительно находится

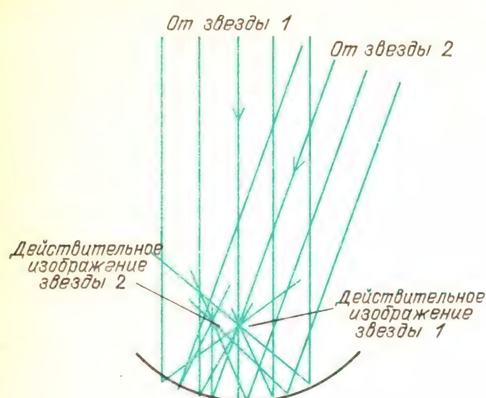


в бесконечности, все приходящие от него лучи параллельны. В таком случае все они сходятся в точке на расстоянии f от зеркала:

$$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}, \quad b = f.$$

Однако точка изображения не обязательно находится на вертикальной оси зеркала, как показано на рисунке. У сферического зеркала нет выделенной оси; любой его диаметр является осью. Если параллельные лучи приходят под углом к вертикальной оси, точка изображения будет лежать на расстоянии f на другом диаметре. Подобная ситуация встречается, когда в зеркале телескопа наблю-

дается участок звездного неба, как показано на рисунке. Лучи от каждой звезды параллельны друг другу, но не параллельны лучам, приходящим от другой

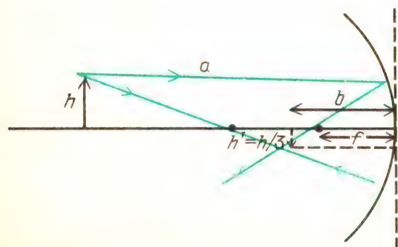


звезды. Пучки параллельных лучей фокусируются в разных точках сферической фокальной плоскости. Для параксиальных лучей эта поверхность почти плоская.

Если удаленный объект представляет собой Солнце или Луну, каждый участок объекта можно рассматривать как источник лучей, которые в пределах поперечных размеров нашего зеркала существенно параллельны. Однако лучи от верхнего края Луны не параллельны лучам от ее нижнего края. Поэтому изображение Солнца или Луны расположено на фокальной поверхности, но имеет конечные размеры.

Вопрос 17-10
Чему равно «увеличение» изображения Луны?

2. Теперь поместим объект ближе, но все же на расстояние, большее чем $2f$. Как раз такое расположение мы использовали, когда начинали разговор о кривых зеркалах. Изображение при



этом действительное перевернутое и расположено между f и $2f$. Фактически при перемещении объекта из бесконечности до $2f$ его изображение перемещается из f в $2f$.

Предположим, например, что $f = 10$ см и объект находится на расстоянии 40 см. Тогда

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{40\ \text{см}} = \frac{1}{10\ \text{см}}, \quad \frac{40 + b}{40b} = \frac{1}{10},$$

$$40b = 400 + 10b; \ 30b = 400,$$

$$b = 13{,}3\ \text{см}.$$

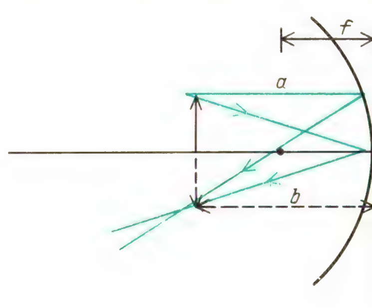
Изображение уменьшено в размерах, поскольку

$$\frac{h'}{h} = \frac{b}{a} = \frac{13{,}3\ \text{см}}{40\ \text{см}} = \frac{1}{3}.$$

3. Когда объект расположен на расстоянии $2f$ (т. е. приблизительно в центре кривизны сферы), $a = 2f$. Следовательно,

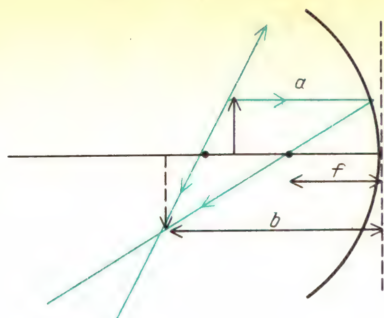
$$\frac{1}{b} + \frac{1}{2f} = \frac{1}{f}, \ b = 2f.$$

Как легко видеть из формул и из рисунка, при $a = 2f$ расстояние до изображения равно расстоянию до объекта.



Изображение действительное и перевернутое, но имеет такой же размер, как и объект. Когда вы получаете изображение острия карандаша в блестящей ложке и затем прикасаетесь к изображению острия реальным острием карандаша, как объект, так и его изображение оба находятся в центре кривизны углубления ложки.

4. При перемещении объекта из $2f$ в f его изображение перемещается из $2f$ в бесконечность. Изображение остается действительным и перевернутым, но



больше по размерам, чем объект, поскольку $b > 0$.

5. Если объект находится в фокусе f, его изображение расположено в бесконечности. Это стандартное расположение для карманных фонарей, автомобильных фар и прожекторов. Объектом служит светящаяся нить накала, центрированная на оси в фокальной плоскости и сделанная по возможности небольшой и яркой. Как мы видели, точечный источник в фокусе параболоида создавал бы параллельный пучок; следовательно, его изображение было бы в бесконечности:

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{f} = \frac{1}{f}, \quad b = \infty.$$

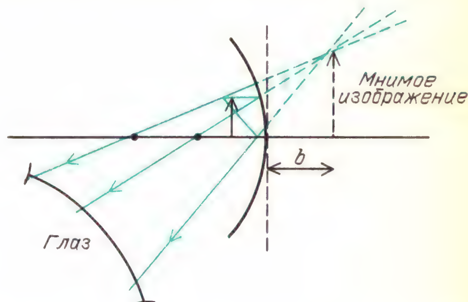
Но на практике точечный источник имел бы нулевую интенсивность. Нить накала должна иметь ненулевую площадь поверхности, и поэтому условие фокусировки не позволяет получить параллельный пучок. Чем больше размеры вогнутого зеркала по сравнению с размерами нити накала, тем лучше выполняется это приближение. Чтобы увидеть разницу между параболическим и сферическим зеркалами, рассмотрите автомобильную фару. Отчетливо видно, что ее рефлектор глубже, чем сферическая поверхность.

6. Далее, мы должны придвинуть объект еще ближе к зеркалу. Для зеркала с $f = 10$ см поместим объект на расстоянии $a = 5$ см. В соответствии с нашим алгебраическим уравнением

$$\frac{1}{5\ \text{см}} + \frac{1}{b} = \frac{1}{10\ \text{см}},$$

$$2b + 10 = b, \quad b = -10\ \text{см}.$$

Расстояние до изображения равно $b = -10$ см. В соответствии с принятым нами соглашением, положительные расстояния расположены с той стороны от зеркала, где действительно распространяется свет. Отрицательное расстояние откладывается с противоположной стороны. Изображение будет мнимым подобно изображению в плоском зеркале. Обратите внимание, как на рисунке построены главные лучи в соответствии со



сформулированными выше правилами. Эти лучи после отражения в зеркале расходятся и не пересекаются ни в одной точке пространства. Если, однако, эти расходящиеся лучи попадают в наши глаза, мы воспринимаем их точно так же, как если бы они расходились от объекта, расположенного по другую сторону зеркала. На рисунке эти лучи продолжены назад к той точке, из которой они кажутся расходящимися. Совокупность таких точек мы воспринимаем как мнимое изображение. Отметьте, что оно находится позади зеркала, не перевернуто и больше, чем объект. Изображение такого типа мы видим в обычном сферическом зеркале для бритья.

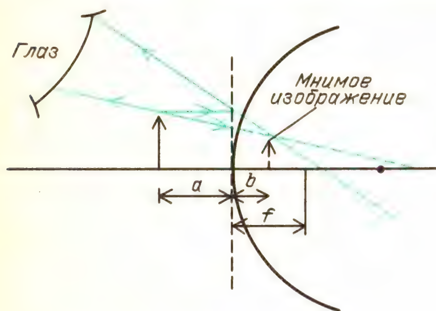
Вопрос 17-11

Когда мы смотрим в вогнутую сторону блестящей ложки, то видим перевернутое изображение своего лица. Когда мы смотримся в вогнутое зеркало для бритья, то видим свое увеличенное неперевернутое изображение. Почему получаются два столь различных эффекта?

7. Существует еще один тип сферических зеркал, которые обычно дают только мнимые изображения. Увидеть пример такого зеркала можно опять с помощью блестящей ложки. Если

ложку перевернуть выпуклой стороной к себе, вы увидите свое изображение прямым и расположенным по другую сторону ложки. В данном случае в соответствии с принятым соглашением радиус кривизны зеркала и, следовательно, его фокусное расстояние отрицательны. Наша основная формула, связывающая расстояния до объекта и до изображения, по-прежнему применима. Более того, мы опять можем использовать главные лучи для нахождения положения изображения.

Возьмем для анализа выпуклое зеркало с фокусным расстоянием, равным



-10 см. Поместим объект перед зеркалом на расстоянии 10 см, тогда

$$\frac{1}{10\ \text{см}} + \frac{1}{b} = \frac{1}{-10\ \text{см}},$$

$$b + 10 = -b,\ b = -5\ \text{см}.$$

Расстояние до изображения отрицательно. Это значит, что мнимое изображение расположено за зеркалом. Изображение получается меньше, чем объект, в данном случае его высота наполовину меньше. Фактически изображение в выпуклом зеркале всегда должно быть меньше, чем объект. Чтобы убедиться в этом, найдем расстояние до изображения в общем случае:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{f}.$$

Поставив в правой части знак минус, считаем здесь f положительным числом. Итак,

$$fb + af = -ab,\ b(f + a) = -af,$$

$$b = -\frac{af}{a + f},\ \frac{b}{a} = -\frac{f}{a + f}.$$

Увеличение, выражаемое отношением b/a, для выпуклого зеркала всегда меньше единицы. Отрицательный знак показывает, что это изображение мнимое и прямое.

Обратите внимание, что при проведении главных лучей в случае выпуклого зеркала в действительности все лучи распространяются с левой стороны зеркала. Направление распространения луча, параллельного оси, после отражения находится с помощью его продолжения назад, за зеркало в мнимый фокус. То же самое справедливо для луча, перпендикулярного к поверхности зеркала и поэтому отражающегося назад по своему прежнему пути. Если этот луч продолжить за зеркало, он пройдет через точку $2f$.

Выпуклые зеркала часто используются как боковые зеркала заднего вида, особенно на грузовых автомобилях. Они могут охватить вид под большим углом зрения и представить его мнимое уменьшенное изображение.

Фокусировку волн при отражении от искривленных поверхностей можно также увидеть в случае волн на поверхности воды и услышать в случае звуковых волн. Налейте воду в любой цилиндрический сосуд и создайте круговые поверхностные волны, периодически погружая в воду палец. Волны будут отражаться от стенок и сходиться снова. Если сосуд круговой и вы погружаете палец в его центре, отраженные волны сфокусируются назад в центр. Если возбуждать поверхностные волны в точке, находящейся между центром и стенкой, отраженные поверхностные волны бу-

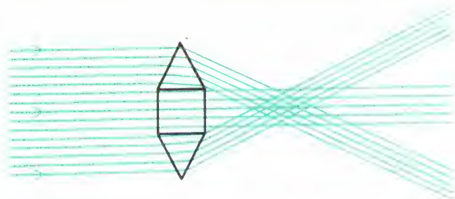
Сходящийся волновой импульс, получившийся из круговой волны, которая расходилась от места падения капли из трубки

дут сходиться в грубом фокусе в симметричной точке на противоположной стороне от центра. Этот эффект служит приближением к тому, что произошло бы в случае сосуда с эллиптическими стенками, если бы в нем вы погружали палец в одном из фокусов.

Существует много знаменитых «шепчущих» галерей, таких, как Молельня мормонов в Солт Лэйк Сити и Столичный собор в Вашингтоне. Обычно они возникают в больших залах со сводчатым потолком. В некоторых случаях форма свода оказывается приближением к половине эллипсоида. Находясь в одном из фокусов, вы можете слышать слова, произносимые шепотом в другом фокусе, даже когда он находится далеко. Расширяясь вверх, звуковые волны отражаются от потолка и снова сходятся в дальнем фокусе.

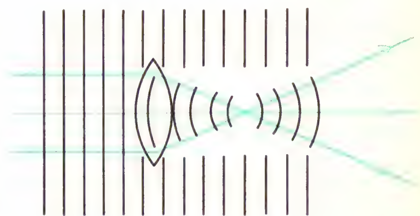
ОБРАЗОВАНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ В ЛИНЗАХ

Изображения можно получать как с помощью отражения, так и с помощью *преломления*. С помощью показанных на рисунке призм параллельные лучи сходятся в грубый фокус. Если бы



линза была образована бесконечным числом призм, каждая из которых вырезана под должным углом, оказалось бы возможным отклонить каждый из параллельных лучей в одну и ту же точку на оси. Будет ли такая линза иметь простую форму, сразу не очевидно. Более того, не очевидно, что линза, фокусирующая параллельный свет, будет также создавать изображение объекта, находящегося на конечном расстоянии. Если бы форму линз приходилось рассчитывать заново для каждого положения объекта, линзы вряд ли нашли бы практическое применение. Как мы увидим, существует практическое решение проблемы конструирования линз, как это было и в случае зеркал. Здесь шлифовкой легче всего получить тоже сферическую поверхность. Большинство простых линз имеют сферические поверхности, хотя объективы, используемые в фотоаппаратах или оптических приборах, представляют собой составные линзы, состоящие из большого числа простых линз разной кривизны и с различными оптическими свойствами.

Один из возможных способов расчета линзы состоит в том, чтобы следить за преломлением каждого луча при входе в линзу и при выходе из нее, используя закон Снелла для нахождения пути луча. Еще один способ, действительно лежащий в основе некоторых методов расчета линз, состоит в использовании принципа Ферма. Если свет сходится в фокус после прохождения по разным путям, все участки волны должны прибыть туда в одинаковой фазе, чтобы усилить друг друга в фокусе. Поэтому все пути должны занимать одинаковое время. Посмотрите на приведенный здесь рисунок простой линзы. Поскольку падающие лучи параллельны друг

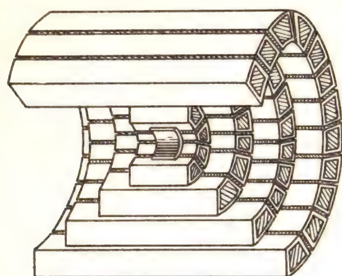


другу, они представляют плоские волновые фронты. Весь свет при входе в линзу имеет одинаковую фазу.

Вопрос 17-12
Посмотрите внимательней на этот рисунок. Ясно, что лучу, приходящему из верхней части линзы, приходится преодолевать до фокуса большее расстояние, нежели лучу, распространяющемуся вдоль оси. Поэтому как эти лучи могут оказаться в одинаковой фазе по прибытии в фокус?

Стеклянная линза для фокусировки параллельного пучка видимого света в середине должна быть толще, чем по краям. На этом рисунке показана линза,

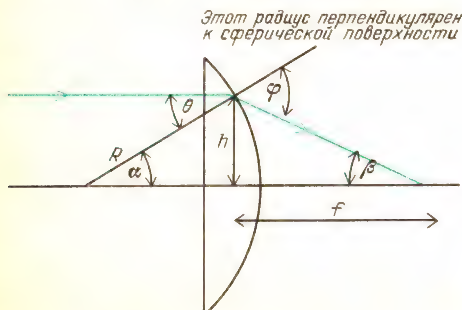
которая собирает параллельный пучок микроволн в некоторый фокус. Такая линза образована металлическими каналами – волноводами. Отметьте, что она



тоньше в середине, чем по краям. *Фазовая* скорость микроволн в подобном канале больше, чем c. Поэтому микроволны, проходящие сквозь каналы по краям линзы, затрачивают в линзе меньше времени и прибывают в фокус в одинаковой фазе с лучами, прошедшими вдоль оси, несмотря на то, что пришлось преодолеть большее расстояние.

Дополнительный материал

Поскольку большинство используемых на практике линз изготавливается со сферическими поверхностями, посмотрим, что делает такая линза с параллельными лучами. Выполняя геометрическое построение лучей, увидим характер приближения, которое мы делаем, принимая, что все лучи фокусируются в одну точку. Такое построение показано на рисунке. Поскольку линза плосковыпуклая (ее передняя поверхность плоская; вторая сторона искривлена так, чтобы линза собирала лучи), нам не нужно беспокоиться о преломлении на первой поверхности. Параллельные лучи остаются параллельными, когда они входят в линзу. Преломление на



искривленной поверхности подчиняется закону Снелла, в котором угол преломления φ больше, чем угол падения θ, поскольку луч переходит из стекла в воздух.

В нижеследующем анализе мы начинаем с точных выражений, в которых затем производим приближенные преобразования. Чтобы эти приближения были справедливы, углы должны быть достаточно малыми, так чтобы синус и тангенс любого угла был бы приближенно равен самому углу. Более того, предполагаем, что линза настолько тонкая, что можно пренебречь ее толщиной по сравнению с фокусным расстоянием. Логика этого вывода заключается в том, чтобы начать с закона Снелла, выраженного в терминах θ и φ, а затем исключить θ и φ с помощью подстановок, вовлекающих радиус кривизны поверхности линзы R и фокусное расстояние f. Итак,

$$n\sin\theta = \sin\varphi,\ n\theta \approx \varphi, \quad \theta = \alpha,\ \varphi = \alpha + \beta,$$

следовательно,

$$n\alpha \approx \alpha + \beta, \quad \sin\alpha \approx \alpha \approx \frac{h}{R},$$

$$(n-1)\alpha \approx \beta,\ (n-1)\frac{h}{R} \approx \beta,$$

$$\operatorname{tg}\beta \approx \beta \approx \frac{h}{f},\ (n-1)\frac{h}{R} \approx \frac{h}{f},$$

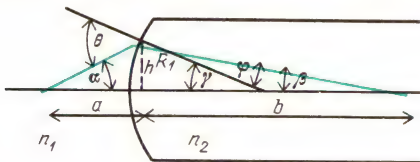
$$\frac{1}{f} = (n-1)\frac{1}{R},\ f = \frac{R}{n-1}.$$

Как можно видеть, этот вывод дает фокусное расстояние, не зависящее от угла θ (или α), а это означает, что все входящие в линзу параллельные лучи фокусируются в одной точке на оси линзы. Помните, однако, что это заключение справедливо лишь до тех пор, пока остаются в силе сделанные приближения. Сферическая аберрация возрастает для лучей, сильно удаленных от оси.

Обратите внимание на соотношение, существующее между фокусным расстоянием линзы, радиусом ее кривизны и показателем преломления. Если показатель преломления стекла равен 1,5, то фокусное расстояние плосковыпуклой линзы равно удвоенному радиусу кривизны. Чем меньше этот радиус, тем более выпукла линза и тем больше ее толщина в середине по сравнению с краями. Как подсказывает нам интуиция, фокусное расстояние такой линзы должно быть меньше. Чем больше также показатель преломле-

ния при данной кривизне, тем меньше фокусное расстояние.

Наш следующий шаг – показать, что исходящий из точки *на оси* сферической линзы свет будет отклоняться в фокальную точку, лежащую по другую сторону линзы. Рассуждения проведем в два этапа. Во-первых, проследим за ходом лучей, выходящих из точки



Расстояние b не зависит от угла α. Все лучи (удовлетворяющие условию малых углов), выходящие из точки на оси, приходят в одну и ту же точку-изображение

на оси в воздухе и входящих в длинный кусок стекла с искривленной поверхностью. Вопрос заключается в следующем: собирает ли одна сферическая поверхность этот свет в фокус внутри стекла; если так, то где он расположен? Последовательность шагов, по существу, такая же, как при изучении плосковыпуклой линзы. Однако здесь фигурирует еще один угол. Отдельные шаги, их мотивировка и используемые приближения приведены ниже. Снова наша цель заключается в том, чтобы исключить θ и φ, выразить их через расстояния до объекта a, до изображения b и через радиус кривизны поверхности R. Здесь требуются те же приближения, что и в предыдущем выводе.

Итак,

$$n_1 \sin\theta = n_2 \sin\varphi,$$

следовательно,

$$n_1\theta \approx n_2\varphi, \quad \frac{h}{a} = \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha, \quad \theta = \alpha + \gamma,$$

$$\frac{h}{b} = \operatorname{tg}\beta \approx \beta, \quad \gamma = \varphi + \beta,$$

$$\frac{h}{R_1} = \sin\gamma \approx \gamma, \quad \varphi = \gamma - \beta;$$

$$n_1(\alpha + \gamma) = n_2(\gamma - \beta),$$

$$n_1\alpha = (n_2 - n_1)\gamma - n_2\beta,$$

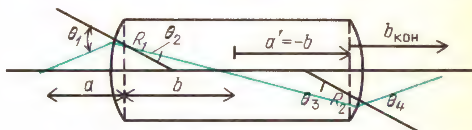
$$n_1\frac{h}{a} = (n_2 - n_1)\frac{h}{R_1} - n_2\frac{h}{b},$$

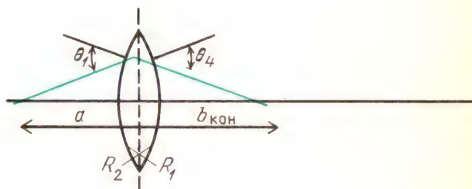
$$\frac{n_1}{a} = (n_2 - n_1)\,\frac{1}{R_1} - \frac{n_2}{b},$$

$$\frac{n_2}{b} = \frac{(n_2 - n_1)}{R_1} - \frac{n_1}{a} = \frac{(n_2 - n_1)a - n_1R_1}{aR_1},$$

$$b = \frac{an_2R_1}{(n_2 - n_1)a - n_1R_1}.$$

Рассмотренные лучи соберутся в фокус, лежащий внутри длинного куска стекла. Предположим, что стекло имеет достаточную длину, чтобы лучи могли пройти через фокус и достичь второй поверхности линзы *на том же расстоянии от оси*, на каком они входили. Ход лучей в таком длинном стекле





Длинная и тонкая линзы эквивалентны (за исключением переворачивания сверху вниз), если лучи выходят из второй поверхности на такой же высоте, на какой они входили через первую поверхность

после фокуса будет просто обращением хода лучей до фокуса, перевернутым вверх ногами относительно оси. Каждый из лучей образовал бы такой же угол со второй поверхностью и в том случае, если бы вторая поверхность находилась сразу же после первой поверхности. Покидая вторую поверхность, лучи направлены так, как если бы они выходили из объекта, находящегося внутри стекла на расстоянии $-a$. Тогда для второго этапа можно использовать ту же формулу, что была выведена для первого этапа. Нужно лишь поменять местами показатели преломления, чтобы учесть тот факт, что теперь лучи переходят из стекла в воздух, и в качестве нового расстояния до объекта нужно подставить взятое с противоположным знаком расстояние до изображения, рассчитанное на первом этапе.

Применим предыдущую формулу к лучам, проходящим через внутренний фокус, который рассматривается в качестве нового

объекта:

$$\frac{n_2}{a_{\text{внутр}}} = (n_1 - n_2)\ \frac{1}{R_2} - \frac{n_1}{b_{\text{кон}}},$$

$$a_{\text{внутр}} = -b_{\text{нач}} = -\ \frac{an_2R_1}{(n_2 - n_1)\,a - n_1R_1},$$

$$-\ \frac{(n_2 - n_1)\,a - n_1R_1}{aR_1} = \frac{n_1 - n_2}{R_2} - \frac{n_1}{b},$$

$$-\ \frac{n_2 - n_1}{R_1} + \frac{n_1}{a} = \frac{n_1 - n_2}{R_2} - \frac{n_1}{b},$$

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{n_2 - n_1}{n_1}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Для объекта в бесконечности $b = f$, поэтому

$$\frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Для вакуума и приближенно для воздуха $n_1 = 1$, следовательно,

$$\frac{1}{f} = (n - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Это уравнение необходимо знать при изготовлении тонких линз.

Вопрос 17-13

Согласуется ли фокусное расстояние такой двояковыпуклой линзы с результатом, который был получен ранее для плосковыпуклой линзы?

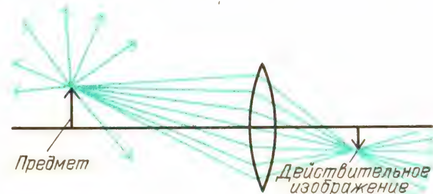
Обратите внимание на решающий момент в формуле для фокусного расстояния двояковыпуклой линзы. Знак R_1 должен быть противоположен знаку R_2 (в противном случае при $R_1 = R_2$, что имеет место для многих линз, эта формула давала бы $f = \infty$). Соглашение о знаках для линз требует, чтобы расстояния до объекта и до изображения были положительны, если они расположены там, где свет действительно распространяется. Как мы вскоре увидим, отрицательное расстояние до изображения подразумевает мнимое изображение. У двояковыпуклых линз R_1 положительно, потому что центр кривизны первой поверхности расположен в положительной стороне оси. Однако у второй искривленной поверхности центр кривизны расположен в отрицательной стороне оптической оси; поэтому R_2 отрицательно. Эта формула, связывающая фокусное расстояние тонкой линзы с показателем преломления и радиусами кривизны преломляющих поверхностей, называется уравнением изготовителя линз. ■

Основная формула, выведенная выше для связи между расстояниями до объекта, до изображения и фокусным расстоянием, одинакова как для линзы, так и для сферического зеркала:

$$1/a + 1/b = 1/f.$$

Существует и соответствующее родство в деталях формирования изображений в линзах и зеркалах. Одну общую черту мы уже видели. Если объект находится в бесконечности, приходящие от него лучи параллельны. Как в случае зеркала, так и в случае линзы результирующее изображение находится на расстоянии f от зеркала или линзы. Отметьте в формуле линзы, что при $a = \infty$ $b = f$. Такой же результат мы вывели и в простом случае плосковыпуклой линзы.

Проследим за ходом лучей через линзу от объекта к его изображению. Считаем, что каждая точка объекта испускает лучи во всех направлениях, как показано на рисунке. Сквозь линзу

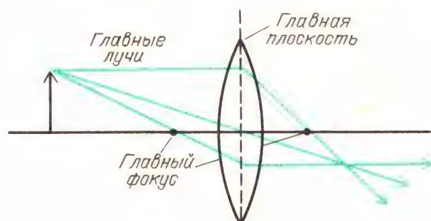


пройдет небольшой конус этих лучей. На каждой из ее поверхностей лучи преломляются в соответствии с законом Снелла и проходят через точку-изображение, лежащую с противоположной стороны от линзы, если только изображение не оказывается мнимым. К изучению ситуации с мнимыми изображениями обратимся позже. Как и в случае зеркал, здесь существуют главные лучи, поведение которых легко предсказать. Луч, который шел параллельно оптической оси, пересечет эту ось с другой стороны от линзы в главном фокусе. Луч, проходящий через главный фокус на ближней стороне линзы, выйдет из линзы на дальней стороне параллельно оптической оси. Луч, проходящий через центр тонкой линзы, не отклоняется.

Середина линзы, по существу, представляет собой плоскопараллельную стеклянную пластинку. Лучи, проходящие через плоскопараллельную стеклянную пластинку, преломляются как на входе, так и на выходе, но угол выхода

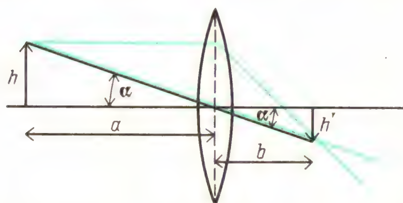
равен углу входа. Хотя угловое направление луча не изменяется, его положение оказывается слегка смещенным. Когда линза тонкая и лучи параксиальны, этот эффект пренебрежимо мал. (Когда лучи не параксиальны, сферические поверхности все равно не дают хорошего фокуса.)

Как показано на рисунке, все три главных луча пересекаются в одной точке. Детальные расчеты или тщательное вычерчивание с соблюдением масштаба



показало бы, что все другие лучи, выходящие из той же точки объекта, пересеклись бы в той же самой точке изображения. Когда мы чертим эти главные лучи, то предполагаем, что все преломления происходят в плоскости, проходящей через середину линзы. На набросках эти линии легко проводить с точностью, достаточной для приближенного нахождения размеров и положения изображения.

Для каждой точки объекта существует соответствующая точка изображения в плоскости, находящейся на расстоянии b от линзы. Это изображение действительное и перевернутое. Лучи в самом деле сходятся на изображении, и его можно увидеть на экране, помещенном в это место. Увеличение изображения легко подсчитать с помощью геометрического построения, показанного на рисунке. Рассмотрим

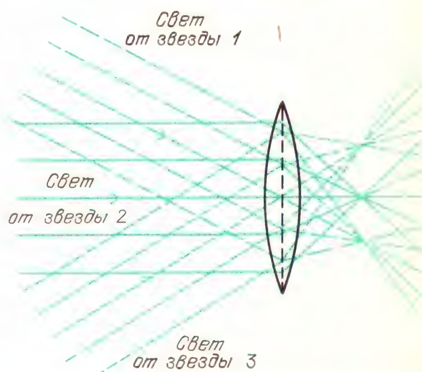


треугольники, образованные прямой, проходящей через центр линзы к вершинам объекта и изображения, самой оптической осью, и объектом и его изображением. Эти треугольники подобны. Поэтому увеличение равно

$$\frac{h'}{h} = \frac{b}{a}.$$

Теперь используем и формулу, и рисунки для анализа разных типов изображений, которые можно создавать с помощью тонкой линзы.

1. Мы уже видели, что́ получается, когда объект находится в бесконечности и параллельные лучи входят в линзу вдоль ее оси. Эти лучи фокусируются в точку, лежащую на оси на расстоянии f. Когда лучи от удаленного объекта параллельны друг другу, но не параллельны оптической оси, они сойдутся во внеосевую точку-изображение, лежащую приблизительно в плоскости, проходящей на расстоянии f. В случае параксиальных лучей можно считать, что все фокальные точки лежат в одной плоскости. Определенную точку фокальной плоскости, где сходятся эти параллельные лучи, можно найти, проследив за лучом, проходящим через центральную точку линзы, как показано на рисунке. Свет, приходящий от нескольких



Видно, что лучи, приходящие от звезд 1 и 3, не параксиальны. (Углы преувеличены, чтобы рисунок был яснее.)

звезд, состоит из пучков параллельных лучей. Лучи от каждой звезды параллельны друг другу, но не обязательно параллельны оси линзы. Каждый пучок сходится в отдельную точку фокальной плоскости. (Не забывайте, однако, что каждый фокус на самом деле представляет собой дифракционное изображение с угловым радиусом $1{,}2\lambda/d$, где d – диаметр линзы.) Звезды находятся

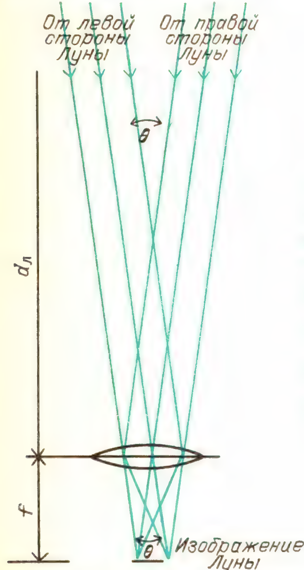
так далеко от нас, что их геометрические изображения были бы меньше, чем дифракционное изображение точки; поэтому нельзя получить никакого увеличения изображения звезды. При изучении устройства и применения телескопов нам придется объяснить, зачем нужен телескоп, если он не дает увеличения.

Формула линзы в случае объекта, удаленного в бесконечность, дает

$$\frac{1}{\infty}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}.$$

Поэтому $b=f$.

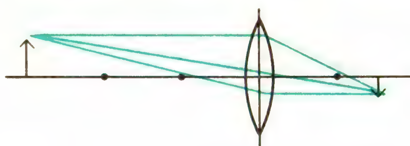
Как мы указывали для сферического зеркала, изображение Луны в собирательной оптической системе представляет собой диск, а не точку. Лучи от левой стороны Луны входят в линзу под иным углом, нежели лучи от правой стороны.



Угловой размер Луны θ, видимый из места расположения линзы, равен угловому размеру изображения, если на него смотреть из центра линзы

Очевидно, что создаваемое линзой изображение Луны много меньше самой Луны. Однако *угловой* размер изображения такой же, как и угловой размер самого объекта, видимый из места расположения линзы. Этот угловой размер показан на рисунке. Угловой размер объекта равен отношению диаметра объекта к расстоянию до него. Тогда действительный диаметр (ширина) изображения равен произведению его угловой ширины и фокусного расстояния линзы. Чем больше фокусное расстояние, тем больше диаметр изображения.

2. Когда расстояние до объекта больше $2f$, но не бесконечно велико, то расстояние до изображения меньше $2f$, но больше f. На рисунке показаны



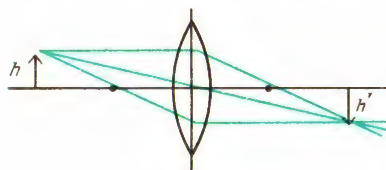
главные лучи для объекта, находящегося на расстоянии 30 см от линзы с фокусным расстоянием 10 см. Изображение находится между f и $2f$, оно действительное и перевернутое. В соответствии с формулой линзы

$$\frac{1}{30\ \text{см}}+\frac{1}{b}=\frac{1}{10\ \text{см}},$$

$$b+30=3b,\ b=15\ \text{см}.$$

Изображение меньше, чем объект: $M=h'/h=b/a=15/30=1/2$.

3. Когда объект находится на расстоянии $2f$, его изображение будет тоже

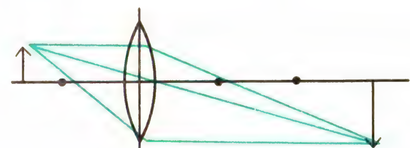


на расстоянии $2f$. Формула для линзы с $f=10$ см дает

$$\frac{1}{20\ \text{см}}+\frac{1}{b}=\frac{1}{10\ \text{см}},\ b=20\ \text{см}.$$

Изображение действительное, перевернутое и имеет такой же размер, как и объект.

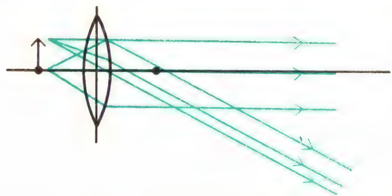
4. Когда объект находится между $2f$ и f, его изображение находится между $2f$ и бесконечностью. Изображение



остается действительным и перевернутым, но по размеру больше, чем объект, так как $b/a>1$.

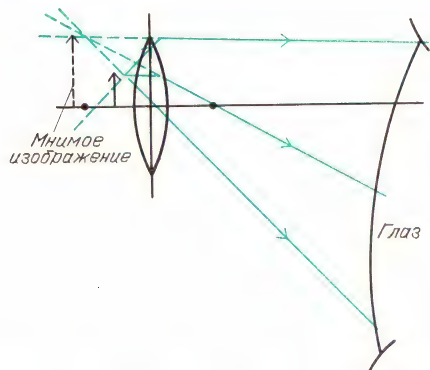
5. *Точечный* объект, расположенный на оптической оси в главном фокусе,

создает по другую сторону линзы параллельный пучок лучей. Объект конечных размеров, помещенный в фокальную плоскость, создает по другую сторону расходящиеся лучи, но эти лучи не формируют изображения. Лучи из



каждой точки объекта образуют пучок параллельных лучей. Направление этих лучей различно для каждой точки объекта.

6. Когда объект расположен у линзы в пределах ее фокусного расстояния, никакого действительного изображения не возникает. Мы по-прежнему можем использовать для построения главные лучи, но теперь эти лучи расходятся с дальней стороны линзы. Один из трех главных лучей нужно чертить способом, несколько отличающимся от использованного в предыдущих случаях. Луч из острия стрелки, проходящий через находящийся с той же стороны линзы главный фокус, в данном случае, очевидно, не пройдет через линзу. Однако луч, выходящий из острия стрелки так, как если бы он выходил из левого главного фокуса, после преломления в линзе пойдет параллельно оптической оси. Как видно из рисунка, все эти три луча,



если их продолжить назад в левую сторону от линзы, встречаются в точке мнимого изображения. Глаз или объектив фотоаппарата, находящийся справа от этой системы, перехватив эти расходящиеся лучи, интерпретировал бы их как лучи, исходящие из некоторого объекта, расположенного слева от линзы. Образуемое этими расходящимися лучами мнимое изображение не перевернуто и больше, чем объект.

Найдем положение этого мнимого изображения, когда объект находится на расстоянии 5 см от линзы с фокусным расстоянием 10 см:

$$\frac{1}{5\ \text{см}} + \frac{1}{b} = \frac{1}{10\ \text{см}},\quad 2b + 10 = b,$$

$$b = -10\ \text{см}.$$

Знак минус указывает, что изображение мнимое и расположено на стороне линзы, противоположной той, где проходят лучи, фактически его образующие. Увеличение изображения равно

$$M = \frac{b}{a} = \frac{10}{5} = 2.$$

Когда линза используется в таком расположении, она может служить лупой для чтения или увеличительным стеклом. Хорошо, что в данном случае изображение мнимое, потому что было бы неудобно рассматривать в увеличительном стекле перевернутые вверх ногами изображения. Когда лупа используется для получения максимального увеличения и также максимального поля зрения, ее располагают ближе к глазу, а не к объекту. Пользуясь лупой, обратите внимание, что она позволяет вам расположиться гораздо ближе к объекту. В действительности увеличение достигается именно благодаря этому обстоятельству. Когда нужно рассмотреть мелкий предмет, вы подсознательно придвигаетесь как можно ближе к нему. Предмет виден лучше, когда он у вас в руках, а не на другом конце комнаты. Чем ближе к объекту расположен ваш глаз, тем больше видимый глазом угловой размер объекта.

Вопрос 17-14

Если вы в самом деле хотите рассмотреть детали мелкого предмета, почему бы не держать его на расстоянии всего около 1 см от глаза?

Подсчитаем увеличение лупы, если изображение должно находиться на расстоянии 25 см:

$$-\frac{1}{25\ \text{см}}+\frac{1}{a}=\frac{1}{f},$$

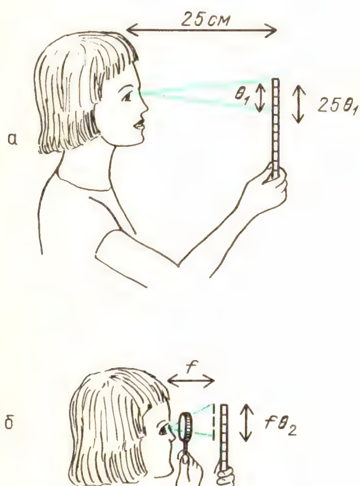
$$-af+25f=25a,$$

$$25f=a(25+f),\ \ a=\frac{25f}{25+f}.$$

Здесь a и f выражены в сантиметрах. Увеличение, как обычно, дается выражением

$$\frac{b}{a}=\frac{25}{25f/(25+f)}=\frac{25+f}{f}=1+\frac{25}{f}.$$

При наводке на резкость лупы (или окуляра оптического прибора, что в сущности одно и то же) нет необходимости получать изображение точно на расстоянии 25 см, тем более, что это минимальное комфортное расстояние изменяется от человека к человеку. Иногда для продолжительных наблюдений удобнее получать изображение в бесконечности. Такое изменение очень мало сказывается на видимом размере изображения. Чтобы получить изображение в бесконечности, расположите вооруженный лупой глаз достаточно близко к объекту, чтобы объект оказался почти в фокусе линзы (если $b=\infty$, то $a=f$). В таких условиях угловое увеличение дается отношением расстояния от глаза до объекта при рассматривании невооруженным глазом к этому же расстоянию при использовании лупы. Для невооруженного глаза обычное расстояние наилучшего зрения равно 25 см, поэтому увеличение лупы равно $25/f$.



Угловой размер объекта при рассматривании невооруженным глазом равен θ_1 (*а*), при рассматривании через лупу – θ_2 (*б*). Размер объекта равен $25\theta_1 = f\theta_2$, увеличение равно $M = \theta_2/\theta_1 = 25/f$

Вопрос 17-15

Какое увеличение можно получить, используя лупу с фокусным расстоянием 5 см? К каким различиям ведет получение изображения на расстоянии 25 см или в бесконечности?

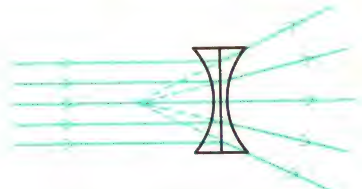
Сильно близорукий человек испытывает множество затруднений как в очках, так и без очков, но в одной ситуации он получает громадное преимущество. Чтобы рассмотреть мелкий предмет, ему нужно лишь снять очки и поднести предмет на удобное для рассматривания расстояние. Если, например, это расстояние равно 8 см, то получается примерно трехкратное увеличение за счет того, что близорукий глаз как бы снабжен встроенной лупой.

7. До сих пор мы имели дело только с собирающими линзами. Они не обязательно должны иметь две выпуклые поверхности. Мы уже изучили случай плосковыпуклой линзы, у которой одна сторона плоская. До тех пор пока середина линзы толще, чем края, линза будет сводить параллельные лучи в некоторый фокус. Если же в середине линза тоньше, чем по краям, она будет превращать параллельные лучи в *расходящиеся*. Два примера таких линз показаны на рисунке, в том числе тот тип рассеивающих линз, который используется в очках для близоруких людей. Отметьте, что вторая линза слегка выпукла с внешней стороны, но сильно вогнута с внутренней. (Она называется рассеивающей *менисковой* линзой.)

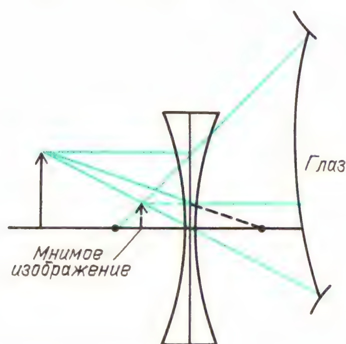
Рассеивающие линзы

Фокусное расстояние рассеивающей линзы отрицательно. Фокусное расстоя-

ние можно найти, направляя на линзу параллельные лучи, которые затем расходятся. Эти расходящиеся лучи можно потом продолжить назад, до их кажущегося начала на оптической оси. Рассеивающая линза образует только мнимые изображения реальных объектов. По-



ложение изображения можно найти обычным построением главных лучей или с помощью нашей формулы. Возьмем случай симметричной двояковогнутой линзы с фокусным расстоянием



-10 см. Поместим объект на расстоянии 20 см. Главный луч, выходящий из острия стрелки параллельно оптической оси, расходится под таким углом, что его продолжение назад проходит через первую фокальную точку. Главный луч, проходящий через центр линзы, не отклоняется. Третий главный луч выходит в направлении прямой, проходящей через вторую фокальную точку. В линзе он отклоняется так, что дальше он идет параллельно оптической оси. Его продолжение назад в левую от линзы сторону проходит через точку пересечения продолжений первых двух лучей. Глаз или объектив фотоаппарата, расположенный справа от линзы, воспримет эти расходящиеся лучи так, как если бы они исходили из точки-изображения, показанной на рисунке.

Формула линзы подтверждает это качественное предсказание, сделанное на основе рисунка:

$$\frac{1}{20\ \text{см}} + \frac{1}{b} = \frac{1}{-10\ \text{см}},$$

$$b + 20 = -2b,\ \ 3b = -20,$$

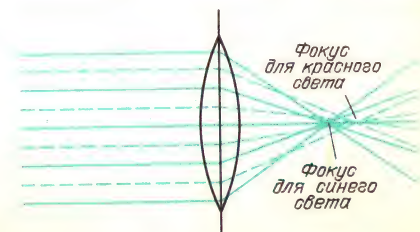
$$b = -6{,}7\ \text{см}.$$

Изображение, которое видит глаз, расположенный по правую сторону от линзы, будет мнимым, прямым и уменьшенным.

Вопрос 17-16
Можно ли с помощью рассеивающей линзы получить действительное изображение, поместив объект в пределах фокусного расстояния линзы?

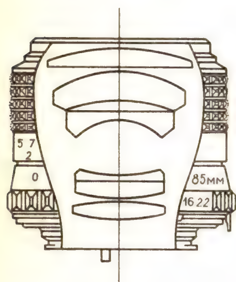
Реальные линзы работают не так хорошо, как простые линзы, изображенные на наших рисунках. Существуют некоторые аберрации, вызываемые лучами, образующими слишком большие углы с оптической осью либо пересекающими линзу слишком близко к краям. Наиболее известна среди них сферическая аберрация, показанная на фотографии на с. 110. Простой способ уменьшения этого дефекта заключается в «сужении» линзы с помощью непрозрачной диафрагмы, так чтобы использовалась только центральная часть линзы. Конечно, такой способ уменьшает используемый световой поток.

Еще одна аберрация, отсутствующая у кривого зеркала, называется *хроматической аберрацией*. Поскольку показатель преломления зависит от длины волны, различные цвета будут формировать изображения на разных расстояниях. Такая ситуация для параллельного пучка белого света показана на рисунке. Поскольку показатель преломления для



синего света больше, чем для красного, фокус для синих лучей расположен ближе. В этой фокальной плоскости изображение будет синим в центре с красной бахромой по краям. Если плоскость переместить немного дальше, изображение станет красным в центре с синей бахромой по краям.

Эти аберрации можно исправить или по крайней мере уменьшить, подбирая комбинации линз, каждая из которых имеет сферические поверхности. Однако эти линзы должны быть сделаны из разных сортов стекла с различными дисперсионными и преломляющими свойствами. На иллюстрации показан



Вид в разрезе сложного фотообъектива

в разрезе сложный объектив, используемый в дорогих фотоаппаратах. Объектив с уменьшенной хроматической аберрацией называется *ахромат*.

Ахроматический дублет показан схематически на следующем рисунке. Двояковыпуклая линза, изготовленная из

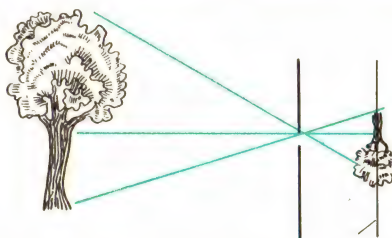
Двойная ахроматическая линза: *1* – стекло крон, *2* – стекло флинт

стекла сорта крон, примыкает к плосковогнутой линзе, изготовленной из стекла флинт. Стекло флинт содержит свинец и характеризуется как более высоким показателем преломления, так и значительно более сильной дисперсией, чем более легкое стекло крон. Стекло флинт используется для высококачественных хрустальных изделий. Отрицательная кривизна линзы из флинта лишь частично уменьшает схождение лучей, создаваемое линзой из крона, но хроматическая дисперсия первой линзы в значительной степени компенсируется противоположным действием второй линзы.

ОПТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

Фотоаппарат. У самой простой камеры меньше всего аберраций. Это в буквальном смысле «камера с булавочным отверстием». Все, что нужно для ее изготовления, – это коробка из-под обуви, немного черной липкой ленты, алюминиевая фольга и кусок пленки. Вырежьте отверстие на одном конце коробки и поверх него приклейте лентой кусочек алюминиевой фольги. В фольге проколите отверстие булавкой. В темной комнате поместите пленку на противоположном конце коробки и затем заклейте лентой крышку. Булавочное отверстие тоже можно закрыть кусочком ленты, пока вы не поставили камеру в положение для съемки. Поскольку выдержка при съемке освещенной Солнцем сцены может занять более пяти минут, нет нужды проявлять особую заботу о том, как открывать и закрывать булавочное отверстие. С помощью такого устройства можно получить исключительно резкие фотографии неподвижных сцен, лишенные каких бы то ни было искажений.

Простая геометрия лучей в этой камере показана на рисунке. Каждый точечный источник света фотографируемого объекта образует на пленке пятно,



имеющее форму булавочного отверстия. Рисунок изображения состоит из множества таких пятен. Никакой наводки на резкость не требуется. Благодаря такой прямолинейной геометрии все предметы, находящиеся перед отверстием, изображаются в фокусе и без искажений.

Можно подумать, что для получения более резких фотографий с помощью такой булавочной камеры нужно уменьшать размер булавочного отверстия. Но такой способ работает лишь до определенного предела. Ясно, что когда отвер-

стие имеет диаметр 1 см, изображение представляет собой монтаж из сантиметровых дисков, наползающих друг на друга (даже в таких обстоятельствах фотография передает некоторое сходство). Однако при уменьшении отверстия за пределы некоторого размера отдельное пятно изображения начинает *увеличиваться* в размерах.

Вопрос 17-17
Почему так происходит?

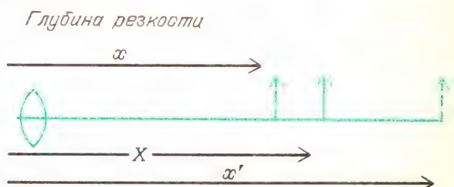
Уменьшение размеров булавочного отверстия приводит также к уменьшению энергии света, достигающего пленки. При уменьшении диаметра в 2 раза световой поток уменьшается в 4 раза. Для получения приемлемого изображения время экспозиции пришлось бы увеличить в 4 раза. Для практической фотографии нужен способ, который давал бы возможность послать больше света на пленку, не увеличивая размера пятна.

Эта проблема получает решение, если булавочное отверстие заменить линзой. Любой *удаленный* источник света можно сфокусировать на пленку, помещенную в главную фокальную плоскость линзы. Более того, весь падающий на линзу свет от каждой удаленной точки фокусируется в определенном месте изображения. Мы сильно увеличили размер «булавочного отверстия», но при этом сохранили маленький размер пятна на изображении. Естественно, что в этой схеме есть некоторые недостатки. Прежде всего, только объекты, находящиеся на одном и том же расстоянии от линзы, образуют резкие изображения в плоскости пленки. Если пленку поместить в фокальную плоскость, такое расположение будет правильным для всех объектов, находящихся по существу на бесконечном расстоянии. Однако это требование может оказаться не слишком жестким. Например, у типичной недорогой камеры фокусное расстояние объектива, а следовательно, и расстояние от объектива до пленки могут составлять всего лишь 4 или 5 см. Почти любой объект на расстоянии, превышающем 2 м, будет получаться почти в фокусе, как можно видеть из основной формулы линзы.

Вопрос 17-18
Где расположено изображение объекта, находящегося на расстоянии 200 см, в случае линзы с фокусным расстоянием 5 см?

Чем больше диаметр объектива камеры, тем больше света он может собрать и сфокусировать в каждую точку пленки. Однако, как мы видели, простая линза большого диаметра имеет много аберраций, особенно для лучей, далеких от оси линзы. Хороший фотообъектив, такой как на с. 126, представляет собой сложную комбинацию ряда простых линз. Однако даже при исправленных аберрациях чем больше диаметр объектива, тем критичней должна быть наводка на резкость. Вспомните, что в случае булавочного отверстия объекты, находящиеся на любом расстоянии, образуют на пленке резкие изображения. С увеличением размеров линзы лучи от ее внешних краев приходят в фокус под большими углами. Если только пленка не находится точно в нужной плоскости, изображение будет размытым.

Для любых заданных значений диаметра линзы и фокусного расстояния «глубина резкости» дается следующей



формулой. Пусть объектив с относительным отверстием F и фокусным расстоянием f наведен на объект, находящийся на расстоянии X. Точечный объект, находящийся между x и x', создает на пленке изображение диаметром меньше, чем d, если

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{X}=\frac{1}{X}-\frac{1}{x'}=\frac{Fd}{f^2}.$$

Например, пусть $d = 0{,}005$ см (обычный критерий резкости для 35-миллиметровых камер), $f = 5{,}0$ см (наиболее распространенный объектив для 35-миллиметровых камер), $X = 400$ см, тогда

для объектива с относительным отверстием $F = 2$

$$\frac{400 - x}{x \cdot 400} = \frac{x' - 400}{x' \cdot 400} = \frac{2 \cdot 0{,}005}{25},$$

$x = 345$ см, $x' = 476$ см;

для объектива с относительным отверстием $F = 8$

$x = 244$ см, $x' = 1110$ см.

Приведенная выше формула выражает лишь некоторое подручное правило, поскольку не существует определенного критерия требуемой резкости изображения точки. Обратите внимание, что если нужно получить большую глубину резкости, чтобы сразу многие объекты дали резкие изображения, следует брать объектив малого диаметра, наведенный на далекие от камеры объекты. Если, напротив, вы используете объектив очень большого диаметра и наводите его на близкий к камере объект, то глубина резкости получается очень малой. Лишь объекты в пределах некоторого очень короткого интервала расстояний будут в фокусе.

Световой поток, достигающий некоторого участка пленки, пропорционален площади отверстия объекта и обратно пропорционален квадрату расстояния от объектива до пленки. Последнее утверждение непосредственно следует из закона обратных квадратов. В первом приближении расстояние между объективом и пленкой равно просто фокусному расстоянию объектива. Небольшая поправка потребуется лишь тогда, когда объектив фокусируется на близкий объект. В этом приближении световой поток, достигающий некоторого участка пленки, пропорционален d^2/f^2, где d – диаметр отверстия объектива и f – его фокусное расстояние. Для характеристики объектива вводят число F, равное квадратному корню из обратной величины: $F = f/d$ (его называют также относительным отверстием). Например, 50 мм объектив с $F = 2$ имеет фокусное расстояние 50 мм и диаметр отверстия 25 мм. Отверстие объектива фотоаппарата можно сузить, закрывая диафрагму, состоящую из металлических лепестков, которые постепенно закрывают

Диафрагма фотообъектива

внешние участки объектива. Если наш объектив задиафрагмирован до $F = 4$, это значит, что диаметр его отверстия уменьшен до 12,5 мм. Уменьшение диаметра вдвое увеличивает число F в 2 раза и уменьшает приходящий в камеру световой поток в 4 раза. Следовательно, для той же самой экспозиции пленки увеличение числа F в 2 раза требует увеличения выдержки в 4 раза.

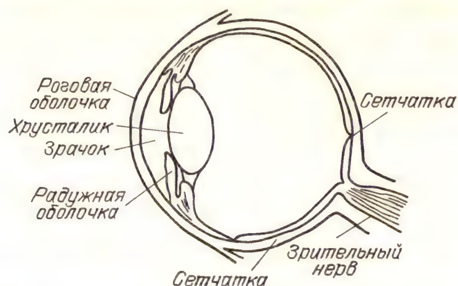
Вопрос 17-19

Фиксированные значения числа F, нанесенные на шкале некоторого дорогого фотообъектива, равны 1,8; 2,8; 4; 5,6; 8; 11 и 16. Если вы последовательно снимаете одну и ту же сцену по одному разу с каждым из этих значений числа F, как следует изменять выдержки, чтобы на всех снимках получить одинаковую экспозицию? Если вам удалось получить одинаковую экспозицию на всех снимках, как узнать, какой снимок сделан при $F = 1{,}8$ и какой при $F = 16$?

Глаз. В некоторых отношениях глаз и фотоаппарат очень схожи. У них есть линза впереди и светочувствительный материал в области ее фокуса. Однако в случае глаза как линза, так и детектор устроены очень изощренно.

У фотоаппарата наводка на резкость достигается перемещением объектива вперед или назад по отношению к пленке. У глаза хрусталик находится в фик-

сированном положении, но его оптическая сила может изменяться за счет изменения его кривизны. Удерживающие хрусталик мышцы могут его растягивать, отчего он становится тоньше,



или сжимать, увеличивая его выпуклость. В действительности хрусталик обеспечивает лишь малую часть схождения лучей в оптической системе глаза. Внешний прозрачный слой, называемый роговой оболочкой, также искривлен и содержит за собой жидкость – водянистую влагу. Эта жидкость, а также жидкость, находящаяся за хрусталиком (стекловидное тело), имеют показатель преломления почти такой же, как у воды: 1,34. Поэтому значительная часть полного преломления происходит на внешней поверхности, где лучи входят из воздуха в роговую оболочку. Сам хрусталик имеет показатель преломления около 1,44. Изменения его кривизны слегка подгоняют общее схождение лучей в системе.

Как и объектив фотоаппарата, хрусталик глаза может диафрагмироваться. У глаза такая диафрагма называется *радужной оболочкой*. Это карее, синее, серое или зеленое кольцо глаза. Радужная оболочка может увеличивать или уменьшать находящееся в ее середине круглое отверстие, называемое *зрачком*. При ярком свете зрачок имеет диаметр чуть меньше 2 мм, в то время как при слабом освещении диаметр зрачка может увеличиться чуть больше, чем до 8 мм. Следящая система обратной связи, которая осуществляет эти изменения, срабатывает лишь за несколько секунд, а у пожилых людей время реакции может быть и еще больше. Переменный размер зрачка может компенсировать примерно лишь 20-кратные изменения интенсивности света. Однако глаз в целом до некоторой степени сохраняет работоспособность при интенсивностях света, изменяющихся в миллион раз. Большая часть такого приспособления происходит в «фотопленке», т. е. в нервных клетках *сетчатой оболочки* (сетчатки).

В сетчатке есть два главных типа чувствительных клеток. Из-за своей внешней формы они называются палочками и колбочками. В сетчатке они распределены неравномерно. По краям поля зрения преобладают палочки, в то время как колбочки сосредоточены ближе к середине. В одной небольшой области диаметром менее 1 мм, называемой *желтым пятном*, находятся только колбочки, тесно примыкающие друг к другу. Когда мы вглядываемся в какой-либо предмет, чтобы детально рассмотреть его, то фокусируем его изображение на желтое пятно.

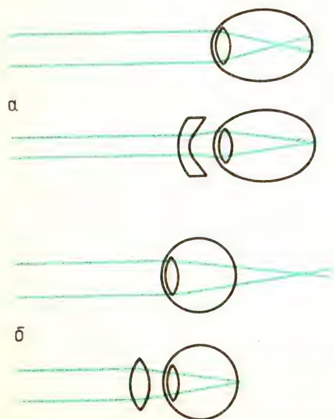
Палочки и колбочки реагируют на свет разных длин волн. Колбочки чувствительны к красному свету, а палочки – нет. Для колбочек требуется свет от средней до высокой интенсивности, в то время как палочки сохраняют чувствительность вплоть до очень низкого уровня интенсивности. При слабом освещении мы в значительной степени утрачиваем способность различать цвета. Поскольку в тусклом свете палочки более эффективны, нежели колбочки, иногда в темноте мы лучше видим объекты боковым зрением, когда они попадают ближе к краям поля зрения. Хотя периферическое зрение не может дать очень детального или богатого красками образа, оно поразительно чувствительно к движению объектов. Если шелохнется листок или шевельнется маленький зверек, мы способны скорее заметить это на краях поля зрения, нежели прямо перед глазами.

Палочки и колбочки связаны между собой и перерабатывают часть получаемой ими информации, прежде чем послать ее в головной мозг. Эти сообщения преобразуются в электрические сигналы, распространяющиеся вдоль главного нервного ствола, который отходит от задней стороны сетчатой оболочки. То, что происходит затем в зрительных центрах головного мозга, отличается

чрезвычайной сложностью и пока еще недостаточно хорошо понято.

Поскольку в малой области сетчатки, в том месте, где из нее выходит ствол зрительного нерва, рецепторы света отсутствуют, у каждого глаза есть слепое пятно. Вы можете обнаружить это слепое пятно, закрыв левый глаз и фиксируя взгляд на изображении креста (см. ниже). Сначала держите страницу на удобном для зрения расстоянии 25 или 30 см от глаза, а затем медленно приближайте глаз к странице, по-прежнему фиксируя его на кресте. Сначала вы увидите, как исчезнет буква В; затем она снова появится, в то время как буква А исчезнет:

Глаз человека вместе с анализирующей системой головного мозга являет собой изумительный оптический прибор, аберрации которого в определенных условиях исправлены полностью. Однако глаз может быть подвержен разного рода заболеваниям и несовершенствам. Наиболее распространенный дефект глаза – *близорукость*. Хрусталик слишком силен для данного размера глазного яблока, в результате чего изображение формируется перед сетчаткой. Из такой ситуации можно выйти, помещая перед глазами рассеивающие линзы. Их действие схематически показано на рисунке. Другой распространенный дефект глаза – *дальнозоркость*. В этом случае изображение формируется позади сетчатки. Для исправления этого дефекта линзы очков должны быть слабыми собирательными, как показано в нижней части рисунка. Часто линзам очков требуется придавать также слегка цилиндрическую форму, наложенную на их сферические поверхности. Такая форма компенсирует астигматизм глаза, который обычно вызывается несферичностью роговой оболочки, отчего круги выглядят как овалы. Иногда в очках бывает также необходима небольшая призматическая коррекция, чтобы облегчить зрачку глаза наведение изображения на желтое пятно.



Близорукий (*а*) и дальнозоркий (*б*) глаз

Фокусное расстояние внутри глаза равно примерно 1,8 см. По принятой для фотообъективов терминологии, его относительное отверстие F при широко раскрытом зрачке равно $F = 1{,}8$ см/0,8 см ≈ 2. Еще один интересный момент в связи с человеческим глазом: глаз не может хорошо работать в воде. Поскольку в обычных условиях преломление происходит в основном на внешней поверхности роговой оболочки, глаз утрачивает большую часть своей способности к сведению лучей, когда роговая оболочка погружена в воду. Показатели преломления воды и находящегося за роговой оболочкой стекловидного тела почти одинаковы. Сильно близорукие люди лучше видят в воде, чем люди с нормальным зрением, поскольку утрата собирательных свойств роговой оболочки дает тот же эффект, что и очки с рассеивающими линзами.

Коллиматоры и простые телескопические системы. Во многих приборах свет от источника требуется «сколлимировать», т. е. сделать почти параллельным, затем направить в некоторый анализатор и, наконец, снова сфокусировать на пленку или экран. Например, в спектроскопе должен быть линейный источник, получаемый обычно в результате освещения узкой щели переменной ширины. Как видно из рисунка, эта щель находится в фокальной плоскости собираю-

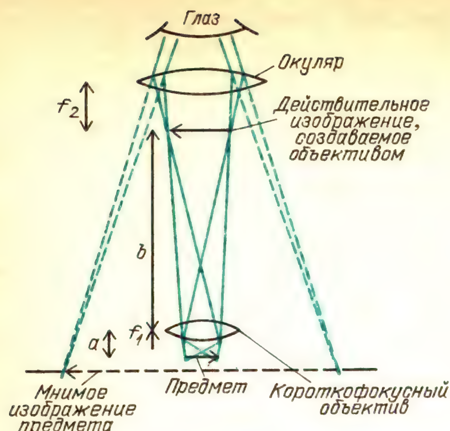
щей системы линз. Лучи от каждой точки щели выходят из линзы почти параллельно друг другу и затем отклоняются призмой или дифракционной решеткой на угол, зависящий от длины волны. Затем эти лучи входят в телескоп простейшего типа, образованный собирающей линзой. Все параллельные друг другу лучи собираются в фокус в некоторой точке на изображении исходного линейного источника. Поскольку свет разных длин волн отклоняется на разные углы, в фокальной плоскости формируется ряд изображений линейного источника.

Проекционный аппарат. Проекционный аппарат как для слайдов, так и кинопроектор, должен иметь оптическую систему, которая концентрирует свет на небольшом прозрачном диапозитиве и затем фокусирует этот свет на удаленный экран для получения там увеличенного изображения. На первый взгляд может показаться, что следует просто поместить диапозитив чуть дальше фокальной плоскости проекционного объектива. Такая система хорошо работала бы только в том случае, если бы объект был самосветящимся. Задача, однако, заключается в том, чтобы пропустить как можно больше света от нити накала лампы проектора сквозь диапозитив и затем сквозь проекционный объектив. Стандартная оптическая схема показана на рисунке. Нить накала *1*, имеющая значительную площадь, отображается линзами конденсора *2* на проекционный объектив *3*. Расположенное позади нити зеркало *4* отражает испускаемый в эту сторону свет снова к нити, эффективно удваивая используемый световой поток. Роль линз конденсора заключается в том, чтобы собрать выходящий в возможно большем телесном угле свет и направить его сквозь проекционный объектив. Находящийся позади линз конденсора диапозитив *5* помещен в фокальную плоскость проекционного объектива (точнее, немного впереди нее). Свет, проходящий сквозь любую точку диапозитива, даже если он попадает в нее под разными углами из всех точек нити накала, целиком будет направлен проекционным объективом в единственную точку экрана.

Составной микроскоп. Составной микроскоп схематически показан на рисунке на с. 132. Каждой изображенной здесь простой линзе соответствует в действительности сложная многолинзовая система, содержащая много элементов для уменьшения аберраций. Более того, у реального прибора должен быть реализован сложный способ освещения объекта с помощью оптической системы конденсора.

Построение оптической системы микроскопа определяется двумя главными факторами, которые, как мы увидим, совершенно отличны от факторов, определяющих схему телескопа. Во-первых, микроскоп можно поместить почти над самым объектом. Во-вторых, размер микроскопа обычно ограничивается требованием, чтобы с ним было удобно работать, сидя за обычным столом. Поэтому окуляр должен находиться на расстоянии всего около 30 см от объекта.

Каждый участок нити накала освещает каждую точку диапозитива. Получается так, как если бы эта точка сама испускала свет под многими углами. Все те лучи, которые проходят через эту точку и перехватываются проекционным объективом, фокусируются в одну и ту же точку экрана



В составном микроскопе первая линза – объектив – создает действительное изображение, которое расположено внутри тубуса недалеко от глаза наблюдателя. Это уже увеличенное изображение можно увидеть, поместив тонкий полупрозрачный экран в плоскости изображения. Однако для удобства непосредственного наблюдения ваш глаз должен находиться от этого экрана на стандартном расстоянии 25 см. Очевидно, что это действительное изображение следует рассматривать через лупу. В дорогом микроскопе роль такой лупы выполняет окуляр, сделанный обычно из нескольких линз. Предназначен он для того, чтобы глаз мог располагаться как можно ближе к действительному изображению. Конечно, при этом совсем необязательно проектировать действительное изображение на полупрозрачный экран.

Создаваемое объективом увеличение равно b/a. Расстояние b до изображения ограничено вторым из упомянутых факторов и должно быть около 25 см. Поскольку объектив можно подвести очень близко к изучаемому объекту, расстояние до объекта может быть лишь чуть больше фокусного расстояния объектива. Следовательно, чем меньше фокусное расстояние объектива, тем больше увеличение. Поскольку $a \approx f_1$, достигаемое на первой стадии составного микроскопа увеличение $m_1 = 25$ см$/f_1$. Увеличение окуляра равно просто увеличению лупы; формула для него была выведена на с. 124. Когда мнимое изображение установлено на бесконечность, что создает наиболее удобные условия наблюдения, увеличение окуляра равно $m_2 = 25$ см$/f_2$.

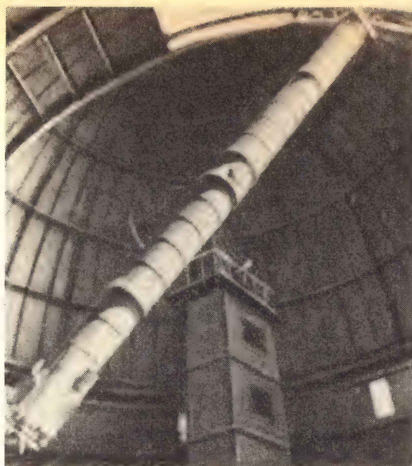
Общее увеличение составного микроскопа $M = m_1 m_2 = (25 \text{ см})^2/f_1 f_2$. Для типичного окуляра увеличение m_2 может быть 10- или 20-кратным. Фокусное расстояние объектива можно сделать очень малым. И тем не менее для микроскопов, использующих видимый свет, нельзя получить общее увеличение, которое превышало бы примерно 1500.

Вопрос 17-20

Почему? Вспомните, что невооруженный глаз, которым вы смотрите в окуляр, легко различает детали изображения, не превышающие 1 мм. Если увеличение равно 1500, какой размер имеет такая деталь в реальном объекте? Почему бы не сфотографировать эту деталь, а затем снова увеличить ее в 10, 100 или 1000 раз?

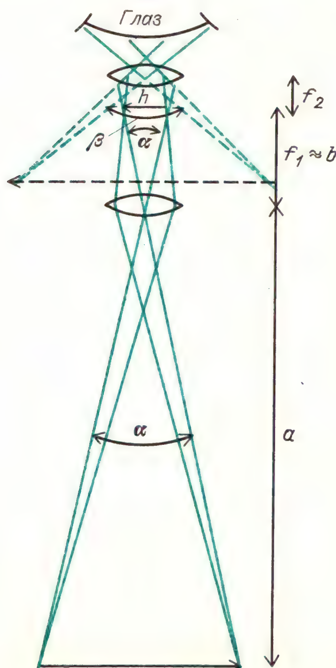
Телескоп. Существуют два фактора, которыми определяется конструкция телескопа. Они прямо противоположны тем факторам, что были существенны для микроскопа. Во-первых, в случае телескопа объект находится далеко, практически в бесконечности. Во-вторых, размер телескопа не обязательно ограничен длиной около 25 см, хотя в случае полевых или театральных биноклей физические размеры должны быть небольшими. Мы приводим на с. 133 лишь схематический рисунок простой системы с двумя собирающими линзами. На фотографии показан реальный телескоп такого типа.

Как мы видели на с. 121, изображение удаленного объекта, создаваемое единственной линзой, находится почти в фокальной плоскости линзы. Изображение имеет такой же угловой размер, как и сам объект, видимый из места расположения линзы. Поэтому линейный размер изображения пропорционален расстоянию от линзы, которое в данном случае равно фокусному расстоянию. *Линейное* увеличение меньше единицы: $m_1 = b/a \approx f_1/a$. Однако для глаза действительное изображение, формируемое



Телескоп-рефрактор

объективом, кажется крупнее самого объекта. Так получается потому, что глаз видит действительное изображение с малого расстояния, а сам объект – с очень большого. Как видно из схемы телескопа, *угловой* размер *объекта*, воспринимаемый телескопом или наблюдателем, равен α; *угловой* размер



изображения, воспринимаемый наблюдателем, равен β. Поэтому *угловое* увеличение равно

$$m_1 = \beta/\alpha = \frac{h/f_2}{h/f_1} = f_1/f_2.$$

(Через h здесь обозначен линейный размер действительного изображения, формируемого объективом.)

Когда наблюдатель рассматривает действительное изображение невооруженным глазом, угловое увеличение равно $f_1/25$ см. Очевидный способ получения большего увеличения – рассматривать действительное изображение в лупу или еще лучше в хороший окуляр. Как мы уже видели, увеличение такого окуляра равно $m_2 = 25$ см$/f_2$. Так как f_2 можно сделать очень малым (до 1 или 2 см), то общее увеличение составного телескопа может быть очень большим: $M = f_1/f_2$.

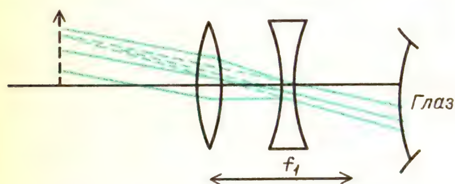
Вопрос 17-21

Предположим, что у вас есть две линзы с фокусным расстоянием 2 см, две – с фокусным расстоянием 10 см, и еще две – с фокусным расстоянием 100 см. Если вы можете использовать любое их сочетание, какие две линзы вы бы выбрали для микроскопа и какие две для телескопа?

И составной микроскоп, и астрономический телескоп создают мнимое изображение действительного изображения. Результирующее изображение перевернуто вверх ногами. Для большинства применений микроскопа или для астрономических наблюдений в телескоп это не имеет значения. Однако было бы неудобно наблюдать перевернутые вверх ногами изображения в театральный бинокль. Один из способов получения прямого изображения в телескопе – добавить просто еще одну собирающую линзу посредине. Такая добавка делает телескоп громоздким. Некоторые телескопы сделаны из вставленных друг в друга трубок, которые выдвигаются в рабочем положении для обеспечения необходимой длины. (Слово «телескопический» иногда используют для характеристики систем, у которых отдельные компоненты вдвигаются друг в друга.) В биноклях изображение переворачи-

вается с помощью внутреннего отражения, как показано на иллюстрации на с. 101. Такое устройство позволяет также немного удлинить фокусное расстояние объективов, из-за чего возрастает и увеличение бинокля. Более того, создаваемое призмами полного отражения боковое смещение лучей позволяет увеличить расстояние между объективами и тем самым усилить восприятие глубины пространства в такой бинокулярной системе.

В театральных биноклях и в очень недорогих зрительных трубах используется немного иная оптическая система. В «галилеевой» системе, показанной на рисунке, в качестве объектива используется собирающая линза, но в качестве окуляра – рассеивающая. Первый телескоп Галилея был именно



Телескоп Галилея

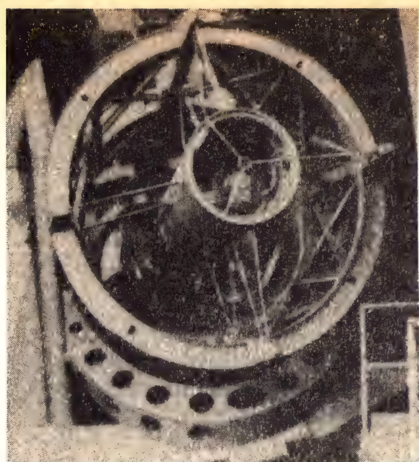
такого типа и давал общее увеличение всего около 3. В последующих телескопах он получил увеличение вплоть до 30.

Как видно из рисунка, окуляр перехватывает сходящиеся лучи, превращая их в расходящиеся. Глаз интерпретирует эти расходящиеся лучи как выходящие из мнимого изображения. Это изображение, конечно, прямое и дает увеличенную картину по сравнению с тем, что увидел бы невооруженный глаз. Сделанный по такой схеме театральный бинокль дает увеличение всего около 3.

Бинокли и небольшие телескопы характеризуют обычно двойным числом, например 7 × 30. Первое число относится к линейному увеличению (отношение высоты наблюдаемого в телескоп изображения к высоте объекта при его наблюдении невооруженным глазом). Второе число дает диаметр линзы объектива в миллиметрах. К этому мы вскоре вернемся.

Вопрос 17-22
Большинство биноклей дает увеличение от 5 до 10. Чем это объясняется? Примите во внимание практические ограничения на размеры биноклей и затем обратитесь к формуле для увеличения телескопа.

Из сказанного до сих пор может сложиться впечатление, что для создания лучшего телескопа нужно было бы стремиться увеличить фокусное расстояние объектива настолько, насколько это возможно. Астрономические телескопы и в самом деле имеют большие фокусные расстояния, но все же не чрезмерные. Существует еще один фактор, более важный, чем увеличение. Чтобы собрать как можно больше света, требуется объектив или зеркало с большой площадью поверхности. Чем больше света, тем короче время экспозиции. По этой же причине бинокли характеризуют как увеличением, так и диаметром линз объективов. Напомним, что световой поток, достигающий какой-либо точки фокальной плоскости объектива, пропорционален квадрату диаметра линз и обратно пропорционален квадрату фокусного расстояния. Отношение f/d называется относительным отверстием или числом F объектива. Чем меньше относительное отверстие, тем с большей эффективностью объектив концентрирует свет на фотопленке. Наибольшей из линз, когда-либо использованных для объектива телескопа, является линза диаметром 40 дюймов Йеркской обсерватории в штате Висконсин. Ее фокусное расстояние равно 63 футам, что дает относительное отверстие 63 фт/3,3 фт = 18,9. В обсерватории Маунт Паломар в Калифорнии находится один из крупнейших телескопов, работающих в видимом свете. Его параболическое зеркало имеет диаметр 200 дюймов, но его фокусное расстояние равно лишь 55,5 футам, т.е. меньше, чем у Йеркского телескопа. Относительное отверстие телескопа-рефлектора обсерватории Маунт Паломар равно 3,3. Помимо большей светосилы, крупная линза объектива или большое зеркало обеспечивают удовлетворение еще одного важного требования астрономии.



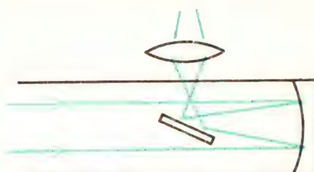
200-Дюймовый телескоп-рефлектор обсерватории Маунт Паломар

Вопрос 17-23
Мы отмечали, что независимо от увеличения большинство звезд остаются точечными источниками и образуют точечные изображения. Но будут ли и в самом деле их изображения только точками? Какое влияние оказывает диаметр линзы на размер изображения?

Как мы уже видели, объективом телескопа может служить вогнутое зеркало вместо выпуклой линзы. Изготовление очень больших линз связано с большими трудностями и обходится очень дорого. 40-Дюймовая линза объектива телескопа Йеркской обсерватории – самая большая из когда-либо изготовленных – была завершена в 1890-х годах. Главная трудность заключается в получении большого объема высококачественного оптического стекла, свободного от пузырьков и механических напряжений. Даже после того, как крупную линзу удалось отлить и отшлифовать, все еще остаются трудности, связанные с тем, что лишь ее края должны удерживать большой вес линзы, не создавая при этом деформаций.

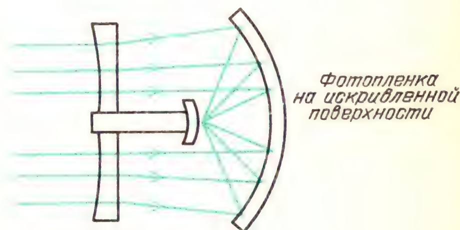
Значительно легче сделать отливку из большого объема стекла для изготовления зеркала. При этом только поверхность стекла должна быть свободна от недостатков, и зеркало можно механически поддерживать снизу по всей его поверхности.

На этом рисунке показаны две различные оптические системы отражающих телескопов (система Ньютона и система Грегори) и еще один тип телескопа, представляющий собой сочетание рефлектора и рефрактора. Это так называемая система Шмидта. На рисунке



Система Ньютона

Система Грегори



Система Шмидта

кривизна переднего элемента сильно преувеличена. Добавочное преломление компенсирует сферическую аберрацию зеркала, обеспечивая этим гораздо большее поле зрения такого телескопа. Изображения на значительном удалении от оси остаются резкими.

РЕЗЮМЕ

Когда длина волны мала по сравнению с любыми препятствиями или отверстиями, поведение волн приближенно можно описывать с помощью лучей, перпендикулярных к волновым фронтам. Для описания поведения лучей вводят углы между лучами и перпендикуляром к границе в том месте, где лучи встречаются с ней. В случае отражения

угол падения равен углу отражения. Отражение в плоском зеркале создает мнимое изображение, расположенное за зеркалом. В случае преломления $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$, где $n = c/v$ – отношение скорости света в вакууме к скорости света в среде. Поскольку преломление зависит от скорости волн в среде, а эта скорость в большинстве веществ зависит от частоты, лучи света разных частот преломляются на разные углы. Во всех прозрачных веществах синий свет характеризуется большим показателем преломления, чем красный. Эта *дисперсия* приводит к образованию радуги.

Мы представили грубую атомную модель для объяснения взаимодействия света с веществом. Проходящий сквозь вещество свет приводит в колебательное движение электроны в атомах. Они в свою очередь излучают электромагнитные волны, которые складываются с исходной волной. Результирующая волна в прозрачном материале, как правило, непрерывно запаздывает, что приводит к меньшей скорости распространения.

Еще один руководящий принцип для описания отражения и преломления – принцип Ферма. Время, которое требуется свету для распространения из одной точки в другую, эстремально по сравнению со временем для любого другого пути, слегка отличающегося от истинного. Если существует много путей, по которым свет, начав движение из одной точки в одинаковой фазе, распространяется за одинаковые времена и приходит в одинаковой фазе в другую точку, то последняя будет фокусом лучей.

Для сферического зеркала в случае параксиальных лучей

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} = \frac{2}{R}.$$

Существует три главных луча, за ходом которых легко проследить при нахождении положения изображения в сферическом зеркале: параллельный оптической оси луч, который затем проходит через главный фокус; луч, проходящий через главный фокус, который уходит от зеркала параллельно оптической оси; и луч, падающий в центр зеркала, который отражается под таким же углом к оптической оси. Для вогнутого зеркала, если $a > 2f = R$, то $f < b < 2f$. Если $a = 2f$, то $b = 2f$. Если $f < a < 2f$, то $2f < b < \infty$. Если $a < f$, то изображение мнимое. Для выпуклого зеркала изображение всегда мнимое.

Для линз в случае параксиальных лучей

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{1}{f}.$$

Фокусное расстояние тонкой линзы и радиусы кривизны ее поверхностей связаны формулой

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Геометрические соотношения между a, f и b такие же, как и для сферического зеркала. Чтобы построить положение изображения, используйте главные лучи (параллельный оси луч проходит через главный фокус; луч через центр линзы не отклоняется; луч через главный фокус выходит из линзы параллельно оси). На законах отражения и преломления света основаны построение и принцип действия многих оптических приборов. Мы изучили фотоаппарат, человеческий глаз, простые телескопы, проекторы и составные микроскопы и телескопы. Во многих из этих приборов выпуклые линзы объективов формируют действительные изображения. Затем это изображение можно рассматривать с близкого расстояния через окуляр, который действует как лупа.

Ответы на вопросы

17-1. Эти углы равны друг другу. Отметьте, что луч перпендикулярен к волновому фронту, а нормаль перпендикулярна к поверхности.

17-2. Если угол $i = r$, то $i' = r$ и угол $QPO = QPI$. Поскольку эти углы равны и прилежат к отрезку QP, общему для обоих прямоугольных треугольников, то эти треугольники равны и $QI = QO$.

17-3. Проволочная сетка не может быть хорошим отражателем для звуковых волн, потому что колебания воздуха могут легко проходить сквозь ее отверстия. При прохождении сквозь проволочную сетку импеданс заметным образом не меняется. Бетон-

ная стена будет отражать микроволны, но не очень хорошо. Бетон не является хорошим проводником электричества. Заметьте, что портативные радиоприемники можно слушать, находясь в бетонных зданиях.

17-4. $\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{1}{3/4} = \frac{4}{3}$.

Если $\sin\theta_1 = 0{,}5$, $\sin\theta_2 = 3/8$ и $\theta_2 = 22°$. Задолго до того, как Снелл доказал это выражение, включающее отношение синусов, греки знали, что преломление приближенно следует закону $\theta_1/\theta_2 = \text{const}$ (для перехода воздух – вода $\text{const} \approx 4/3$). Для $\theta_1 = 30°$ это более простое соотношение дает

$$\frac{30°}{\theta_2} = \frac{1}{3/4} = \frac{4}{3}, \quad \theta_2 = 90°/4 = 22{,}5°.$$

Как видно, для углов падения от малых до средних было бы нелегко установить на опыте различие между этими соотношениями.

17-5. Нет. Хотя при падении под углом Брюстера отраженный луч не содержит *электрических* колебаний в плоскости падения, *преломленный* (или прошедший во вторую среду) луч будет лишь частично поляризованным.

17-6. $\delta_ф - \delta_{кр} = (1{,}4550)\,60° - (1{,}4090)\,60° = 0{,}76° = 4{,}84 \cdot 10^{-2}$ рад. При такой угловой дисперсии спектр на расстоянии 1 м имел бы ширину $r\theta = 1$ м $\cdot\, 4{,}84 \cdot 10^{-2}$ рад $= 4{,}8$ см.

17-7. Оказывается, что эта грубая модель работает очень хорошо, пока мы не интересуемся деталями поглощения электромагнитного излучения.

17-8. Нет. Эллипс обладает следующим свойством: проведенные из любой точки к двум фокусам отрезки образуют равные углы с нормалью к кривой.

17-9. Окружность, эллипс и парабола – это все члены одного семейства кривых, называемого коническими сечениями. Когда обе фокальные точки эллипса сливаются, эллипс превращается в окружность. Если одна из фокальных точек эллипса смещается в бесконечность, эллипс превращается в параболу. В таком случае свет, приходящий из удаленного фокуса, будет параллельным и после отражения от параболы соберется в другом фокусе.

17-10. Очевидно, что изображение Луны в телескопе гораздо меньше, чем сама Луна, независимо от размеров телескопа. Если, однако, говорить о том, как мы видим Луну, телескоп дает полезное увеличение. Мы можем рассматривать получаемое в телескопе изображение с очень близкого расстояния, особенно если воспользоваться луной или окуляром. Тогда угол, под которым глаз видит изображение Луны, оказывается больше угла, под которым видна сама Луна невооруженным глазом. Эффективное увеличение равно отношению этих углов.

17-11. У зеркала для бритья большой радиус кривизны. Обычно при пользовании им наше лицо располагается в пределах фокусного расстояния: $a < f$. Поэтому мы видим прямое мнимое изображение. Углубление ложки имеет очень малый радиус кривизны. Когда мы смотримся в него, наше лицо обычно находится за пределами фокусного расстояния. Поэтому мы видим перевернутое действительное изображение.

17-12. Проходящему через верхнюю часть линзы лучу приходится преодолевать большее расстояние, чтобы попасть в фокус, но он пересекает лишь небольшой участок стекла, где скорость света меньше. Луч, идущий вдоль оси, проходит самое короткое расстояние, но и самый длинный отрезок пути в стекле. Если линзе придана правильная форма, *время* распространения всех лучей до фокуса может быть сделано одинаковым, несмотря на то, что проходимые ими *пути* различны.

17-13. Для плосковыпуклой линзы $R_1 = \infty$. Поэтому в соответствии с нашей общей формулой $1/f = (n-1)(-1/R_2)$. За исключением знака минус перед R_2, эта формула согласуется с той, что была выведена для плосковыпуклой линзы. В соответствии с соглашением о знаках, приведенном в следующем разделе, мы считаем R_2 отрицательным, поскольку соответствующий ему центр кривизны лежит слева от линзы, в той стороне, откуда приходит свет. С такой добавочной аргументацией обе формулы согласуются друг с другом.

17-14. Вы не в состоянии рассматривать предмет, находящийся на расстоянии всего 1 см от глаза, если только вы не страдаете сильной близорукостью. Линза вашего глаза не может сфокусироваться на столь близкий предмет. Для нормального глаза расстояние наилучшего видения (используемое при чтении) составляет около 25 см.

17-15. Используя лупу с фокусным расстоянием 5 см, держите ее вплотную к глазу и придвигайте объект, пока его изображение не окажется в бесконечности. Увеличение при этом равно 25 см/5 см = 5. Если же вы держите объект так, что его изображение получается на расстоянии наилучшего видения, равном 25 см, то увеличение равно 1 + 25 см/5 см = 6. На практике вы едва ли сможете заметить различие увеличений в этих двух положениях.

17-16. Найдем расстояние до изображения с помощью нашей стандартной формулы, не забывая при этом, что фокусное расстояние отрицательно:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{|f|}, \quad b = -\frac{a|f|}{a + |f|}.$$

Пока расстояние до объекта a положительно, расстояние до изображения b всегда неизбежно отрицательно и, следовательно, это изображение мнимое.

17-17. В действительности отдельное пятно изображения представляет собой не просто круг, а, скорее, дифракционное изображение с угловым радиусом $1{,}2\lambda/d$, где d – диаметр булавочного отверстия. При уменьшении d угловой размер пятна на изображении увеличивается. Если расстояние от отверстия до пленки равно l, радиус дифракционного изображения равен $1{,}2(\lambda l/d)$. Размер этого дифракционного пятна может стать больше, чем размер самого булавочного отверстия.

17-18. $\frac{1}{200} + \frac{1}{b} = \frac{1}{5}$, $b = 5{,}13$ см.

Изображение этого близкого объекта смещено лишь на 1,3 мм из фокальной плоскости. Будет ли его изображение получаться резким или нет, зависит от ряда других условий.

17-19. Световой поток, достигающий пленки, приблизительно пропорционален обратному квадрату числа F. Квадраты этих чисел приведены ниже:

1,8	2,8	4	5,6	8	11	16
3,24	7,84	16	31,4	64	121	256

За исключением первой пары этих чисел, каждое последующее число уменьшает приходящий на пленку световой поток в 2 раза. Чтобы получить снимки с одинаковой экспозицией при каждом увеличении числа F на одну ступень, вам следует увеличивать время выдержки в 2 раза. Например, если требуемое время экспозиции при $F = 4$ равно 1/50 с, то выдержка при $F = 5{,}6$ должна быть 1/25 с. Снимок, полученный при $F = 1{,}8$, должен иметь очень малую глубину резкости. Объекты на каком-то одном расстоянии выйдут резкими, а находящиеся ближе или дальше будут не в фокусе. При $F = 16$ в обычных условиях большинство объектов выйдут резкими, за исключением расположенных очень близко.

17-20. Когда видимое в окуляр изображение имеет размер 1 мм, а полное увеличение равно 1500, то сам объект должен иметь размер $1 \cdot 10^{-3}$ м/1500 = $= 6 \cdot 10^{-7}$ м. Но это длина световой волны! Мы не можем зондировать детали, меньшие, чем размер нашего зонда. Длина волны зондирующего излучения определяет крайний предел увеличения, которое можно получить с его помощью. Даже если вы увеличите фотографию, видимые на ней детали будут лишь дифракционными картинами.

17-21. Для получения максимального увеличения в микроскопе обе линзы – объектив и окуляр – должны иметь возможно меньшие фокусные расстояния. Поэтому для микроскопа следует воспользоваться линзами с фокусным расстоянием 2 см и для объектива, и для окуляра. В случае телескопа для получения максимального увеличения линза объектива должна иметь большое фокусное расстояние. Поэтому нужно воспользоваться линзой с фокусным расстоянием 100 см. Что касается окуляра, то и здесь для наибольшего увеличения следует использовать самую короткофокусную из имеющихся линз, а именно 2 см.

17-22. Увеличение составного телескопа равно $M = f_1/f_2$. Трудно изготовить хороший окуляр, фокусное расстояние которого было бы значительно меньше дюйма. Следовательно, если $f_2 = 2{,}5$ см и $f_1 = 25$ см, увеличение телескопа будет 10. Такой телескоп должен иметь длину по крайней мере 28 см, т. е. около фута. У 10-кратных биноклей в действительности длина меньше из-за того, что путь света при прохождении через призмы образует зигзаги. (Еще одна причина, по которой не делают бинокли и ручные зрительные трубы с увеличением больше 10, – слишком сильная дрожь в руках не дает возможности воспользоваться преимуществами большого увеличения.)

17-23. Изображение точечной звезды в действительности представляет собой ряд дифракционных колец. Угловое расстояние от центрального максимума до первого темного кольца равно $1{,}2\lambda/d$, где d – диаметр круглого отверстия, в данном случае диаметр линзы или зеркала телескопа. Чем крупнее зеркало или линза, тем меньше дифракционное изображение и следовательно больше разрешающая способность прибора.

Задачи

1. а. Вы находитесь перед плоским зеркалом в 3 м от него и хотите сфотографировать себя в зеркале. На какое расстояние поставите вы приспособление для наводки на резкость вашего фотоаппарата?

б. Вы бросаете мяч в сторону зеркала со скоростью 5 м/с. С какой скоростью летит на вас изображение мяча? Чему равна скорость изображения мяча в системе отсчета, связанной с реальным мячом?

2. В радаре автоинспекции должны использоваться волны, распространяющиеся и отражающиеся в виде узких пучков. В идеале их поведение должно было бы описываться лучевой оптикой, а не механикой волн. Какие отсюда следуют ограничения на их длины волн и частóты?

3. Чему равен угол Брюстера для света, проходящего из воздуха в воду?

4. Луч света, идущий из воздуха в стекло с показателем преломления 1,5, имеет угол падения 60°. Чему равен угол преломления?

5. Луч, выходящий из стекла (с показателем преломления 1,5) в воздух, имеет угол падения 40°. Чему равен угол преломления?

6. Чему равен критический угол полного отражения для света, выходящего из стекла ($n = 1{,}50$) в воду ($n = 1{,}33$)?

7. Чему равен угол наименьшего отклонения δ для синего света и для красного света в призме с преломляющим углом 60°, сделанной из воды?

8. Свет проходит из воздуха в воду с углами падения 10° и 60°. Сравните углы преломления с теми, что получились бы, если бы закон Снелла имел простой вид: $\theta_1/\theta_2 = n$.

9. С помощью линейки и транспортира постройте масштабный чертеж, показывающий, что изображение в плоском зеркале расположено на одном перпендикуляре с объектом и на таком же расстоянии за зеркалом. Лучи должны удовлетворять закону отражения $r = i$.

10. Опишите на словах и с помощью рисунка, в каких условиях на небе возможно наблюдать радугу. Покажите, как связаны между собой положение Солнца, ваше местоположение и наблюдаемое положение радуги. Что можно сказать о высоте Солнца и радуги над горизонтом? В какой последовательности расположены цвета?

11. Опишите на словах, основываясь на нашей атомной модели, почему синий свет распространяется в стекле медленнее, чем красный.

12. Сделайте масштабный чертеж светового луча, проходящего из одной точки в другую, отражаясь в плоском зеркале. Убедитесь, что $r = i$. Затем начертите еще две траектории из первой точки к зеркалу и во вторую точку. Измерьте эти пути и покажите, что они длиннее истинного.

13. Сделайте масштабный чертеж светового луча из некоторой точки среды 1 в точку среды 2 ($n_1 = 2n_2$) с углом падения 60°. Затем начертите еще две траектории из точки 1 в точку 2. Измерьте их длины и покажите, что время, которое потребовалось бы для любой из этих траекторий, больше, чем время, требующееся при соблюдении закона Снелла.

14. Для линзы с фокусным расстоянием, равным $f = 20$ см, найдите расстояния до объекта, при которых линейный размер изображения будет:

а) вдвое больше, чем размер объекта;

б) равен размеру объекта;

в) вдвое меньше, чем размер объекта.

Сделайте для этих случаев построение на рисунке, используя главные лучи. Дайте также алгебраическое решение.

15. Начертите главные лучи, исходящие из объекта, находящегося в 15 см от зеркала с фокусным расстоянием 10 см. Рассчитайте расстояние до изображения. Чему равен радиус кривизны зеркала?

16. Начертите главные лучи, выходящие из объекта, находящегося в 8 см от зеркала с радиусом кривизны 20 см. Рассчитайте расстояние до изображения. Покажите на рисунке, каким образом и откуда глаз может увидеть это изображение.

17. Оптики измеряют оптическую силу линз в единицах, называемых диоптриями. Оптическая сила в диоптриях равна обратному значению фокусного расстояния, выраженному в метрах. Например, собирающая линза с фокусным расстоянием 0,50 м – это линза в +2 дптр. В случае симметричной двояковыпуклой линзы, изготовленной из стекла с показателем преломления $n = 1{,}5$, чему должен быть равен радиус кривизны поверхностей для получения оптической силы +5 дптр?

18. При съемке некоторой сцены получается правильная экспозиция, если относительное отверстие объектива $F = 16$ и время выдержки 2 с. Если открыть диафрагму до $F = 2$, какую выдержку нужно взять? Как это повлияет на глубину резкости?

19. Чему равно относительное отверстие F для человеческого глаза при ярком освещении, когда диаметр зрачка равен всего 2 мм?

20. Рассчитайте двухлинзовый микроскоп со 100-кратным увеличением и сделайте в масштабе чертеж главных лучей.

21. Рассчитайте телескоп с двумя собирающими линзами, дающий 100-кратное увеличение, и сделайте в масштабе чертеж главных лучей.

22. Постройте ход лучей через объектив телескопа, в поле зрения которого находятся две удаленные звезды.

23. Постройте ход лучей в лупе, дающей 5-кратное увеличение.

24. Отражатель, составленный из двух расположенных под прямым углом друг к другу плоских зеркал, обладает особыми свойствами.

Сделайте масштабный чертеж такого зеркала и постройте лучи, выходящие из объекта, имеющего форму стрелки. Проследите за лучами, которые идут сначала к одному из зеркал, а затем к другому. Где расположено изображение?

Будет ли у него левое заменено правым, как на изображениях в обычном плоском зеркале?

25. Рассеивающая линза с расстоянием до мнимого фокуса, равным 6 см, расположена в 9 см от объекта. Начертите с соблюдением масштаба главные лучи и найдите изображение.

ГЛАВА 18. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

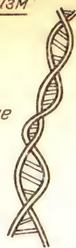
В главе 1 мы подчеркивали, что в определенном смысле мир устроен очень просто. Для понимания строения атомов и ядер существенны всего несколько типов частиц, поведение которых подчиняется небольшому числу законов и которые взаимодействуют друг с другом только четырьмя различными путями. Известны следующие типы физического взаимодействия: гравитационное, электромагнитное, сильное ядерное и слабое ядерное. Выше уже были описаны некоторые свойства гравитационного взаимодействия.

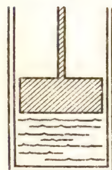
В главе 23 мы узнаем о том, что известно и что неизвестно о сильном и слабом взаимодействиях. Здесь и в нескольких последующих главах мы поговорим об электромагнитных эффектах.

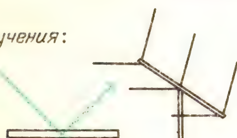
Прежде всего обратите внимание, что мы объединяем электричество и магнетизм в одно явление. Именно так устроена природа. Хотя мы начнем с изучения чисто электрических явлений, но обнаружим позднее, что магнетизм может вызываться электрическими токами. Это не совсем тот случай, когда одно явление вызывается другим. Как мы в конце концов увидим, можно переходить от магнитных эффектов к электрическим и обратно, просто изменяя систему отсчета. То, что является магнитным полем для одного наблюдателя, может быть электрическим полем для другого. Электромагнитные силы зависят от относительной скорости источника и наблюдателя.

Электромагнитное взаимодействие ответственно за большинство явлений повседневной жизни. Конечно, здесь, на Земле, для нас очень важна гравитация, а вот эффекты сильного и слабого ядерных взаимодействий настолько глубоко запрятаны в атомном ядре, что мы редко испытываем их действие или являемся их свидетелями. (Когда мы имеем дело с радиоактивностью, то сталкиваемся как с сильным, так и со слабым взаимодействиями.) С другой стороны, электромагнитное взаимодействие ответственно за удерживание электронов и ядер друг около друга и образование атомов, ответственно оно также и за различные типы молекулярных связей. Полярная связь, водородная связь, силы Ван-дер-Ваальса, ковалентная связь – все это электромагнитные эффекты. Только геометрия и структура атомов приводят к явно различимым эффектам.

Но если молекулярные силы имеют электромагнитную природу, то почти наверняка все биологические явления определяются электромагнетизмом, в том числе вы и я. Взаимодействия внутри биологических клеток, так же как и сигналы, которыми они обмениваются, являются электромагнитными. Силы в повседневной жизни также имеют электромагнитный характер, хотя мы и классифицируем их как мускульные, гидро- и аэростатические, упругие или силы теплового расширения. Далее, электромагнитная энергия может излучаться. Мы сталкиваемся с этим в форме света, теплового и рентгеновского излучений, радио и телевидения. Даже звук можно рассматривать как электромагнитное явление, поскольку волны давления в воздухе или твердых телах вызываются колебаниями плотности атомов или молекул, а эти атомные и молекулярные силы являются электромагнитными по своей природе.







Ясно, что невозможно описать эти явления все сразу. Вместо этого поделим мир электромагнитных явлений на три царства. В первом из них электрические заряды, которые являются источниками взаимодействия, будут находиться в покое как друг относительно друга, так и относительно наблюдателя. В главе 19 познакомимся со вторым царством и узнаем, как обращаться с электрическими зарядами, которые движутся с постоянной средней скоростью в электрической цепи. Этот раздел обычно называется «электрический ток». В главе 20 встретимся с другими свойствами электрических зарядов, движущихся с постоянной скоростью. В главах 21 и 22 узнаем, что происходит, когда электрические заряды движутся не с постоянной скоростью. В этом третьем царстве движущихся с ускорением зарядов энергия излучается в пространство.

Итак, давайте выясним, как получать эти электрические заряды, и посмотрим, какое воздействие они оказывают друг на друга, когда остаются неподвижными. Этот раздел называется *электростатикой*.

ЗНАКОМСТВО С ЯВЛЕНИЯМИ

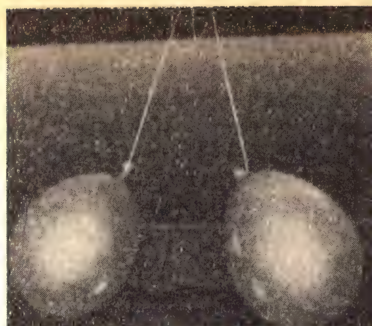
Познакомиться с явлениями электростатики не составляет никакого труда, особенно в сухую погоду. Если вы снимаете свитер, сдергиваете с постели одеяло или идете по ковру, вы превращаетесь в слабое подобие Зевса-громовержца. Проскакивают крошечные искры, слышится потрескивание воздуха. В очень сухой день на толстом ковре вы представляете опасность для себя и для своих друзей.

Вот несколько способов познакомиться с электростатическими эффектами на более последовательной основе.

1. Надуйте небольшой воздушный шар, и у вас будет превосходный источник отрицательных электрических зарядов. Потрите шар о шерсть или мех,

или, лучше всего, о свои волосы, и вы обнаружите, что шар будет прилипать к телу, о которое вы его потерли, и буквально ко всему остальному, включая ближайшую стену. В этом конкретном случае, как и во всех остальных, которые будут описаны, совершенно не обязательно сильно тереть предметы друг о друга. Разделение электрических зарядов происходит и в результате контакта между двумя различными материалами. При трении двух тел друг о друга просто увеличивается область контакта.

2. Надуйте другой шар, лучше всего такой же, как и первый, и подвесьте оба шара с помощью нитей к одной и той же точке на потолке. Сначала шары сойдутся вместе. Теперь потрите каждый из них шерстью или о свои



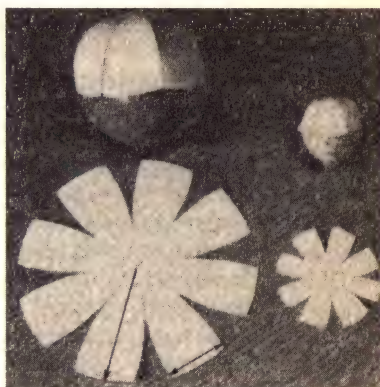
волосы и понаблюдайте, что произойдет.

3. Нарежьте небольшие кусочки бумаги и алюминиевой фольги. Площадь каждого из кусочков должна быть меньше 1 квадратного сантиметра, но некоторые из них сделайте длинными и узкими. Проведите расческой по своим волосам, а затем поднесите ее вплотную к кусочкам бумаги и фольги.

4. Обмотайте конец небольшого кусочка алюминиевой фольги нейлоновой или полиэфирной нитью. Скомкайте фольгу в небольшой шарик и подвесьте его на некотором расстоянии от других тел. Потрите воздушный шар или вашу расческу шерстью и поднесите к маленькому шарику из алюминиевой фольги. То, что при этом произойдет, выглядит довольно сложно. Понаблюдайте за последовательностью происходящего. Повторите опыт, предварительно коснувшись пальцами шарика из фольги.

5. Чтобы следить за доводами, которые будут приводиться дальше в этой главе, необходимо знать формулы для площади поверхности цилиндра и шара. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $2\pi Rh$, где R – радиус цилиндра, а h – его высота. Площадь поверхности шара равна $4\pi R^2$. Заметьте, что в обоих случаях размерность равна квадрату длины – необходимое условие формулы для площади.

Эти соотношения настолько важны, что вам следовало бы убедиться в их справедливости своими собственными руками. Возьмите два небольших цилиндра, причем радиус одного из них должен быть примерно вдвое больше радиуса другого, и оберните их бумагой. Измерьте площадь бумаги, которая соответствует площади боковой поверхности цилиндра. В частности, сравните отношение этих площадей для обоих цилиндров с отношением их радиусов. Проделайте то же самое с двумя мячами, такими как мячи для гольфа и для настольного тенниса. Конечно, трудно заставить плоский лист бумаги принять сферическую форму. Попробуйте обернуть бумагой только половину каждого



Диаметр мяча для гольфа (слева) вдвое больше диаметра мяча для настольного тенниса (справа)

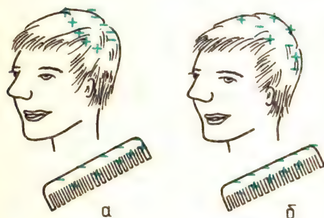
мяча, делая сгибы или разрезы на бумаге, пока она не примет приблизительно сферическую форму. Снова посмотрите, действительно ли площадь использованной бумаги соответствует тому, что требуется формулой. Сравните соотношение площадей двух кусков бумаги с отношением радиусов мячей.

ИЗОЛЯЦИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЗАРЯДА

В главе 9 отмечалось, что в первом издании Британской энциклопедии, вышедшем в 1771 году, энергии посвящено только два предложения. Наше современное представление об энергии возникло лишь 80 лет спустя. А вот раздел, посвященный *электричеству*, занимает многие страницы, причем содержит повторяющиеся ссылки на исследования Бенджамина Франклина. Согласно этому первому изданию Британской энциклопедии, «слово «электричество» означает в целом эффекты исключительно неуловимой жидкой материи, отличной по своим свойствам от всех других

жидкостей, которые нам известны. Эта жидкость способна соединяться почти со всяким телом, но с бо́льшей готовностью соединяется с некоторыми специфическими телами, чем с другими; ее движение поразительно быстро. Оно управляется особыми законами и приводит к огромному разнообразию отдельного явления».

Многие из наших современных представлений об электричестве уже существовали к тому времени, когда писался этот раздел. Было известно, что некоторые вещества являются хорошими *проводниками* для электрической жидкости, а другие являются *диэлектриками*. Бенджамин Франклин предположил, что многие примеры как притяжения, так и отталкивания *заряженных* тел можно объяснить на основе представлений об избытке или недостатке электрической жидкости. Когда электрод обладает избытком электрической жидкости, его считают положительным и обозначают знаком плюс, и наоборот. Франклин описал электрические заряды в терминах плюса и минуса, поскольку два тела, которые первоначально были электрически нейтральными, можно сделать заряженными, потерев друг о друга. Заряд на



Перед потиранием расчески о волосы количество положительных и отрицательных зарядов на волосах и расческе одно и то же (*а*); **после** потирания расчески о волосы на последних появляется положительный заряд, а на расческе – отрицательный (*б*)

одном теле совершенно отличен от заряда на другом, так как, хотя эти тела притягиваются друг к другу, каждое из них будет отталкивать одноименно заряженное тело. Более того, эти два тела можно привести в соприкосновение, так что они становятся снова нейтральными, или с нулевым зарядом. То, что заряды называют положительными и отрицательными, объясняет начальную и конечную нейтральность и подчеркивает, как потирание друг о друга тел из разных веществ приводит к разделению зарядов, которые вначале существовали вместе. Если к этому добавить правило,

что одноименные заряды отталкиваются, а разноименные – притягиваются, то многие электростатические явления могут быть объяснены – по крайней мере качественно.

Франклин произвольно назвал «отрицательным» заряд, который появляется на твердом каучуке, если его потереть о шерсть или волосы. Соответственно шерсть или волосы заряжаются положительно. Когда стекло потирают о шелк, то стекло приобретает положительный заряд, а шелк – отрицательный.

Вопрос 18-1
Объясняет ли модель Франклина, что происходит, когда вы подносите заряженную расческу к маленькому алюминиевому шару, подвешенному на нейлоновой нити?

СОВРЕМЕННОЕ ОБЪЯСНЕНИЕ РАЗДЕЛЕНИЯ ЗАРЯДОВ

В настоящее время электростатические эффекты объясняются с помощью представления о переносе электронов с одного вещества на другое. Твердый каучук при потирании его предметом из любого другого вещества будет захватывать электроны; таким образом, в соответствии с представлениями, развитыми Франклином свыше 200 лет назад, электроны обладают отрицательным электрическим зарядом. Поскольку, как сейчас известно, электроны

являются носителями заряда в металлических проводниках, то иногда возникает вопрос, течет ли ток в направлении движения электронов или в направлении движения положительного заряда. По

существующему соглашению, *за направление тока принимается направление движения положительных зарядов.* Не следует, однако, упрекать Бенджамина Франклина. В полупроводниках, газоразрядных трубках и электролитических ваннах носителями тока могут быть и положительно, и отрицательно заряженные частицы.

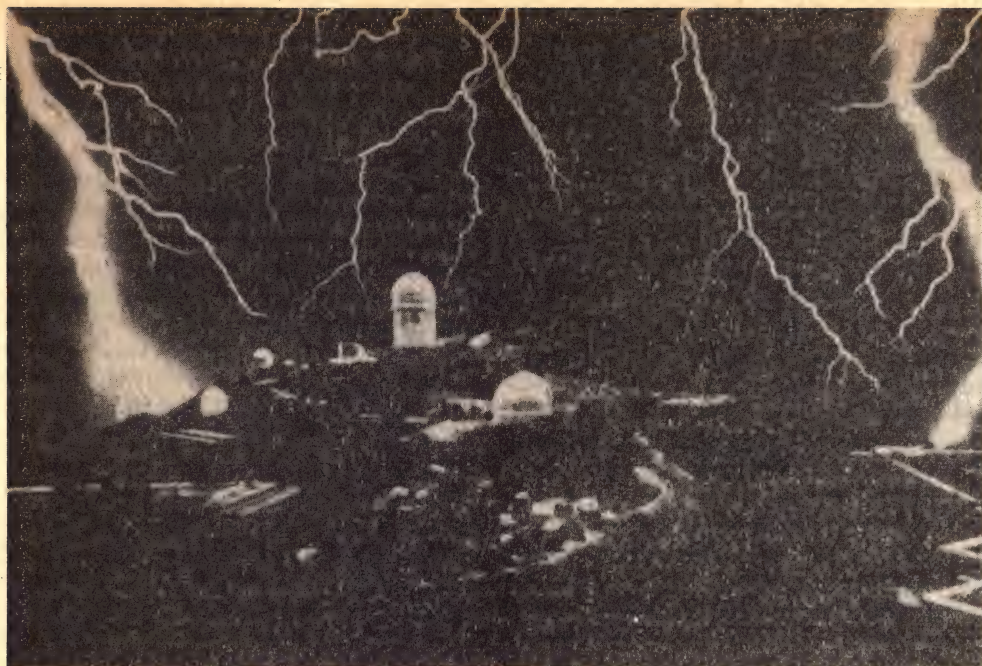
Воспользуемся современными представлениями о микроструктуре вещества для того, чтобы объяснить некоторые широко известные электростатические явления. Наружные электроны атомов часто очень слабо привязаны к своему ядру. Если два атома сближаются, то наружные электроны могут изменить свою конфигурацию и связать атомы в молекулу, но может случиться и так, что один атом просто «украдет» электрон у другого. Например, молекулы кислорода имеют тенденцию подхватывать лишние электроны, образуя отрицательно заряженные кислородные ионы. В той или иной степени все вещества обладают способностью присоединять электроны независимо от того, являются ли они проводниками или диэлектриками. Однако в большей степени это присуще хорошим диэлектрикам, таким как эбонит, волосы или пластмасса. Причина этого заключается в том, что электроны, попавшие на диэлектрик, оказываются локализованными в определенном месте; если они взяты из некоторой области, то она оказывается заряженной положительно.

Если потереть мехом кусок металла, то этот кусок также захватит электроны, однако они разбегаются по всей поверхности. Если вы держите металл в руках, электроны разбегутся через ваше тело. Если не держать металл с помощью диэлектрика, то электрические эффекты будут незаметны. Обратите, однако, внимание на то, что хотя ваше тело относительно большое и является довольно хорошим проводником электричества, но шаркая ногами по ковру, вы можете нахватать достаточно электронов для того, чтобы ваше тело оказалось сильно заряженным. Если при этом прикоснуться к другому человеку или к дверной ручке, то заряды ускользнут, создавая искру.

СТАТИЧЕСКОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСТВО В ПРИРОДЕ

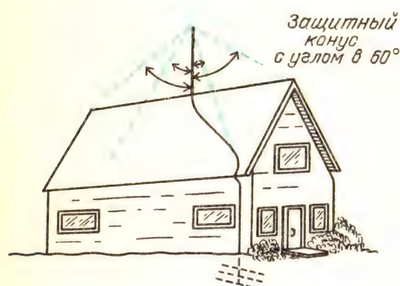
Разделение электрических зарядов может приводить к драматическим эффектам в природе. Почти любое вещество, которое скользит или проносится мимо других объектов, захватывает или теряет электроны. Когда это происходит с поднимающимися или падающими каплями воды в облаках, одна часть облака может оказаться отрицательно заряженной по отношению к другой части или земле. Когда концентрация зарядов в некоторой области становится достаточно высокой, часть зарядов уносится, образуя проводящую дорожку к земле или другой части облака. Такой пробой происходит быстро, поднимая температуру проводящей дорожки до значения, когда наблюдается свечение, и создавая область высокого давления, которая, распространяясь во все стороны, вызывает гром. Главная светящаяся стрела молнии пробегает по дорожке, созданной «лидером». «Лидер» прокладывает дорогу вниз к земле, следуя по наиболее легкому для пробоя пути, иногда обрываясь на полпути, как видно на рисунке на с. 146.

Штырь молниеотвода на здании не предотвращает удара молнии, а обеспечивает безопасный путь к земле для любой стрелы молнии, оказавшейся рядом со штырем. Проволока, соединяющая штырь с влажной землей, должна быть достаточно массивной, чтобы не сильно нагреваться при проскальзывании молнии. Штырь молниеотвода создает защитный конус с углом около 60° для всего находящегося под ним. Штырь не разряжает облака, которое обычно на-



Многочисленные вспышки разветвленной мо[illegible]зицией над обсерваторией Кит Пик

ходится гораздо выше. Не оказывает он и никакого влияния на то, что молния может оборваться в какой-либо точке небосвода, хотя острый конец штыря



Штырь [illegible] проволокой [illegible]

и может создавать небольшое локализованное облако заряженного воздуха вокруг себя, увеличивая таким образом защищенную область.

Электростатические эффекты могут служить помехой в некоторых промышленных процессах, как, впрочем, и в быту. В любом процессе, где участвуют движущиеся части вещества или движется зерно или жидкость, происходит разделение зарядов. Если сдернуть ночью шерстяное одеяло, то можно заметить, как блеснет вся поверхность. Одна из опасностей при транспортировке зерна в элеватор связана с тем, что в результате разделения зарядов в атмосфере, заполненной горячей пылью, может проскочить молния.

С другой стороны, при производстве абразивной бумаги электростатические эффекты играют положительную роль. Вместо того чтобы посыпать намазанную клеем бумагу абразивным зерном, зерно помещается под бумагой и подскакивает к липкой стороне бумаги благодаря электростатическому притяжению, создаваемому в нужном месте.

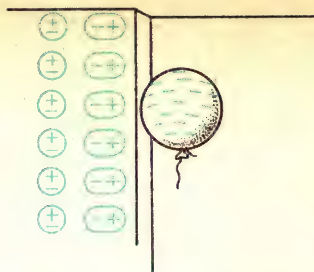
В этом процессе абразивные зерна выстраиваются в требуемом направлении, образуя острую абразивную бумагу. (Вспомните, как клочки бумаги подпрыгивали навстречу заряженной расческе.)

ЛОКАЛЬНОЕ СМЕЩЕНИЕ ИЛИ ИСКАЖЕНИЕ ЗАРЯДОВ

Когда вы проделываете электростатические опыты в лаборатории или опыты, описанные в «Знакомстве с явлениями», то разделение зарядов обычно производится с помощью изоляторов, таких как расческа или кусок пластмассы. Если коснуться чего-нибудь изолятором, то нарушение в распределении зарядов происходит только в месте контакта. Фактически в этих точках проскакивают маленькие искры, очищая от зарядов небольшие области вокруг каждой точки. Если вы хотите перенести

большой заряд от изолятора к металлическому детектору, то необходимо в буквальном смысле «соскрести» заряд с диэлектрика на металл.

В «Знакомстве с явлениями» вы могли убедиться в том, что разноименные заряды притягиваются, а одноименные – отталкиваются. Вы должны были также наблюдать, что заряд любого знака притягивает к себе незаряженное тело. Например, заряженный надутый резиновый шар можно положить на нейтральную стену; заряженная расческа притягивает крошечные кусочки проводящей фольги или клочки бумаги, которые не заряжены. Объяснение на основе микроструктуры вещества заключается в том, что связанные электроны в нейтральном в целом веществе сдвигаются либо к подносимому заряженному телу, либо от него. Когда отрицательно заряженный резиновый шар приближается к стене, он искажает положение электронов в молекулах стены таким образом, что под действием отталкивающих сил электроны удаляются настолько, насколько это возможно. В действительности электроны не дви-



жутся сквозь стену, если только стена не сделана из проводящего материала, но конфигурация молекул искажается таким образом, что поверхность стены оказывается заряженной положительно, т. е. имеет знак, противоположный знаку заряда подносимого шара. Возникает как раз такая ситуация, в которой подносимое заряженное тело притягивается к стене. На рисунках показано, как можно использовать эти эффекты для того,

При зарядке **прикосновением** искра переносит отрицательный заряд расчески на ранее нейтральный алюминиевый шар, который заряжается отрицательно. При зарядке **индукцией** отрицательно заряженная расческа близко подносится к нейтральному шару (*а*); при прикосновении к шару пальцем отрицательный заряд стекает на палец, оставляя на шаре положительный заряд (*б*); убирая сначала палец, а затем – расческу, получаем на шаре положительный заряд

чтобы зарядить детектор (шар) либо одноименно, либо разноименно с подносимым заряженным телом (расческой).

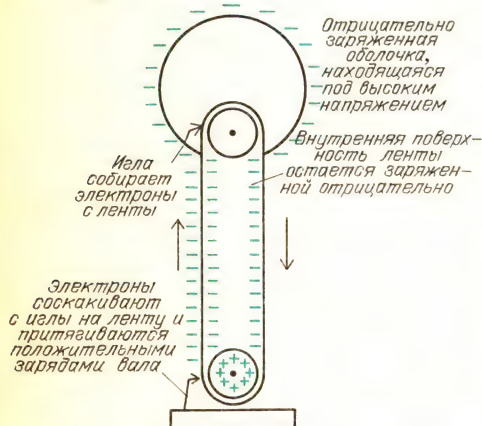
Вопрос 18-2

Описанные электростатические эффекты гораздо лучше получаются зи-

мой, чем летом. Почему так происходит? Ведь очевидно, что заряды одинаково хорошо разделяются в любое время года.

ПРИМЕНЕНИЕ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ В НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

Существует практическое применение электростатики, в котором объединены многие из рассмотренных выше аспектов с целью создания устройства, которое используется и как игрушка, и как инструмент для исследований. Это так называемый генератор Ван-де-Граафа. На рисунке показана схема устройства, которое можно использовать и как



игрушку, и как школьный демонстрационный прибор. Электрические заряды распыляются на движущуюся ленту и поднимаются наверх в изолированный купол, где они накапливаются. В исследовательских машинах заряды распыляются на ленту с игл, находящихся под высоким напряжением. Электроны можно как распылять на ленту, так и собирать с нее, заряжая ленту и купол отрицательно или положительно. В большинстве настольных машин резиновая лента приводится в движение валом, на который она надета и который поставляет электроны на внутреннюю поверхность ленты в области контакта ленты с вращающейся осью. Таким образом, внутренняя поверхность ленты заряжается отрицательно, а электроны не могут мигрировать сквозь резину к наружной поверхности ленты. Тем временем проволока, прикрепленная к основанию машины с внешней стороны ленты близко от вращающейся оси, «видит» на *валу* большой *положительный* заряд. Электроны «прыгают» с проволоки в направлении положительно заряженного вала, но, конечно, попадают на внешнюю поверхность ленты. Затем они поднимаются с лентой наверх, пока не оказываются внутри металлического купола; в этом месте они «спрыгивают» на иглу, соединенную с внутренней поверхностью металлического купола и немедленно разбегаются по внешней поверхности купола. Эта последовательность событий приводит к тому, что внешняя поверхность купола заряжается отрицательно. Электроны попадают в эту отрицательно заряженную область благодаря механическому передвижению ленты.

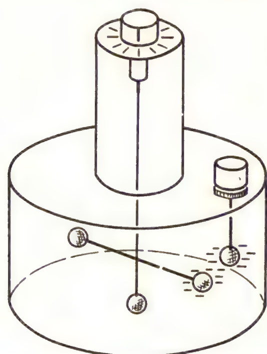
Вопрос 18-3
Когда купол накопит большое число электронов, он обладает большим отрицательным зарядом. Почему при этом электроны должны соскакивать с ленты на собирающую заряд иглу внутри купола? Если эта игла заряжена отрицательно, то почему электроны не отталкиваются от нее и не остаются на ленте?

«Игрушечный» генератор Ван-де-Граафа может поднять напряжение до 20 000 вольт или даже выше, образуя искры длиной в несколько сантиметров. Некоторые из исследовательских генераторов Ван-де-Граафа способны создавать напряжение порядка десяти миллионов вольт.

КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ СООТНОШЕНИЯ В ЭЛЕКТРОСТАТИКЕ – ЗАКОН КУЛОНА

До сих пор мы говорили о качественных электростатических эффектах. Чтобы исследовать явление глубже, необходимо найти количественные закономерности. Как измерить электрический заряд? Как влияет расстояние между электрическими зарядами на их взаимодействие? Ответы на эти вопросы были найдены различными иссле-

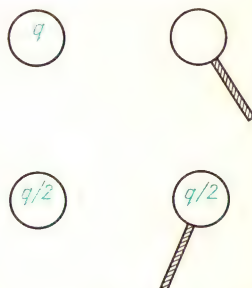
дователями в течение двух последних десятилетий восемнадцатого века. Ученым, с именем которого ассоциируется открытие закона электростатики, был француз Шарль Кулон (1736–1806). Он изготовил очень чувствительные крутильные весы, в целом похожие на те, с помощью которых Кавендиш измерил гравитационную постоянную. Ему пришлось изготовить и тщательно откалибровать очень тонкую проволоку для подвеса. Далее необходимо было исключительно надежно изолировать накопитель электрического заряда и измерительную систему. Кулон сумел построить достаточно хороший прибор,



Крутильные весы Кулона. Заряженный шар на конце вертикального стержня неподвижен, горизонтальный стержень подвешен на нити, которая закручивается при взаимном отталкивании двух заряженных шаров. Поворачивая вверху головку прибора, можно закрутить нить в другую сторону. Вращающий момент силы при заданном угле закручивания измеряется отдельно

который позволил ему обнаружить, что электростатическая сила обратно пропорциональна квадрату расстояния между центрами заряженных шаров. В действительности Кавендиш в Англии для собственного удовлетворения обнаружил этот закон на несколько лет раньше, но не опубликовал эти свои результаты. К этому времени большинство ученых уже предполагали, что сила взаимодействия зарядов должна зависеть обратно пропорционально квадрату расстояния между ними, поскольку аналогичный закон Ньютона был надежно установлен для гравитации. Точность измерений Кулона не была высокой, но по крайней мере была достаточной для того, чтобы показать правдоподобность закона обратных квадратов.

Кулон получал равные заряды (или известные доли первоначальных зарядов) на двух различных шарах с помощью следующей процедуры. Если электрический заряд (неизвестной величины) сообщается маленькому металлическому шару, который затем приводится в соприкосновение с таким же нейтральным металлическим шаром, то заряд делится между ними поровну. Если затем шары удаляются друг от друга, то



каждый из них обладает зарядом, равным половине первоначального заряда. Таким путем Кулон смог измерить силу взаимодействия двух шаров, имеющих одинаковые заряды.

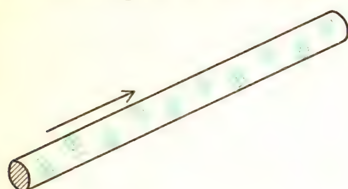
Вопрос 18-4
С помощью какой процедуры Кулон мог определить силу взаимодействия между шарами, заряды которых равнялись половине первоначально использованного заряда?

Кулон обнаружил, что сила взаимодействия между двумя заряженными шарами пропорциональна произведению их зарядов. Обозначив коэффициент пропорциональности через k, этот закон можно записать в виде

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

Значение коэффициента пропорциональности зависит от тех единиц, в которых измеряется электрический заряд. Сейчас нам известно, что электроны и протоны являются носителями наименьших существующих отрицательных и положительных зарядов, поэтому может показаться разумным выбрать заряд электрона в качестве единицы заряда. Этот

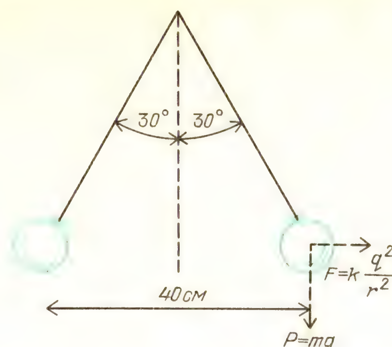
заряд, однако, очень мал и, частично по историческим причинам, в качестве единицы заряда был выбран заряд гораздо большей величины. Его назвали *кулон*, обозначив символом Кл. Как мы увидим в главе 20, кулон определяется с помощью единицы электрического тока, поскольку ток представляет собой движение электрических зарядов. Соотношение между ними таково: когда электрический заряд в 1 кулон проходит через поперечное сечение проводника за 1 секунду, то электрический ток равен 1 амперу: 1 А = 1 Кл/с. В 100-ваттной лампочке при $U = 127$ В, например, электрический ток равен примерно 1 амперу. Таким образом, чтобы измерить кулон, нужно знать, как измерить ампер. Примем это определение на веру до главы 20. При таком определении кулона постоянная «k» в законе Кулона численно равна $9 \cdot 10^9$ *).



Ток в проволоке создается движением отрицательно заряженных электронов

ВЕЛИЧИНА ЗАРЯДОВ, КОТОРЫЕ МЫ СОЗДАЛИ

Теперь можно вычислить, насколько большие заряды нам удалось создать при выполнении опытов, описанных в «Знакомстве с явлениями». Например, когда надувные шары подвешивались на нитях в одной и той же точке, а затем им сообщались статические заряды, шары отскакивали друг от друга. Каков характерный заряд каждого шара? Прежде всего, предположим, что шары одинакового размера и на каждом из них имеется примерно одинаковый отрицательный заряд, равномерно распределенный по поверхности. Нужно также предположить, что сила взаимодействия шаров зависит от расстояния между их центрами. В дальнейшем это предположение будет подтверждено. На рисунке



показано положение двух подвешенных шаров в случае, когда угол между нитями составляет 60°. (Угол, который вы наблюдали, мог быть и меньшим, и большим, но здесь мы интересуемся только порядком электрического заряда.) На каждый шар действует направленная вниз сила тяжести и горизонтальная сила электростатического отталкивания. Эти силы образуют катеты прямоугольного треугольника с острыми углами в 30° и 60°. Следовательно, электростатическая сила составляет примерно половину силы тяжести шара. Масса типичного шара равна нескольким граммам. Поэтому предположим, что его сила тяжести равна 0,04 ньютона ($4 \cdot 10^{-3}$кг $\cdot$ 9,8 Н/кг). Сила электростатического отталкивания между шарами должна, следовательно, равняться 0,02 ньютона. В конфигурации, изображенной на рисунке, расстояние между центрами шаров составляет около 40 см. Подставим все эти числа в закон Кулона и найдем порядок электрического заряда шара:

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{q^2}{(0{,}4\ \text{м})^2},$$

$$q^2 = \frac{3{,}2 \cdot 10^{-3}}{9 \cdot 10^9} \approx \frac{1}{3} \cdot 10^{-10},$$

$$q \approx 0{,}5 \cdot 10^{-6}\ \text{Кл}.$$

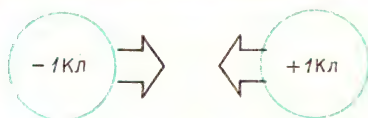
Обратите внимание, что заряд на каждом шаре меньше, чем микрокулон, т. е. меньше одной миллионной доли кулона: 1 мкКл = $1 \cdot 10^{-6}$ Кл. Дело выгля-

*) Здесь и в дальнейшем автор не приводит размерность k (Н·м²/Кл²) даже в тех формулах, где единицы других величин указаны явно. (*Примеч. пер.*)

дит таким образом, как будто за единицу заряда выбрана слишком большая величина. (Изолированный заряд в 1 кулон – это огромный заряд.) Мы будем сталкиваться со схожими ситуациями все время по мере изучения электричества и магнетизма. Величина, которая была бы подходящей в одном разделе электромагнетизма, будет неудобной в другом. В первом разделе (электростатике) большинство фигурирующих зарядов составляют по порядку величины микрокулоны. Во втором разделе (электрическом токе) по проволоке каждую секунду проходит много кулонов заряда.

Вопрос 18-5

Предположим, что было бы возможно сообщить одному шару положительный заряд в 1 Кл, а другому – отрицательный заряд такой же

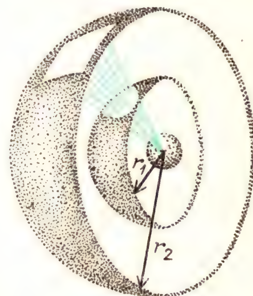


величины. Какой была бы сила взаимодействия шаров при расстоянии между ними в 1 м?

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

В своей простейшей форме закон Кулона справедлив только для силы взаимодействия между точечными зарядами или равномерно заряженными шарами. Обратно пропорциональная зависимость силы взаимодействия от квадрата расстояния выражает геометрические свойства пространства так же, как и в случае гравитационного притяжения между шарами. Если влияние (или воздействие) распространяется из точки или равномерно с поверхности шара, причем без затухания или поглощения, то мера воздействия, приходящегося на *единицу площади* (единичную площадку), обратно пропорциональна квадрату расстояния от центра источника. Причина этого в том, что площадь поверхности расширяющейся сферы влияния равна $4\pi r^2$. Поскольку воздействие, проходящее через поверхность каждой концентрической сферы, все время одно и то же, а площадь поверхности сферы пропорциональна r^2, то воздействие, приходящееся на единицу площади, должно быть пропорционально $1/r^2$.

Пока мы никак не объяснили, каким образом одно тело влияет на другое, удаленное от него на некоторое расстояние. Может быть, одно тело выстреливает чем-нибудь в другое? Если это так, то требуется ли некоторое время для того, чтобы влияние распространилось от одного тела к другому?



$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{4\pi r_2^2}{4\pi r_1^2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

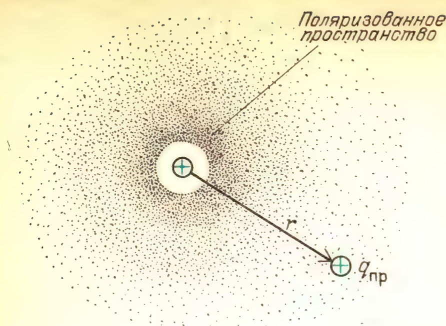
Одно и то же воздействие проходит и через наружную, и через внутреннюю сферы; тогда

$$\frac{\text{воздействие/площадь } S_1}{\text{воздействие/площадь } S_2} = \frac{4\pi r_2^2}{4\pi r_1^2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

Если $r_2 = 2r_1$, то

$$\frac{\text{воздействие/площадь } S_1}{\text{воздействие/площадь } S_2} = \frac{(2r_1)^2}{r_1^2} = 4$$

Очень полезная модель для объяснения статических эффектов (когда тела не движутся друг относительно друга) заключается во введении «поля» влияния. Такая модель была остроумно развита Майклом Фарадеем в начале девятнадцатого века. Вместо того чтобы спрашивать, каким образом одна заряженная частица воздействует на другую, Фарадей описал влияние, которое один заряд или несколько зарядов оказывают в каждой точке пространства. Он предположил, что присутствие электрических зарядов приводит к электрической поляризации пространства. Полное влияние поляризованного пространства в определенной точке можно обнаружить, помещая в нее единичный пробный заряд и измеряя действующую на него силу.



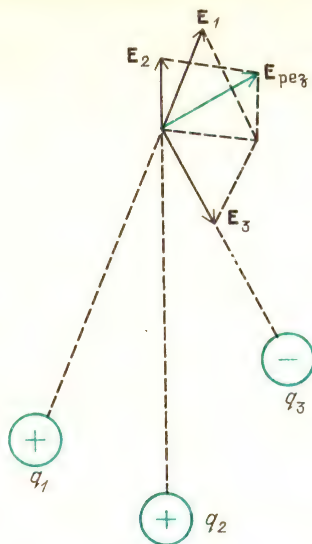
Напряженность поля в этой точке определяется тогда как сила, действующая на единичный пробный заряд, помещенный в этой точке:

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}/q_{пр}.$$

В используемых нами единицах напряженность поля измеряется в ньютонах на кулон.

Вопрос 18-6
Если электрическое поле измеряется в ньютонах на кулон, то, очевидно, пробный заряд должен равняться 1 Кл. Однако если воспользоваться пробным зарядом такой величины, то не приведет ли это к нарушению положения всех тех электрических зарядов, действие которых вы пытаетесь измерить?

Обратите внимание на то, что модель «поля» влияния объясняет взаимодействие между заряженными частицами в два этапа. Сначала вычисляется влияние одного заряда в той точке пространства, где находится другой заряд. Первый заряд создает в этой точке определенную напряженность поля. Второй заряд испытывает воздействие поля как силу, равную произведению напряженности поля на модуль своего заряда. Какое преимущество имеет такая схема над простым законом Кулона? Как мы увидим, преимущество заключается в том, что иной мысленный образ может привести к новым концепциям и более простым математическим моделям. Если имеется много зарядов или они распределены довольно необычным образом, то можно начать с вычисления суммарного эффекта, который все эти заряды производит в определенной точке пространства. Каждая небольшая часть зарядов создает в этой точке свое электрическое поле. Чтобы найти полное поле в этой точке,



следует сложить *векторно* вклады различных зарядов.

Вопрос 18-7
Предположим, что два одинаковых электрических заряда расположены в точках A и B. Сначала вычислим электрическое поле, создаваемое зарядом A в точке B: $\mathbf{E}_{A-B}$. Действующая на заряд q_B сила должна быть равна $\mathbf{F}_B = \mathbf{E}_{A-B}q_B$. Однако заряд, находящийся в точке B, должен создавать свое собственное поле, которое действует на заряд в точке A. Равна ли полная сила взаимодействия между двумя зарядами сумме этих двух сил?

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ТОЧЕЧНЫХ ЗАРЯДОВ

Рассчитаем электрическое поле, создаваемое одним точечным зарядом или двумя точечными зарядами, расположенными близко друг от друга.

Напряженность E на расстоянии r от точечного заряда. Поскольку сила взаимодействия между зарядом q и единичным пробным зарядом $q_{пр}$ равна $F = k\,qq_{пр}/r^2$ и поскольку создаваемое зарядом q электрическое поле равно

$E = F/q_{пр}$, то

$$E = kq/r^2.$$

В таком простом случае на самом деле нет никакой необходимости в концепции электрического поля. Тем не менее найдем напряженность электрического поля на расстоянии 10 см от точечного заряда в 1 мкКл:

$$E = 9 \cdot 10^9 \frac{1 \cdot 10^{-6}\ \text{Кл}}{(1 \cdot 10^{-1}\ \text{м})^2} = 9 \cdot 10^5\ \text{Н/Кл}.$$

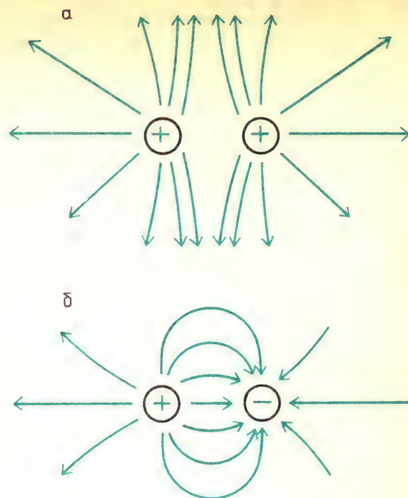
Напряженность поля составляет почти миллион ньютонов на кулон. Может показаться, что она необычайно велика для такого маленького заряда, используемого в качестве источника поля. Согласно формуле, если бы пробный заряд был равен 1 кулону, то он испытывал бы силу

$$F = q_{пр}E = 1\ \text{Кл} \cdot 9 \cdot 10^5\ \text{Н/Кл} = 9 \cdot 10^5\ \text{Н}.$$

Однако, как мы видели, пробный заряд не может достигать значения 1 кулон. Если в качестве пробного заряда использовать заряд в 1 микрокулон, то действующая на него сила составит

$$F = q_{пр}E = 9 \cdot 10^5\ \text{Н/Кл} \cdot 1 \cdot 10^{-6}\ \text{Кл} = 0{,}9\ \text{Н}.$$

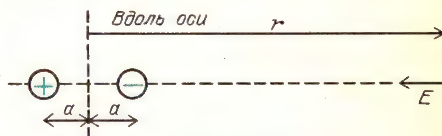
Напряженность E, создаваемая двумя точечными зарядами, находящимися на небольшом расстоянии друг от друга. Точечные заряды могут быть одноименными (оба положительными или оба отрицательными) или разноименными. Заметьте, что напряженность электрического поля — это вектор, и поэтому поля, создаваемые двумя зарядами, должны складываться векторно. На рисунке показаны линии напряженности (линии электрического поля), создаваемые одноименными и разноименными зарядами, одинаковыми по модулю и расположенными близко друг от друга. Такая конфигурация называется *диполем*. Линии электрического поля определяют направление силы, действующей на положительный заряд, помещенный в любую точку в окрестности диполя. Эти линии, однако, не совпадают с путями, по которым стали бы двигаться пробные заряды, поскольку направление движения тела зависит как от силы, которая на него действует в каждый момент, так и от уже имевшейся у него скорости.



Линии напряженности, создаваемые двумя одинаковыми по модулю зарядами: *а* — одноименными, *б* — разноименными

На приводимых ниже рисунках определяется напряженность электрического поля диполя в некоторых точках пространства — на прямой, проходящей через заряды, и на перпендикуляре, проходящем через середину отрезка, соединяющего заряды.

Обратите внимание, что напряженность поля диполя зависит от расстояния (от центра) в минус *третьей* степени. Напряженность пропорциональна ди-

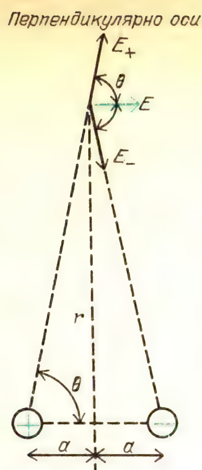


Напряженность электрического поля вдоль прямой, соединяющей заряды, равна

$$E = kq\left[\frac{1}{(r+a)^2} - \frac{1}{(r-a)^2}\right] = kq\frac{r^2 + a^2 - 2ar - r^2 - a^2 - 2ar}{(r+a)^2(r-a)^2}.$$

Если $r \gg a$, то $(r+a)^2 \to r^2$, $(r-a)^2 \to r^2$, тогда

$$E = -4k\frac{qa}{r^3} = -2k\frac{p}{r^3},\ \text{где}\ p = 2aq$$



Напряженность электрического поля вдоль перпендикуляра, проходящего через середину отрезка, соединяющего заряды, равна

$$E = 2k\frac{q}{r^2 + a^2}\cos\theta = 2k\frac{q}{r^2 + a^2}\frac{a}{\sqrt{r^2 + a^2}}.$$

Если $r \gg a$, то $r^2 + a^2 \to r^2$, тогда

$$E = k\frac{p}{r^3}, \text{ где } p = 2aq$$

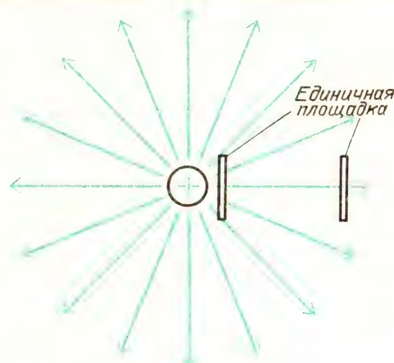
польному моменту, определяемому как $p = 2aq$. Дополнительный множитель в выражении изменяется от значения, равного единице, до двух, в зависимости от ориентации направления на точку относительно оси диполя.

ЗАКОН ГАУССА, СВЯЗЫВАЮЩИЙ E И q

Если бы мы попробовали с помощью векторного сложения определить суммарную напряженность поля, создаваемую в произвольной точке зарядами, распределенными на шаре, то вычисление оказалось бы очень сложным. (Его, однако, все-таки можно выполнить.) Для определенной геометрии распределения зарядов существует более простой способ вычисления напряженности поля. Для того чтобы воспользоваться этим способом, необходимо несколько конкретизировать картину линий электрического поля.

Исходя из мысленного образа линий электрического поля, Фарадей развил очень полезную модель. Не только направление силы, действующей на положительный пробный заряд в данной точке, определяется направлением линий поля, но и модуль этой силы может быть определен *густотой линий* вблизи этой точки. Такая схема уже имеет количественный смысл.

На рисунке видно, что линии напряженности расположены гуще вблизи заряда, создающего поле. На удалении от него, где поле слабее, на единицу площади (единичную площадку) приходится



меньше линий напряженности. Этой идее можно придать количественный характер, если положить, что напряженность электрического поля в любой области равна числу линий поля, проходящих через единичную площадку в этой области. Конечно, выбирая единичную площадку с целью пересчитать пересекающие ее линии напряженности,

Обе единичные площадки на рисунке одинаковы, но первую пронизывают четыре линии напряженности поля, вторую — две, тем не менее напряженность поля всюду одна и та же

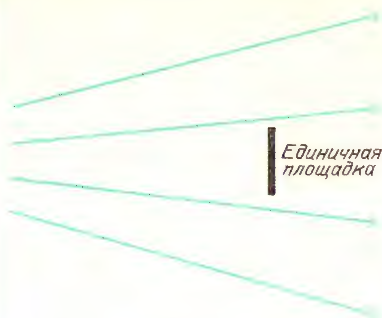
нужно позаботиться о том, чтобы ее поверхность была перпендикулярной направлению этих линий. Итак,

$$E = \frac{\text{число линий напряженности}}{\text{площадь поверхности}}.$$

Следовательно, число линий напряженности, пересекающих поверхность, равно произведению $E \cdot$площадь поверхности.

Вопрос 18-8

А что если выбрать единичную площадку далеко от заряда, создающего поле, как показано на рисунке?

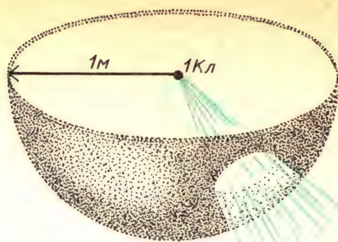


В этой области линии напряженности поля проходят далеко друг от друга. Ни одна из них не пересекает поверхность выбранной площадки. Означает ли это, что электрическое поле в этой области равно нулю?

Реакция большинства людей на эту модель линий поля заключается в том, что, может быть, эта модель и дает полезное качественное описание, но она выглядит слишком абстрактной для того, чтобы позволить проводить количественные расчеты. Оставайтесь при этом мнении на протяжении еще буквально нескольких строк, а затем вы увидите, какой могучий способ расчета может обеспечить развитие этой модели.

Предположим, что *одна линия напряженности электрического поля, приходящаяся на один квадратный метр,* соответствует единице напряженности поля, равной *одному ньютону на кулон.* Посмотрим, какое число линий выходит из каждого положительного заряда в 1 кулон. Если поместить заряд в 1 кулон в центр сферы радиусом 1 метр, то линии напряженности, направленные по радиусам, равномерно распределяются в пространстве, пересекая сферу перпендикулярно ее поверхности. Из закона Кулона следует, что напряженность поля, создаваемая зарядом в 1 кулон на расстоянии 1 метр, равна

$$E = k\frac{q}{r^2} = 9\cdot10^9\ \frac{1\ \text{Кл}}{(1\ \text{м})^2} = 9\cdot10^9\ \text{Н/Кл}.$$



Площадь поверхности сферы равна $4\pi r^2$. Поэтому если расстояние r равно 1 метру, то число линий напряженности, пересекающих сферу, должно равняться

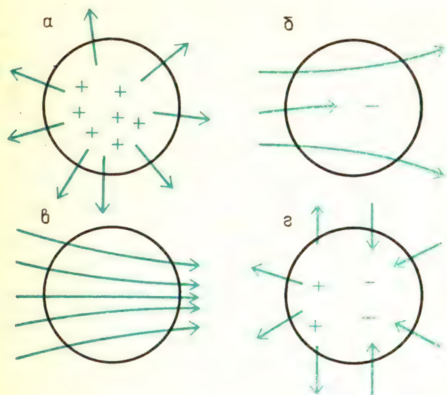
$$E\cdot\text{площадь поверхности} = E\cdot4\pi r^2 = 9\cdot10^9\ \text{Н/Кл}\cdot4\pi\ (1\ \text{м})^2 = 4\pi\cdot9\cdot10^9\ \text{линий напряженности.}$$

Может показаться, что из точечного заряда выходит невообразимое число линий. Конечно, кулон – это очень большой заряд, и, кроме того, обсуждается всего лишь математическая модель и действительное число линий напряженности зависит от использованных единиц измерения. Число линий электрического поля равно $4\pi\cdot9\cdot10^9 = 4\pi k$. При другом выборе единиц измерения (например, см вместо м) k будет иметь другое значение. Во всяком случае, используя это число, получим электрическое поле в принятых единицах.

Другая черта этой модели была описана Карлом Гауссом (1777 – 1855) в более общей форме, чем та, которую мы используем. Гаусс обнаружил тот простой факт, что полное число линий напряженности поля, выходящих через поверхность, ограничивающую трехмерный объем, должно быть связано с полным зарядом, находящимся внутри этого объема. Решающий момент здесь заключается в том, что линии электрического поля могут начинаться только на положительных зарядах и оканчиваться только на отрицательных. Они не могут начинаться или обрываться в пространстве. Поэтому если внутри некоторого объема нет электрического заряда, то полное число линий поля, входящих в этот объем и покидающих его, должно равняться нулю.

Если из объема выходит больше линий, чем входит в него, то внутри объ-

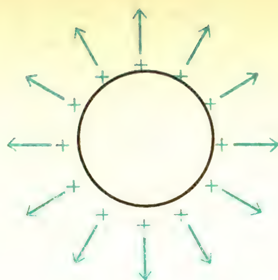
ема должен находиться положительный заряд (рис. *а*); если входит линий больше, чем выходит, то внутри должен быть отрицательный заряд (рис. *б*). Конечно, линии поля могут входить в объем, внутри которого суммарный заряд равен нулю, но в таком случае



Если внутри сферы положительный заряд, — линии напряженности выходят через поверхность (*а*); если внутри сферы отрицательный заряд, — входящих линий напряженности больше, чем выходящих (*б*); если внутри нет заряда или суммарный заряд равен нулю, — число входящих и выходящих линий напряженности одинаково (*в*, *г*)

они пронизывают его насквозь и снова выходят (рис. *в*). Эти простые соображения не зависят от того, как распределен электрический заряд внутри объема. Заряд может находиться в центре или вблизи одной из поверхностей. Более того, внутри объема может находиться множество зарядов, как положительных, так и отрицательных, расположенных в любой точке. Но только *суммарный* заряд определяет *полное* число входящих или выходящих линий напряженности. Применим эту теорему к трем характерным случаям пространственного распределения зарядов.

Напряженность E, создаваемая равномерно заряженным шаром. Если электрический заряд равномерно распределен по *поверхности* изолированного шара (или равномерно распределен по *объему* шара), то соображения симметрии требуют, чтобы линии напряженности были направлены радиально и равномерно распределены в пространстве. В конце концов, нет никаких причин для того,



чтобы с одной стороны шара было больше линий напряженности, чем с другой. Если бы эти линии были направлены не радиально, то была бы нарушена сферическая симметрия.

Вследствие этих соображений симметрии линии напряженности на некотором расстоянии от шара должны иметь такое же направление и пространственное распределение, как и в случае, когда они выходят из центра шара. Невозможно определить, выходят ли линии из заряда, равномерно распределенного по поверхности шара, или из такого же точечного заряда, помещенного в его центр.

Применим закон Гаусса для того, чтобы определить электрическое поле снаружи заряженного шара на расстоянии r от центра шара при условии, что радиус шара равен R. Опишем мысленно сферу радиусом r, концентрическую с заряженным шаром. Согласно закону Гаусса, полное число линий напряженности поля, проходящих через эту сферическую поверхность, пропорционально суммарному заряду внутри ограниченного ею объема.

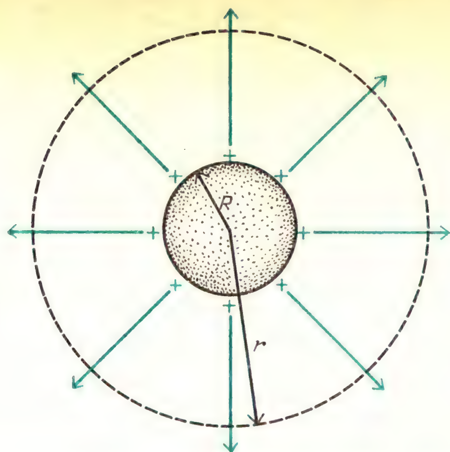
Полное число линий напряженности, выходящих через поверхность, равно

$$E = 4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 \ \ q = 4\pi kq.$$

Электрическое поле радиально и должно иметь одно и то же значение во всех точках поверхности бо́льшей сферы. По определению, напряженность электрического поля равна числу линий напряженности, приходящихся на единицу площади:

$$E = \frac{\text{число линий напряженности}}{\text{площадь поверхности}}.$$

В рассматриваемом случае полное число линий напряженности равно $4\pi kq$,



Полное число линий напряженности, выходящих через сферическую поверхность равно $4\pi kq$. Площадь этой сферической поверхности равна $4\pi r^2$. Напряженность в любой точке поверхности радиуса r равна

$$E = \frac{\text{число линий напряженности}}{\text{площадь поверхности}} = k\,\frac{q}{r^2}$$

а площадь поверхности сферы равна $4\pi r^2$. Поэтому

$$E = \frac{4\pi kq}{4\pi r^2} = k\,\frac{q}{r^2}.$$

Дополнительный материал

Закон Гаусса устанавливает, что электрическое поле, существующее снаружи равномерно заряженного шара, точно такое же, как и в случае, когда весь заряд сконцентрирован в центре шара. Этот результат вовсе не так очевиден. Ньютон столкнулся с подобной проблемой гораздо раньше, пытаясь вычислить силу гравитационного притяжения между Землей и Луной. Он предположил, что эта сила определяется расстоянием между их центрами, но ему пришлось изобрести способ расчета с целью доказать это. С помощью закона Гаусса доказательство проводится очень легко благодаря сферической симметрии. В действительности масса Земли не распределена равномерно по ее объему. Ядро Земли гораздо более плотное, чем поверхностный слой. Тем не менее сферическая симметрия сохраняется, поскольку при любом заданном радиусе плотность одна и та же, независимо от угловой широты и долготы.

В главе 10 на с. 215 мы задавали вопрос, что случится, если уронить биллиардный шар в отверстие туннеля, просверленного сквозь Землю. Там было указано, что гравитационное поле в любой точке определяется только массой, находящейся от центра на расстоянии, меньшем чем данная точка. Вся масса, сосредоточенная в шаровом слое бóльшего радиуса, создает гравитационные поля, которые взаимно компенсируются. С помощью закона Гаусса это утверждение может быть легко доказано. До тех пор пока имеется сферическая симметрия, линии поля должны быть направлены радиально и гравитационное поле на определенном расстоянии от центра должно быть одинаковым. Согласно закону Гаусса, число линий поля, выходящих наружу через замкнутую поверхность, зависит только от модуля заряда, заключенного *внутри*. В случае гравитации заряд, создающий поле, – это масса. Число линий поля, выходящих наружу через поверхность шара массой m, равно $4\pi Gm$. (Обратите внимание на одинаковую трактовку двух законов обратных квадратов расстояния для сферической геометрии – закона Ньютона и закона Кулона:

$$F_{\text{гр}} = G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad F_{\text{эл}} = k\,\frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

Если $4\pi k$ линий электрического поля выходят из каждого единичного заряда q_1 (1 Кл), то и из каждой единичной массы m_1 (1 кг) выходят $4\pi G$ линий гравитационного поля.)

В случае точки, расположенной внутри Земли на расстоянии r от ее центра, число линий поля, выходящих через сферическую поверхность такого радиуса, должно равняться

$$4\pi G m_2 = 4\pi G\rho\cdot\frac{4}{3}\pi r^3,$$

где ρ – плотность, а $(4/3)\pi r^3$ – объем находящейся внутри массы. Поскольку напряженность поля в любой точке равна числу линий поля, приходящихся на единицу площади, и поскольку поле одинаково в любой точке на расстоянии r, то напряженность гравитационного поля равна

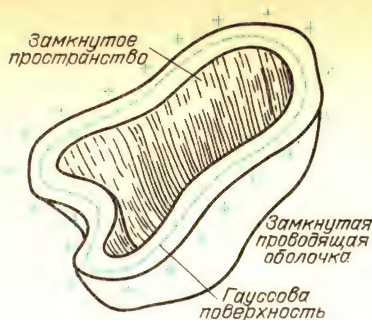
$$g = 4\pi G\,\rho\cdot\frac{4}{3}\pi r^3\cdot\frac{1}{4\pi r^2} = \frac{4}{3}\pi G\rho r.$$

Это то же самое выражение, которое было получено на с. 216, хотя там мы вычисляли силу, действующую на биллиардный шар

Полное число линий гравитационного поля, проникающих внутрь сферической поверхности радиуса R, равняется $4\pi Gm$, где m – масса внутреннего ядра радиусом r. Поскольку $m = (4/3)\pi r^3\rho$, число линий гравитационного поля равно $(16/3)\pi^2 r^3 G\rho$. Напряженность гравитационного поля равна

$$g = \frac{\text{число линий гравитационного поля}}{\text{площадь поверхности}} = \frac{(16/3)\pi^2 r^3 G\rho}{4\pi r^2} = \frac{4}{3}\pi G\rho r.$$

Поскольку масса Земли равна $M = (4/3)\pi R^3\rho$, то $g = G(M/R^3)r$



Внутри проводника в статических условиях напряженность электрического поля $E = 0$, поскольку

$$E = \frac{\text{число линий напряженности}}{\text{площадь поверхности}} = 0$$

через гауссову поверхность линии поля не проходят. Суммарный заряд внутри металлической проводящей поверхности равен нулю, а любые избыточные заряды должны располагаться на наружной поверхности

массой m_1. Эта сила, конечно, равна $m_1 g$ и направлена к центру Земли.

Между прочим, закон Гаусса справедлив, даже если плотность внутри шара гораздо выше в центральном ядре. Единственное требование – чтобы линии электрического поля были радиальными. Далее, все доводы сохраняются независимо от того, выступает ли в качестве шара Земля, бейсбольный мяч или шаровая молния. (Посмотрите, какие затруднения возникли бы, если бы это было бы не так; гравитационное поле в центре бейсбольного шара могло бы стать бесконечным, если бы $F_{гр} = Gm_1m_2/r^2$ было справедливо все время вплоть до $r = 0$.)

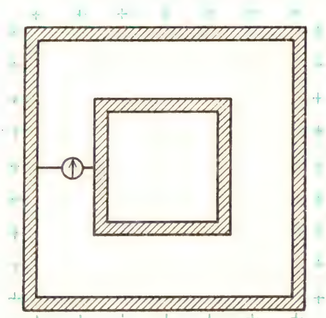
Справедлив еще один результат, к которому приводит применение закона Гаусса к областям, ограниченным изолированными, замкнутыми, проводящими оболочками. Внутри таких областей не может быть суммарного ненулевого заряда, независимо от того, насколько велик заряд в наружном слое. Чтобы показать это, вообразите гауссову поверхность такой же формы, что и проводящая оболочка, но лежащую внутри *металлической* проводящей поверхности, как показано на рисунке. Внутри проводника не может быть статического электрического поля в отсутствие поддерживающего его источника. Если бы такое поле было, то заряды двигались бы до тех пор, пока снова не было бы восстановлено статическое равновесие. Поэтому электрическое поле отсутствует везде на гауссовой поверхности; число линий поля, проходящих через гауссову поверхность, должно быть равно нулю; это означает, что находящийся внутри заряд должен равняться нулю. Такая ситуация встречается внутри генератора Ван-де-Граафа, где заряды приносятся на ленте в область, заключенную внутри металлического купола. Хотя на заряды действует большая отталкивающая сила, когда они поднимаются вверх, но, оказавшись внутри шара, эти заряды уже экранированы от действия зарядов, находящихся на его поверхности. Поэтому они легко могут соскакивать с ленты на собирающую иглу без всякого отталкивания.

Вопрос 18-9
Ведь предполагается, что излишние электрические заряды не остаются в проводниках. Куда же деваются эти заряды, если они попадают внутрь металлического шара?

Замкнутая проводящая оболочка называется «клеткой Фарадея». Еще до

опытов Фарадея Франклин экспериментально показал, что ни один внешний заряд не проникает внутрь проводящей оболочки. Такое устройство обеспечивает защиту от сильных электрических полей. Во время урагана с молниями безопасно находиться внутри автомобиля – не потому, что резиновые покрышки изолируют вас от земли, а просто потому, что если молния ударит в машину, то заряды не смогут попасть внутрь.

Закон Гаусса выполняется только в том случае, если справедлив закон Кулона для точечного или сферического источника. Оба они зависят от евклидова характера трехмерного пространства (когда поверхность сферы равна $4\pi r^2$) и от того факта, что электрическое воздействие не затухает и не поглощается в свободном пространстве. Защитное свойство замкнутой проводящей поверхности решающим образом зависит от справедливости закона Гаусса. В соответствии с этим опыт по экранированию является очень чувствительной проверкой закона обратных квадратов. Фарадей сам забирался в металлическую клетку в целью проверить, можно ли зафиксировать наличие зарядов внутри клетки, когда она заряжалась снаружи. В аналогичных опытах, поставленных в последнее время, было обнаружено, что показатель степени в законе Кулона может отличаться от двух не более чем на 10^{-17}.

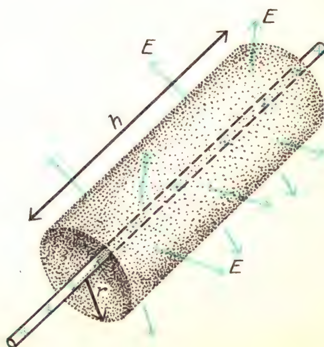


Измерительный прибор между внутренней и наружной клетками должен был бы фиксировать движение внутреннего заряда, когда наружная клетка сильно заряжается. Однако такого движения не наблюдается. Следовательно, справедливы закон Гаусса и закон Кулона $F \sim 1/r^2$

Напряженность E снаружи равномерно заряженного цилиндра. Снова применяем закон Гаусса, используя картину линий напряженности и руководствуясь соображениями симметрии. Все линии напряженности, исходящие из бесконечной заряженной проволоки или бесконечного заряженного цилиндра, должны быть радиальными. Они перпендикулярны любой коаксиальной (цилиндрической) поверхности. Предположим, что на единицу длины очень длинной проволоки или цилиндра приходится неизменный заряд. Такая линейная плотность заряда обычно обозначается буквой λ и равна полному заряду q, деленному на длину l: $\lambda = q/l$. Для того чтобы найти электрическое поле на расстоянии r от оси проволоки или цилиндра, применим закон Гаусса к коаксиальному цилиндру радиуса r и высоты h. Предположим, что расстояние r очень мало по сравнению с длиной проволоки, чтобы не нужно было беспокоиться об асимметрии линий напряженности вблизи концов. Полный заряд цилиндра равен произведению линейной плотности заряда на высоту цилиндра: $q = \lambda h$. Согласно закону Гаусса, полное число линий напряженности поля, выходящих из цилиндрического объема радиусом r и высотой h, пропорционально полному заряду внутри этого объема:

$$\text{число линий напряженности} = 4\pi k \lambda h.$$

Линии напряженности пронизывают только боковую поверхность цилиндра. Они не выходят через торцы. Поскольку электрическое поле радиально и одина-



ково на расстоянии r, то его напряженность равна

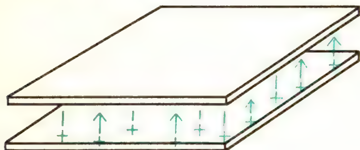
$$E = \frac{\text{число линий напряженности}}{\text{площадь боковой поверхности}} = \frac{4\pi k \lambda h}{2\pi r h} = 2k\frac{\lambda}{r}.$$

Заметьте, что высота гауссова цилиндра h не входит в это выражение.

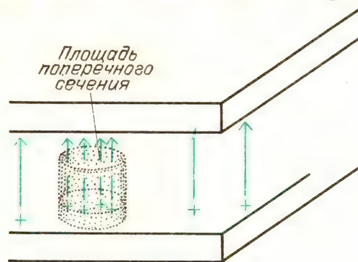
Теорема Гаусса снова приводит к совершенно не очевидному результату. Электрическое поле снаружи равномерно заряженной проволоки или цилиндра убывает, однако уже как первая степень расстояния, а не вторая. Электростатическое притяжение (или отталкивание) не обязательно подчиняется закону обратных квадратов. Зависимость поля от расстояния определяется геометрией источника. Для сферического источника поле пропорционально $1/r^2$, а для цилиндрического источника поле пропорционально $1/r$.

Вопрос 18-10
Если заряд равномерно заряженного цилиндра состоит из совокупности точечных зарядов, то почему линии напряженности выходят не по всем направлениям, а только радиально?

Напряженность E, создаваемая равномерно заряженными параллельными проводящими пластинами. Показанная на следующем рисунке геометрия параллельных пластин является основной формой электрического конденсатора, с которым мы познакомимся позднее.



Если нижняя пластина равномерно заряжена положительно, а верхняя – отрицательно, то линии электрического поля пойдут снизу вверх параллельно друг другу и с постоянной густотой. Электрическое поле будет однородно внутри пластин, за исключением области вблизи краев. Если полный заряд на каждой пластине равен q, то поверхностная плотность заряда будет равна q/S, где S – площадь пластины. Поверхностная плотность заряда обычно обозначается буквой σ: $\sigma = q/S$. (Обратите внимание, что в присутствии противоположно заряженной пластины полный заряд каждой проводящей пластины сосредоточивается на ее внутренней поверхности.) Чтобы найти поле в произвольной точке между пластинами, вообразите мысленно некий цилиндрический объем, показанный на рисунке.



Заметьте, что нижняя поверхность цилиндра находится внутри металла нижней пластины, а верхняя поверхность расположена между пластинами в области, где хотим найти электрическое поле. Полный электрический заряд внутри этого цилиндрического объема равен произведению поверхностной плотности заряда нижней пластины на площадь поперечного сечения цилиндра. Число линий электрического поля, выходящих из такого заряда, равно $4\pi k(\sigma \cdot \text{площадь})$. Все эти линии поля выходят через плоский верхний торец цилиндра. Через дно цилиндра линии напряженности не проходят, так как оно погружено внутрь металла, а внутри проводника линий поля нет.

Вопрос 18-11
Почему?

Линии напряженности не проходят и через боковую поверхность цилиндра, так как они параллельны этой поверхности. Следовательно, напряженность электрического поля в области верхнего торца гауссова цилиндра равна

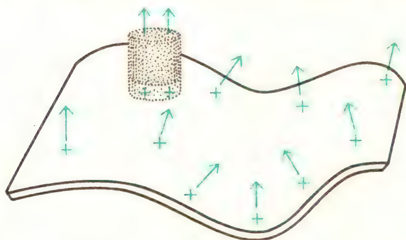
$$E = \frac{\text{число линий напряженности}}{\text{площадь, пересекаемая ими}} = \frac{4\pi k(\sigma \cdot \text{площадь})}{\text{площадь}} = 4\pi k\sigma.$$

В этом случае электрическое поле вообще не зависит от расстояния до источника. Как и следует ожидать из модели линий поля, последнее одинаково во всем объеме между пластинами. (Если бы это было не так, линии напряженности не были бы параллельны друг другу и их густота в пространстве не была бы постоянной.)

Полученное соотношение между напряженностью поля и поверхностной плотностью заряда ($E = 4\pi k\sigma$) справедливо для поля вблизи поверхности *любого* заряженного проводника, независимо от его формы и независимо от того, имеется ли вблизи другая пластина. Причина такого обобщения заключается в том, что линии напряженности электрического поля вблизи проводника должны быть перпендикулярны его поверхности. (Это верно только в электростатике. Как мы увидим в главе 19, когда по проводнику движутся заряды, должны существовать линии поля, параллельные направлению движения.)

Вопрос 18-12
Почему линии напряженности электрического поля не могут образовывать с проводящей поверхностью углов, отличных от 90°?

В непосредственной близости от поверхности проводника можно использовать такой же гауссов цилиндр, как и



в случае параллельных пластин. С помощью тех же аргументов найдем, что напряженность поля вблизи поверхности заряженного проводника равна

$$E = 4\pi k\sigma.$$

Конечно, поверхность может быть искривленной, и в этом случае линии напряженности не обязательно параллельны друг другу. Более того, как мы увидим, поверхностная плотность заряда зависит от кривизны поверхности, и поэтому напряженность электрического поля не постоянна по всей поверхности.

Напряженность E, создаваемая электрическим диполем. Таким образом, с помощью закона Гаусса мы определили электрическое поле на некотором расстоянии от зарядов для трех характерных случаев пространственного распределения зарядов. Еще одно часто встречающееся распределение зарядов это диполь – равные по модулю положительный и отрицательный заряды, находящиеся на небольшом расстоянии друг от друга. Поле диполя было уже вычислено ранее путем векторного сложения полей, создаваемых отдельными зарядами.

Вопрос 18-13
Можно ли определить электрическое поле вблизи диполя с помощью закона Гаусса? Можно ли окружить диполь поверхностью так, чтобы линии напряженности на этой поверхности были перпендикулярны ей и располагались в пространстве с неизменной густотой?

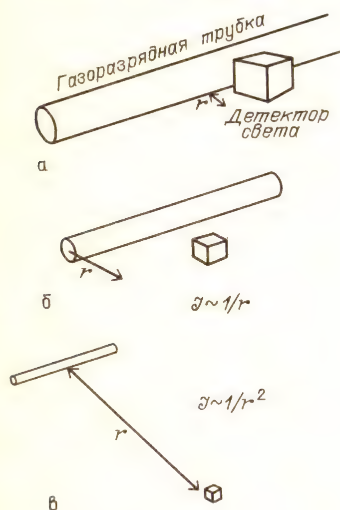
РЕЗЮМЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ЗАВИСИМОСТИ НАПРЯЖЕННОСТИ E ОТ ГЕОМЕТРИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИСТОЧНИКОВ

Закон Гаусса был использован для нахождения электрического поля, создаваемого равномерно заряженными шарами, цилиндрами и плоскостями. А как обстоит дело в случаях, когда источники электрического поля имеют другую форму? В общем случае вычисления будут очень сложными, но во многих случаях можно аппроксимировать необычную форму источника электрического поля тремя рассмотренными выше.

Предположим, например, что требуется определить, как гравитационное поле Земли зависит от расстояния до ее центра. С хорошей точностью справедливо, что гравитационное поле обратно пропорционально квадрату расстояния до центра Земли. Однако на небольших

расстояниях над поверхностью Земли гравитационное поле почти постоянно. Это приближение плоской Земли, которое мы все время используем в повседневной жизни. На высотах порядка нескольких сотен метров линии гравитационного поля почти параллельны друг другу и распределены с постоянной густотой – точно так же, как и линии электрического поля в плоском конденсаторе.

В качестве другого примера рассмотрите свет, испускаемый длинной газоразрядной трубкой. На расстояниях в несколько миллиметров от поверхности трубки интенсивность света должна быть почти постоянной (рис. *а*). Поверхность лампы выглядит плоской. На



большем удалении, где расстояние до оси трубки более чем в 1,25 раза превышает ее радиус, геометрию следует считать цилиндрической. В этом случае интенсивность света обратно пропорциональна расстоянию до оси трубки (рис. *б*). Такое приближение справедливо до тех пор, пока расстояние до оси трубки мало по сравнению с расстоянием до ее концов. На расстоянии от трубки, во много раз превышающем ее длину, геометрия почти такая же, как и в случае точечного источника (рис. *в*). В этом случае интенсивность света обратно пропорциональна квадрату расстояния до оси трубки.

В приведенной далее таблице собраны формулы напряженности электрического поля для рассмотренных выше различных геометрий источника поля.

Геометрия источника поля	Напряженность	
Точка	$E = k\frac{q}{r^2}$	$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$
Равномерно заряженный шар ($r \geqslant R$)	$E = k\frac{q}{r^2}$	$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$
Равномерно заряженный шар ($r \leqslant R$)	$E = k\frac{q}{R^3}r$	$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^3}r$
Равномерно заряженный цилиндр ($r \geqslant R,\ r \ll h$)	$E = k\frac{2\lambda}{r}$	$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\lambda}{r}$
Равномерно заряженные пластины (область внутри параллельных пластин или вблизи поверхности отдельной пластины)	$E = 4\pi k\sigma$	$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

Обратите внимание, что они приводятся в двух формах. Часто удобно выразить постоянную в законе Кулона иначе. Вместо формулы $E = kq/r^2$ можно написать

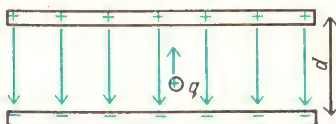
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}.$$

Это выражение может показаться более сложным, но позднее нам еще представится случай использовать величину ε_0, которая называется *электрической постоянной*. Индекс нуль означает, что постоянная относится к зарядам, расположенным в вакууме. Если между зарядами находится вода или какая-нибудь другая среда, то диэлектрическая постоянная будет иметь другое значение. Поскольку для вакуума (и воздуха) $k = 9\cdot 10^9$, то $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}$. Множитель 4π не включен в эту константу, поскольку он представляет собой геометрический фактор, равный в данном случае числу единичных телесных углов (стерадианов) вокруг точки.

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ

Отдельные электрические заряды притягивают и отталкивают друг друга. До сих пор мы интересовались, как описать силы их взаимодействия. Другая черта электростатики даже более впечатляюща, чем силовое поле. Если коснуться сильно заряженного тела, то проскакивает искра и вы ощущаете удар. Происходит высвобождение энергии. В повседневной жизни можно ожидать таких эффектов от тел, которые находятся под высоким *напряжением*, или имеют высокий *потенциал*. Определим эти понятия и придадим им количественный смысл.

Возьмем положительный пробный заряд и переместим его от нижней до верхней пластины плоского конденсатора, как показано на рисунке. Действующая на этот пробный заряд электрическая сила постоянна и направлена



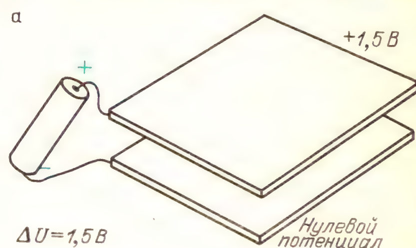
в сторону, противоположную перемещению. Эта сила равна $\mathbf{F} = q_{\text{пр}}\mathbf{E}$. Работа, совершаемая этой силой при перемещении электрического заряда, равна

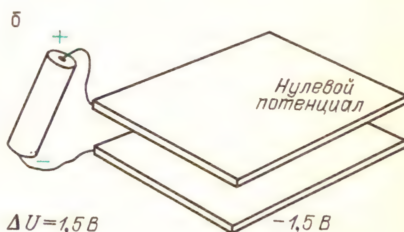
$$A = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d} = q_{\text{пр}}\mathbf{E} \cdot \mathbf{d},$$

где $\mathbf{d}$ – перемещение заряда между пластинами. Работа, совершаемая при перемещении единичного положительного заряда, равна $A/q_{\text{пр}} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{d}$. Эта работа, совершаемая над единичным зарядом при перемещении его из одной точки электрического поля в другую, называется *разностью электрических потенциалов* (или просто *разностью потенциалов*) в начальной и конечной точках. Единицей разности потенциалов служит 1 джоуль на 1 кулон, называемый *вольтом*: 1 В = 1 Дж/Кл.

Эта физическая величина хорошо знакома нам из повседневной жизни. Один элемент батарейки для карманного фонаря имеет разность потенциалов в 1,5 вольта. Большинство аккумуляторов в современных автомобилях имеют разность потенциалов 12 вольт. Эти показатели характеризуют не силу, действующую в батареях на заряды, а энергию, сообщаемую каждому кулону заряда при перемещении его от отрицательного полюса к положительному.

Соединим гальванический элемент, имеющий 1,5 вольта, с пластинами плоского конденсатора, как показано на следующем рисунке. *Разность* потенциалов между пластинами равна 1,5 вольтам. Но мы не определили электрический потенциал каждой пластины. Здесь

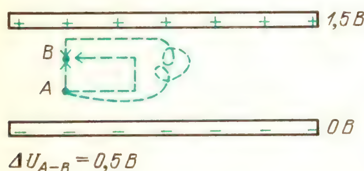




сталкиваемся с такой же ситуацией, как и в случае потенциальной энергии тяготения. Нулевой уровень можно выбрать произвольно. В рассматриваемом случае (рис. *а*) можно сказать, что потенциал нижней отрицательно заряженной пластины конденсатора равен нулю, тогда верхняя пластина находится при + 1,5 вольтах. А можно считать нулевым потенциал верхней пластины, в этом случае нижняя пластина находится при − 1,5 вольтах (рис. *б*). В любом случае потребуется 1,5 джоуля для того, чтобы переместить положительный заряд в 1 кулон от нижней пластины к верхней. (В действительности, как мы видели, в рассматриваемой геометрии невозможно получить заряд в 1 кулон. Однако при перемещении заряда в $1 \cdot 10^{-9}$ кулона потребуется $1{,}5 \cdot 10^{-9}$ джоулей энергии.)

Было бы очень удобно приписать определенное значение потенциала каждой точке пространства. При описании

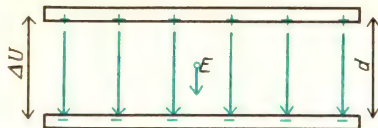
электрического поля в произвольной точке необходимо задавать как модуль, так и направление напряженности поля. *Потенциал*, однако, характеризуется только модулем; это скаляр. Поэтому работу, совершаемую при перемещении из одной точки электрического поля в другую, можно определить, просто находя разность потенциалов между ними. При этом форма пути, по которому перемещается пробный заряд, не имеет никакого значения. На рисунке показаны три разных пути перемещения заряда от точки A до точки B в электрическом поле между параллельными пластинами. Во всех трех случаях совершаемая работа равна 0,5 джоуля на



Работа, совершаемая при перемещении из точки A в точку B, деленная на переносимый заряд, одинакова для всех трех указанных здесь путей

каждый кулон. (Более правдоподобно, что при использовании пробного заряда в $1 \cdot 10^{-12}$ кулона совершаемая работа составляет $0{,}5 \cdot 10^{-12}$ джоуля.) Доказывается это так же, как и в главе 10 для потенциальной энергии тяготения. Предположим, что требуются только две единицы энергии, чтобы добраться от A в B по прямому пути, и три единицы при движении по длинному пути. Тогда было бы заманчиво перемещать заряд вверх по левому пути, затрачивая две единицы энергии, и затем давать ему соскальзывать обратно вниз по правому пути, получая три единицы энергии. Можно было бы выигрывать на этом, но, конечно, такая система не будет работать.

Легко найти соотношение между напряженностью электрического поля в плоском конденсаторе с параллельными пластинами и разностью потенциалов между пластинами. Как мы видели, разность потенциалов между начальной и конечной точками определяется как работа, совершаемая при перемещении единичного заряда, A/q, которая равна скалярному произведению действующей на единичный заряд силы и перемещения $\mathbf{d}$: $(\mathbf{F}/q) \cdot \mathbf{d}$. Действующая на единичный заряд сила равна напряженности электрического поля $\mathbf{E}$, которая



постоянна. Поэтому для разности потенциалов между конечной и начальной точками имеем

$$\Delta U = -\frac{A}{q} = -\frac{\mathbf{F}}{q} \cdot \mathbf{d} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{d}.$$

В любой точке пространства между параллельными пластинами напряженность поля равна отношению разности потенциалов к расстоянию между пластинами:

$$|\mathbf{E}| = |\Delta U| / d.$$

Заметьте, что теперь имеется другой способ вычисления $\mathbf{E}$ и установления единиц напряженности. На с. 160 было найдено, что напряженность поля между параллельными пластинами равна

$$E = 4\pi \cdot 9 \cdot 10^9\ \sigma = 4\pi k \sigma.$$

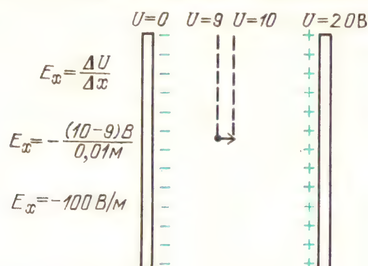
Единицей напряженности электрического поля служит 1 ньютон на 1 кулон: 1 Н/Кл. Чтобы рассчитать напряженность электрического поля, необходимо знать значение σ, которое равно отношению полного поверхностного заряда на пластине к площади пластины: $\sigma = q/S$. При новом способе определения напряженности поля между параллельными пластинами нужно просто поделить разность потенциалов на расстояние между пластинами. Единицей напряженности электрического поля теперь служит 1 вольт на 1 метр: 1 В/м. Обе эти единицы напряженности совершенно эквивалентны:

$$1 \text{ Н/Кл} = 1 \text{ В/м}.$$

В действительности напряженность электрического поля обычно измеряется в вольтах на метр. Например, радио и телевизионные сигналы с напряженностью электрического поля в 1 микро-

вольт на метр находятся на пределе чувствительности хорошего приемника.

Соотношение между E и ΔU, справедливое для плоского конденсатора, может быть обобщено. Даже в тех областях, где напряженность поля не постоянна, приближенно справедливо, что $E_x = -\Delta U/\Delta x$ при малых смещениях Δx. Предположим, например, что



на расстоянии $\Delta x = 1$ см потенциал увеличивается на 1 вольт. Тогда составляющая напряженности поля в этом направлении $E_x = -1$ В/0,01 м $= -100$ В/м. Отрицательный знак соответствует тому, что при перемещении пробного положительного заряда *в направлении увеличения* потенциала на 1 вольт напряженность поля должна быть направлена в противоположную сторону. Обратите внимание на то, что соотношение между E и ΔU позволяет найти векторную величину **E**, если известно распределение скалярной величины U. Фактически мы находим проекцию вектора на направление перемещения.

Обратное соотношение также приближенно справедливо. Для малых смещений разность потенциалов $\Delta U = -E_x \Delta x$. Напряженность электрического поля точечного заряда равна $E = kq/r^2$. Для заряда в $1 \cdot 10^{-9}$ Кл напряженность поля на расстоянии 10 см равна

$$E = 9 \cdot 10^9 \frac{1 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}}{(0{,}1 \text{ м})^2} = 900 \text{ В/м}.$$

Разность потенциалов между точками, удаленными от заряда на расстояния

$r_1 = 10$ см и $r_2 = 11$ см, приближенно равна $\Delta U_{12} \approx -900$ В/м $\cdot$ 0,01 м ≈ -9 В.

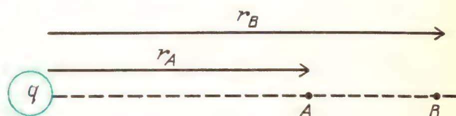
Вопрос 18-14
Почему это выражение верно только приближенно?

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ ПРИ ОБЫЧНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ ЗАРЯДОВ

Мы получили выражения для напряженности электрического поля около шаров, цилиндров, параллельных пластин и диполей. Найдем для этих же случаев выражения для электрического *потенциала.* Во всех случаях электрический потенциал в какой-либо точке пространства можно определить, измеряя работу, совершаемую при перемещении положительного пробного заряда из точки с нулевым потенциалом в данную точку. Точку с нулевым потенциалом можно выбрать в любом удобном месте.

В случае гравитационного потенциала были приведены два обычно используемых определения нулевого потенциала. При рассмотрении гравитационного поля вблизи поверхности Земли можно считать равным нулю потенциал земной поверхности. При рассмотрении полетов ракет или взаимодействия Земли и Луны более удобно выбирать точку с нулевым потенциалом на бесконечности.

Потенциал вблизи заряженного шара. В случае заряженных шаров обычно наиболее удобно считать потенциал равным нулю в точке, лежащей далеко за пределами влияния электрических зарядов. Говорят, что эта точка лежит на бесконечности. Электрический потенциал в любой точке вблизи заряженного



Если $E = k\frac{q}{r^2}$, то

$$\Delta U_{B \to A} = kq\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

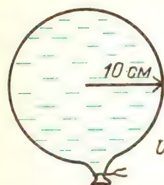
Если $U \to 0$ при $r_B \to \infty$, то

$$\Delta U_{\infty \to A} = k\frac{q}{r_B}, \quad U_A = k\frac{q}{r_A}$$

шара при этом определяется как работа, совершаемая при перемещении единичного положительного заряда из бесконечности в данную точку. (Подобная задача уже рассматривалась в главе 10 для силы, пропорциональной $1/r^2$.) В этом случае потенциал обратно пропорционален расстоянию до центра шара: $U \sim 1/r$. Полная формула для потенциала на расстоянии r от центра равномерно заряженного шара (или от точечного заряда) имеет вид

$$U = k\frac{q}{r}.$$

Вопрос 18-15
Предположим, что положительный заряд в 1 мкКл равномерно «размазан» по поверхности шара радиусом 10 см. Каков потенциал этой поверхности? Какую работу необходимо



совершить, чтобы переместить положительный пробный заряд в 10^{-8} Кл на поверхность шара из точки, удаленной на 30 см от его центра?

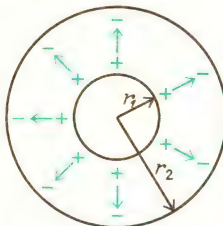
Ответ на вопрос 18-15 содержит впечатляющий момент. В «Знакомстве с явлениями» вы заряжали надувные шары, потирая их о свои волосы, и было подсчитано, что заряд на каждом шаре должен составлять около 0,1 микрокулона. В той степени, в какой шар можно считать равномерно заряженной сферой такого же размера, его электрический потенциал должен составлять около 10 000 вольт. В самом деле, когда вы шаркаете по ковру и, прикасаясь к чему-нибудь, извлекаете сантиметровые искры, ваш потенциал также составляет от 10 000 до 20 000 вольт.

Вопрос 18-16
Почему же вы не погибаете при таком напряжении? Сколько энергии вы запасаете, получив заряд в 0,1 мкКл при потенциале в 10 000 В?

Потенциал вблизи заряженного цилиндра. Разность потенциалов между двумя точками, расположенными около заряженного цилиндра, равна

$$\Delta U_{r_1 \to r_2} = 2k\lambda \ln(r_1/r_2).$$

При выводе этого выражения приходится использовать интегрирование. Однако обратите внимание на то, как разность потенциалов зависит от расстояния. В этом случае нельзя потенциал на



Внутренний цилиндр находится при более высоком потенциале, чем наружный, если на внутреннем цилиндре имеется положительный заряд. Поэтому разность потенциалов $\Delta U_{r_1 \to r_2}$ отрицательна, так как потенциал понижается по мере продвижения от r_1 к r_2. Заметьте, что $\ln(r_1/r_2)$ отрицателен, если $r_2 > r_1$. При вычислениях помните, что $\ln(r_1/r_2) = -\ln(r_2/r_1)$

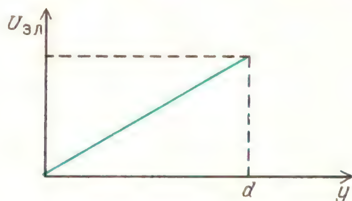
бесконечности считать равным нулю, так как при стремлении r_2 к бесконечности отношение r_1/r_2 стремится к нулю, а $\log 0$ равен минус бесконечности. Все, что можно сделать в данном случае, это измерить разность потенциалов между двумя точками, расположенными на конечном расстоянии от цилиндра.

Потенциал между параллельными пластинами. Мы уже нашли соотношение между разностью потенциалов между параллельными пластинами и напряженностью электрического поля в пространстве между ними: $E = \Delta U/d$, где d – расстояние между пластинами. Если считать, что потенциал нижней пластины равен нулю, то потенциал растет линейно от нуля до U по мере продвижения от нижней пластины к верхней. Получается такая же зависимость, как и для гравитационного потенциала вблизи поверхности Земли. В этом случае гравитационный потенциал равен gh, а потенциальная энергия тяготения тела массой m равна mgh. Электростатический потенциал между параллельны-

Гравитационный потенциал $U_{гр} = gh$, если Землю считать плоской и на поверхности $U_{гр} = 0$. Линии поля параллельны и обладают неизменной густотой в пространстве, т. е. напряженность гравитационного поля g постоянна

ми пластинами равен Ey, а электростатическая потенциальная энергия, которой обладает заряд q, равна qEy. В обоих этих случаях линии напряженности поля параллельны друг другу и имеют неизменную густоту в пространстве; сила, действующая на заряд, в этой области постоянна. Поэтому работа, совершаемая при перемещении заряда вдоль линии напряженности, пропорциональна проходимому пути.

Напряженность поля между заряженными проводящими параллельными пластинами связана с поверхностной

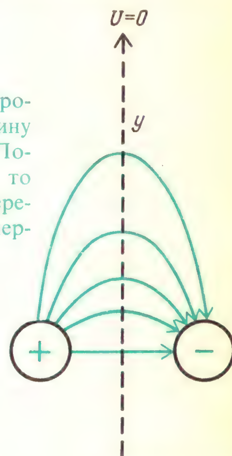


Электрический потенциал $U_{эл} = Ey$, если $U_{эл} = 0$ на нижней пластине при $y = 0$. В плоском конденсаторе с параллельными пластинами линии поля параллельны и обладают неизменной густотой в промежутке между обкладками, т. е. напряженность электрического поля E постоянна

плотностью заряда на пластинах следующим образом: $E = 4\pi k\sigma = \sigma/\varepsilon_0$. Поэтому $U = (4\pi k\sigma)\,y$. Разность потенциалов между пластинами равна $\Delta U = (4\pi k\sigma)\,d = (\sigma/\varepsilon_0)\,d$. Поскольку поверхностная плотность заряда равна $\sigma = q/S$, где q — полный заряд одной из пластин, а S — площадь каждой пластины, то разность потенциалов между параллельными пластинами можно представить в виде

$$\Delta U = qd/(\varepsilon_0 S).$$

Потенциал вблизи диполя. Потенциал поля вблизи диполя сильно зависит от угловых соотношений между точкой наблюдения и диполем. Например, в любой точке прямой, перпендикулярной оси диполя и проходящей через ее середину, потенциал равен нулю. Это верно по следующей причине: если начать двигать пробный заряд из бесконечности, то он, по определению, начнет



На перпендикуляре, проведенном через середину оси диполя, $\mathbf{E} \perp \Delta\mathbf{y}$. Поскольку $\Delta U = \mathbf{E}\cdot\Delta\mathbf{y}$, то $\Delta U = 0$ при любом перемещении вдоль этого перпендикуляра

свое движение при $U = 0$. По мере продвижения по указанной прямой заряд все время движется перпендикулярно линиям напряженности поля. Поэтому работа не совершается. Поскольку пробный заряд можно переместить из бесконечности в центр диполя без совершения работы, то потенциал всех проходимых при этом точек должен быть равен нулю. Однако потенциал точек, лежащих на оси диполя (вне его), обратно пропорционален квадрату расстояния от центра диполя.

Существует интересное соотношение между линиями напряженности электрического поля и эквипотенциальными линиями (линиями равного потенциала). Один из примеров мы только что видели в случае диполя. Пока пробный заряд движется перпендикулярно линиям напряженности поля, работа не совершается, и потенциал любой точки, лежащей на траектории его движения, должен быть одним и тем же. Ниже на рисунках изображены линии напряженности и эквипотенциальные поверхности поля заряженного шара, цилиндра, параллельных пластин и диполя (на двух

последних рисунках эквипотенциальные поверхности даны штриховыми линиями); приведены также формулы для потенциала в указанных случаях.

циал пропорционален заряду источника поля. Удваивая заряд, вы увеличиваете вдвое и потенциал. Однако одним телам требуется больший заряд, чем другим, для достижения одного и того же потенциала. Электрическая емкость (или просто емкость) тела определяется как

Геометрия источника поля		Потенциал
	Точка или шар ($r \geqslant R$)	$\Delta U = kq\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$ $U = kq/r$, если $U = 0$, при $r_2 \to \infty$
	Цилиндр	$\Delta U = 2k\lambda \ln(r_1/r_2)$
	Параллельные пластины	$\Delta U = Ed$ $U = Ey$, если $U = 0$, при $y = 0$ и $0 \leqslant y \leqslant d$ также $\Delta U = \frac{qd}{\varepsilon_0 S}$
	Диполь	$U \sim \frac{p}{r^2}$ на оси; $U = 0$ везде на линии, перпендикулярной оси диполя и проходящей через ее центр

НАКОПЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЗАРЯДОВ – ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЕМКОСТЬ

Каждый раз, когда при соприкосновении тел происходит разделение зарядов, положительные заряды остаются на одном теле, а отрицательные заряды – на другом. Эти заряды создают вокруг каждого тела электрическое поле и повышают или понижают потенциал тела. Во всех формулах для потенциала, которые приведены в таблице, потен-

$$C = q/U.$$

Если тело обладает большой емкостью, оно может иметь большой электрический заряд при относительно небольшом потенциале.

Единицу емкости называют фарадом и обозначают буквой Ф. Она названа так в честь Майкла Фарадея (1791–1867), который объяснил многие элек-

трические явления на основе ясных мысленных моделей их механизма. Если при сообщении телу заряда в 1 кулон его потенциал увеличивается на 1 вольт, то емкость тела равна 1 фараду: 1 Ф = = 1 Кл/В. Как мы увидим, это очень большая емкость. В электрических цепях гораздо более привычно встречать емкости порядка микрофарад: 1 мкФ = $= 1 \cdot 10^{-6}$ Ф. Часто приходится иметь дело с гораздо меньшими емкостями — пикофарадами: 1 пФ $= 1 \cdot 10^{-12}$ Ф.

Емкость шара. Выясним, какова электрическая емкость заряженного шара. Подставим в формулу для емкости выражение для потенциала шара через его радиус:

$$C_{\text{ш}} = \frac{q}{U} = \frac{q}{kq/R} = \frac{R}{k}.$$

Емкость шара пропорциональна его радиусу. Предположим, что радиус шара равен 10 см. Тогда его емкость составляет $C_{\text{ш}} = 0{,}1$ м$/(9 \cdot 10^9) \approx 1 \cdot 10^{-11}$ Ф. Заметьте, что емкость шара в пикофарадах примерно равна его радиусу в сантиметрах. Между прочим, полезно запомнить, что приближенно емкость (в пикофарадах) любого изолированного проводника равна радиусу шара (в сантиметрах), имеющего примерно такую же площадь поверхности, как и тело.

Для оценки электрической емкости тела по порядку величины нужно определить радиус эквивалентного шара с примерно такой же площадью поверхности

Вопрос 18-17
Какова приблизительно *ваша* электрическая емкость?

Найдем электрическую емкость самого большого из доступных нам шаров. Возьмем Землю. Ее радиус составляет $6{,}4 \cdot 10^6$ метров. Поэтому емкость Земли равна

$$C_{\text{з}} = 6{,}4 \cdot 10^6 \text{ м}/(9 \cdot 10^9) = 7 \cdot 10^{-4} \text{ Ф} = 700 \text{ мкФ}.$$

Даже Земля не обладает емкостью в один фарад!

Емкость параллельных пластин. С помощью параллельных пластин можно сделать устройство, обладающее гораздо большей электрической емкостью, чем шар. Как было указано на с. 167, разность потенциалов между заряженными параллельными пластинами равна $\Delta U = qd/(\varepsilon_0 S)$. Теперь можно найти их емкость, поскольку

$$C_{\text{п. пл}} = \frac{q}{\Delta U} = \frac{q}{qd/(\varepsilon_0 S)} = \varepsilon_0 \frac{S}{d}.$$

Электрическая емкость параллельных пластин пропорциональна площади поверхности и обратно пропорциональна расстоянию между пластинами.

Полученная формула применима к плоскому конденсатору, у которого между пластинами вакуум (или воздух). Абсолютная диэлектрическая проницаемость других веществ больше, чем ε_0:

$$\varepsilon_a = \varepsilon\varepsilon_0.$$

Множитель ε называется относительной диэлектрической проницаемостью (или просто диэлектрической проницаемостью) вещества. Ниже приведены значения относительной диэлектрической проницаемости ряда веществ, используемых в конденсаторах. Определенные керамики, такие как титанат бария, могут увеличить емкость в 10 000 раз.

Относительная диэлектрическая проницаемость

Вещество	ε
Вода	80,4
Этанол	24,3
Метанол	33,6
Четыреххлористый углерод	2,2
Сера	4,0
Люцит	2,8
Стекло	4 – 5
Парафин	2 – 2,5
Фарфор	6 – 8
Хлористый натрий	5,7
Обычная слюда	3 – 6
Магниевая слюда	275
Сернистый свинец	205
Титанат стронция	330
Теллурид свинца	400
Титанат бария	6000 – 12000
Воздух	1,00059

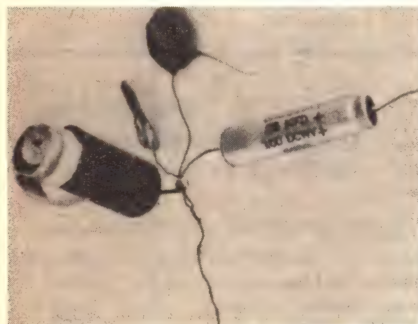
Полная формула для электрической емкости плоского конденсатора выглядит так:

$$C_{\text{п.пл}} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{S}{d}.$$

ТЕХНИЧЕСКИЕ КОНДЕНСАТОРЫ

В конденсаторах, используемых в электрических цепях для накопления энергии, обычно играют роль один или два фактора, определяющих емкость. Например, *бумажный*, или *станиолевый*, конденсатор состоит из туго свернутых тонких лент фольги и парафинированной бумаги, сложенных вместе. Полная площадь поверхности очень велика, а расстояние между лентами фольги, служащими обкладками конденсатора, равно толщине изолирующей бумаги или пластмассы.

В *электролитических* конденсаторах площадь поверхности фольги не очень велика, но расстояние между обкладками определяется химической пленкой, которая может быть толщиной всего в 10 или 100 атомов. Поскольку d настолько мала, то электрическая емкость может быть очень большой. Однако в этом случае тонкая химическая пленка сохраняется, только пока электрическое поле направлено в определенную сторону. На электролитическом конденсаторе необходима маркировка, указывающая, какой электрод всегда должен быть положительным по отношению к другому.

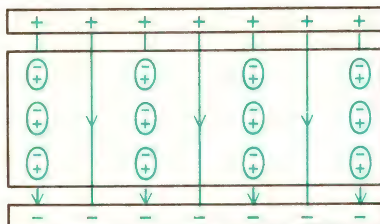


Бумажный конденсатор, частично открытый (слева), два керамических конденсатора, один из которых открыт, чтобы были видны пластины (в центре) и электролитический конденсатор (справа)

В *керамических* конденсаторах площадь пластин невелика и расстояние между ними не особенно мало́. Однако диэлектрическая проницаемость вещества, находящегося между пластинами, может быть порядка 10^4, обеспечивая высокое значение электрической емкости.

МИКРОСТРУКТУРА ДИЭЛЕКТРИКА

Почему же вещество между обкладками конденсатора увеличивает электрическую емкость? На рисунке показана модель взаимного расположения зарядов

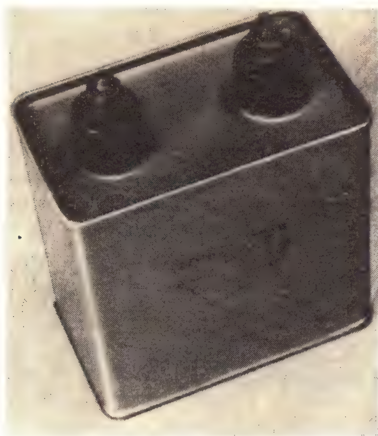


в веществе. Исходное электрическое поле между обкладками поляризует вещество таким образом, что происходит деформирование каждого атомного или молекулярного кластера. В результате образуется внутренний слой индуцированных отрицательных электрических зарядов, прилегающий к положительно заряженной пластине, и аналогичный слой индуцированных положительных зарядов, граничащий с отрицательно заряженной пластиной. Таким образом, поле в веществе между пластинами существенно уменьшается. Однако это означает, что разность потенциалов между пластинами убывает. При фиксированном заряде на пластинах уменьшение разности потенциалов между ними приводит к увеличению электрической емкости, поскольку $C = q/U$.

ЭНЕРГИЯ, ЗАПАСЕННАЯ В КОНДЕНСАТОРЕ

Конденсаторы изготовляют для разных целей. В некоторых электрических цепях применение конденсаторов позволяет пропускать быстрые изменения потенциалов, но задерживать их мед-

ленные изменения. (Иначе говоря, как будет видно ниже, переменный ток может проходить через конденсаторы, в то время как постоянный – нет.) В других устройствах конденсаторы используются для того, чтобы накапливать на короткое время заряд, или электрическую энергию. На рисунке показан высоковольтный конденсатор, предназначенный для накопления энергии. Он имеет

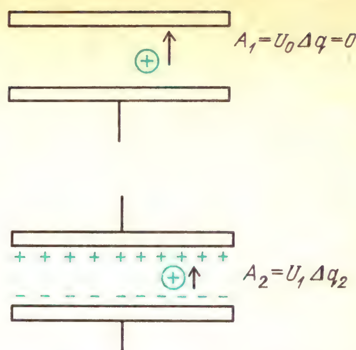


емкость в 1 микрофараду и рассчитан на разность потенциалов в 2000 вольт. В качестве диэлектрика в нем используется масло, что обеспечивает более высокую диэлектрическую проницаемость, чем воздух, и позволяет предотвратить проскакивание искр между пластинами.

Работа, совершаемая при переносе очередной небольшой порции заряда от нижней пластины к верхней, равна произведению имеющейся разности потенциалов на переносимый заряд:

$$A_2 = U_1 \Delta q_2,$$

Когда переносится последняя порция заряда от нижней пластины к верхней, совершаемая работа равна произведению этого заряда на полную разность потенциалов в конденсаторе. Среднее значение разности потенциалов, через которую переносились заряды, равна половине окончательной разности потенциалов. Поэтому работа, совершаемая при зарядке конденсатора, равна $qU/2$, где U – разность потенциалов между пластинами, часто называемая «электрическое напряжение». Эта ра-



Для первой порции заряда, переносимого с нижней пластины на верхнюю, работа равна $A_1 = 0$, для последней порции заряда $A_{кон} = U_{кон}q$. В среднем работа равна $\langle A \rangle = (1/2)\, U_{кон}\, \Delta q$

бота равна энергии W, запасенной в конденсаторе. Поскольку $C = q/U$, то запасенную энергию можно представить еще в двух видах:

$$W = \frac{1}{2}qU = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{q^2}{2C}.$$

Максимальная энергия, которую можно запасти в заполненном маслом конденсаторе, равна

$$W = \frac{1}{2}CU^2 = $$

$$= \frac{1}{2}(1 \cdot 10^{-6}\ \text{Ф})(2000\ \text{В})^2 = 2\ \text{Дж}.$$

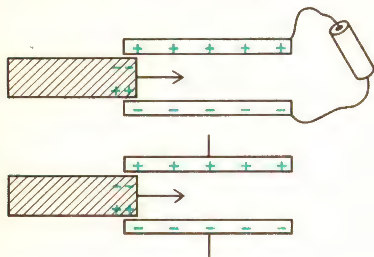
Последняя цифра (2 джоуля) не производит впечатления очень большой энергии. Масса конденсатора составляет около 500 г, а его вес равен примерно 5 Н. Если конденсатор поднять в воздухе всего на 40 см, то его потенциальная энергия *тяготения* увеличится на 2 джоуля: 5 Н · 0,4 м = 2 Дж. Видно, что 2 джоуля *электрической* энергии запасены очень удобным образом. В подходящей электрической цепи эту энергию можно извлечь из конденсатора за время, меньшее 1 микросекунды. Такой разряд конденсатора обеспечит следующую мгновенную мощность: 2 Дж/$(1 \cdot 10^{-6}$ с$) = 2 \cdot 10^6$ Вт.

Когда между пластинами конденсатора находится диэлектрик, электрическая емкость конденсатора увеличивается. Соответственно, при заданной разности потенциалов между пластинами

оказывается бо́льшей запасенная энергия. Добавочная энергия появляется благодаря деформации молекул диэлектрика. При замыкании некоторых типов конденсаторов накоротко не все заряды стекают с пластин немедленно. Диэлектрик остается частично поляризованным, удерживая некоторую часть заряда на пластинах от стекания. Если коснуться такого конденсатора спустя некоторое время после его выключения, то можно ощутить неприятный удар.

Вопрос 18-18

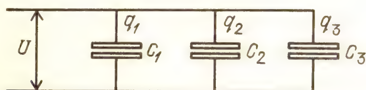
На рисунке показаны диэлектрические пластины, которые вводят в промежуток между обкладками плоского конденсатора. В первом случае батарея остается подсоединенной



к конденсатору, так что напряжение на конденсаторе при введении диэлектрика остается постоянным. Во втором случае батарея отключается и остается неизменным первоначальный заряд конденсатора. Что происходит в каждом случае с запасаемой электрической энергией? За счет какой работы меняется энергия в каждом случае?

СОЕДИНЕНИЯ КОНДЕНСАТОРОВ

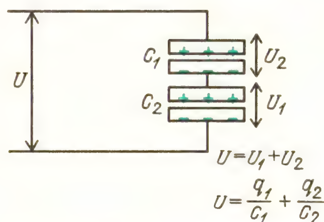
Один из способов получить большую электрическую емкость, это соединить большое число конденсаторов *параллельно.* Такая схема показана на рисунке. Разность потенциалов на каждом конденсаторе одна и та же. Полный накопленный заряд равен сумме зарядов на отдельных конденсаторах. Поэтому емкость такой комбинации равна



При параллельном соединении общая емкость равна $C = C_1 + C_2 + C_3$

$$C = \frac{q_1 + q_2 + q_3}{U} = \frac{q_1}{U} + \frac{q_2}{U} + \frac{q_3}{U} = C_1 + C_2 + C_3.$$

Однако иногда конденсаторы соединяют *последовательно,* как показано на следующем рисунке. При таком соединении на всех конденсаторах скапливается одинаковый *заряд.* (Положительный заряд на нижней пластине



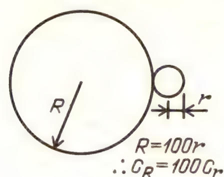
При последовательном соединении общая емкость равна $1/C = 1/C_1 + 1/C_2$

одного конденсатора должен равняться отрицательному заряду на верхней пластине другого – поскольку эти пластины соединены друг с другом и для них нет никакого другого источника зарядов.) С другой стороны, разность потенциалов на одном конденсаторе не обязательно равна разности потенциалов на другом. Полная работа, совершаемая при перемещении пробного заряда через оба конденсатора, равна сумме работ по перемещению его сначала через первый конденсатор, а затем через второй: $U = U_1 + U_2$. Поскольку $C_1 = q_1/U_1$ и $C_2 = q_2/U_2$, то $U_1 = q_1/C_1$ и $U_2 = q_2/C_2$. Следовательно, $U = q_1/C_1 + q_2/C_2 = q/C$. Заряд всей комбинации конденсаторов равен q, а ее электрическая емкость равна C. Вследствие того что $q = q_1 = q_2$, имеем

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

Когда заряженное проводящее тело касается другого проводящего тела, они делят заряд пропорционально своим емкостям. Так и должно быть, поскольку, касаясь друг друга, они находятся при одном и том же потенциале.

Если к маленькому заряженному шару радиусом в 1 см, а, следовательно, емкостью примерно в 1 пФ прикоснуться шаром, радиус которого в 100 раз больше, то на маленьком шаре



Поскольку при соприкосновении шаров $U_R = U_r$, то $q_R = 100q_r$

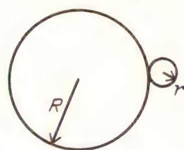
останется всего около 1% первоначального заряда, а остальные 99% окажутся на большом шаре. Примерно это и происходит, когда вы касаетесь пальцем любого лабораторного электростатического генератора или накопителя. Ваша электрическая емкость в 10 раз превышает емкость обычного лабораторного демонстрационного устройства и поэтому большая часть заряда переходит на поверхность вашего тела. Вы «заземляете» прибор. Еще лучший способ заземлить что-либо, – это соединить его с наибольшим имеющимся телом – с землей. Если можно сделать хороший проводящий путь к сырой земле, то с любого обычного тела можно удалить бо́льшую часть заряда. «Заземление» обычного дома проводится сооружением хорошего контакта с водопроводными трубами, которые входят в окружающую землю.

Как было показано на с. 161, напряженность электрического поля вблизи поверхности заряженного проводника пропорциональна поверхностной плотности заряда на проводнике в прилегающей области:

$$E = 4\pi k\sigma = \sigma/\varepsilon_0.$$

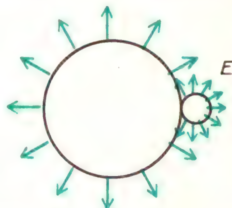
Сейчас мы покажем, что поверхностная плотность заряда и, следовательно, напряженность электрического поля больше всего там, где наибольшая кривизна поверхности. Например, на острие проводника поверхностная плотность заряда очень велика, и поле, окружающее острие, очень сильное. Используя понятие электрической емкости, можно привести простые соображения в пользу справедливости этого утверждения.

Предположим, что очень маленький шар радиусом $r = 1$ касается поверхности гораздо большего шара радиусом $R = 100$. Они находятся при одинаковом потенциале, но емкость большего шара в 100 раз превышает емкость маленького шара, и поэтому его заряд также



Поскольку $\sigma = q/S$, то поверхностная плотность $\sigma_R = q_R/S_R = 100q_r/10\,000S_r = \sigma_r/100$

в 100 раз больше. Сосчитаем, однако, относительные *плотности* заряда на поверхности этих шаров. Поверхность большого шара в 10 000 раз превышает поверхность маленького: $R^2/r^2 = 100^2/1^2 = 10\,000$. Поэтому *поверхностная плотность* заряда на маленьком шаре в 100 раз больше. Электрическое поле в непосредственной окрестности маленького шара будет в 100 раз сильнее, чем у поверхности большого шара. В действительности маленький шар – это только выступ (шишка) на поверхности большого. Благодаря тому что



электрическое поле в окрестности выступов на заряженных проводниках велико, воздух может ионизироваться и обеспечивать возможность стекания заряда. Любое устройство, предназначенное для накопления заряда, должно иметь гладкую овальную поверхность.

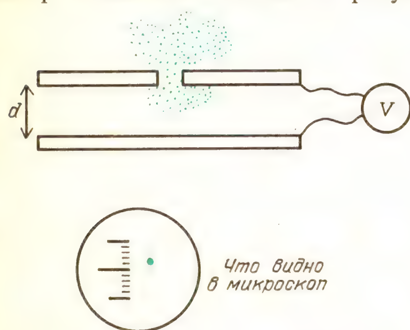
ЕСТЕСТВЕННАЯ ЕДИНИЦА ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЗАРЯДА

В качестве единицы электрического заряда был выбран кулон. Выяснилось, что это очень большой заряд. Эта единица сохранилась только потому, что оказалась удобной в случаях, когда заряды движутся друг относительно друга

в электрических цепях; 1 кулон в 1 секунду равен 1 амперу. Заряды, движущиеся в проволоке, – это электроны. Положительные ионы остаются связанными в узлах кристаллической решетки. Однако, хотя заряды движутся друг относительно друга, проволока остается электронейтральной. В любой области число положительных и отрицательных зарядов одинаково.

Создается впечатление, что заряд электрона является естественной единицей заряда. Почему же в таком случае она не используется? Ее можно было бы использовать, но как мы теперь видим, для многих целей эта единица слишком мала. Определим заряд электрона в кулонах, или, другими словами, найдем, сколько электронов нужно собрать вместе, чтобы получить один кулон.

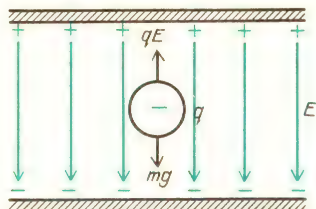
Заряд электрона был точно измерен Робертом Милликеном в 1909 году. Его прибор схематично показан на рисунке.



Схематический рисунок прибора Милликена

В действительности Милликен измерял электрический заряд не электронов, а крошечных капель масла. Чтобы повторить его опыт, распылим облачко масла над верхней пластиной плоского конденсатора. Капли проходят через отверстие в верхней пластине и постепенно падают, увлекаемые вниз силой тяжести mg. Как видно в маломощный микроскоп, они проявляют себя как яркие светящиеся точки.

Когда капли выходят из распылителя, они обычно обладают электрическим зарядом. Предположим, что капля получила заряд $-q$. Если в промежутке между пластинами имеется электрическое поле, то на каплю будет действовать сила, равная $-Eq$. Напряженность поля E равна U/d, где U – разность потенциалов между пластинами, а d – расстояние между ними. Электрическое поле можно задавать, прикладывая к пластинам известное напряжение. Используя несложную настольную установку и подходящие напряжения, нетрудно уравновесить направленную



вниз силу тяжести и тянущую вверх электрическую силу. Наблюдая светящуюся каплю в микроскоп, мы меняем приложенное напряжение, добиваясь того, чтобы она медленно опускалась вниз, останавливалась и даже начинала дрейфовать вверх. Когда капля висит неподвижно,

$$qE = q\frac{U}{d} = mg.$$

Заметьте, что q – это заряд масляной капли, а m – ее масса, а вовсе не масса избыточных электронов, которая пренебрежимо мала́.

Мы не можем узнать, сколько лишних электронов находится на капле. Однако можно сбить некоторые из них, или по крайней мере изменить заряд q, поднося слабый радиоактивный источник. Внезапно капля начинает подниматься или снова падать. Следует изменить подаваемое напряжение и снова добиться равновесия. Так повторяется много раз с одной и той же каплей, а затем с другими каплями.

Если известна масса капли, можно рассчитать заряды на ней. В большинстве современных школьных лабораторий в качестве «капель» используются крошечные пластмассовые шары одинакового размера, применяемые для калибровки электронных микроскопов. Диаметр типичного шара равен 1 микрометру: 1 мкм $= 1 \cdot 10^{-6}$ м. Если известны диаметр и плотность вещества шара, то можно найти его объем и массу. К сожалению, у Милликена не было

шаров постоянного и известного размера. Он определял массу каждой капли, измеряя скорость ее дрейфа при падении. Эта скорость связана с диаметром, массой капли и вязкостью воздуха.

Вопрос 18-19
Милликен наблюдал каплю в микроскоп. Почему он не измерял диаметр капли, разглядывая ее в калибровочный окуляр?

Приведем некоторые типичные значения параметров для такого опыта. Предположим, что плотность пластмассового шара составляет $1 \cdot 10^3$ кг/м^3 (примерно как у воды). Тогда масса каждого из них равна

$$m = \rho \frac{1}{6} \pi d^3 =$$

$$= 1 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 \cdot \frac{1}{6} \pi (1 \cdot 10^{-6} \text{ м})^3 =$$

$$= 5{,}2 \cdot 10^{-16} \text{ кг}.$$

Пусть расстояние между пластинами равно точно 1 см. Тогда, если капля находится в равновесии, ее заряд равен

$$q = \frac{mg}{U/d} =$$

$$= \frac{5{,}2 \cdot 10^{-16} \text{ кг} \cdot 9{,}8 \text{ Н/кг} \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-2} \text{ м}}{U} =$$

$$= \frac{5{,}1 \cdot 10^{-17} \text{ Н} \cdot \text{м}}{U}.$$

Если бы эксперимент ставился при этих условиях, то для U получились бы значения, приведенные ниже, но не обязательно в указанной последовательности:

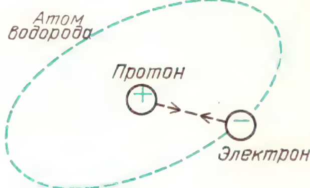
U, В	q, 10^{-19} Кл	n
319	1,6	1
160	3,2	2
106	4,8	3
80	6,4	4
64	8,0	5

Прежде всего заметьте, что условие равновесия сил реализуется только при определенных значениях U. Масса капли не меняется, меняется только заряд, когда мы время от времени облучаем каплю излучением радиоактивного источника. Результаты опыта можно объяснить, только если электрический заряд *квантован*, то есть если заряд может быть лишь целым кратным некоторому основному заряду: $q = ne$, где $n = 0$, 1, 2, и т. д., но никогда не равен 3/2 или какой-либо другой дроби.

Минимальный заряд, который может существовать на капле, соответствует максимуму необходимого напряжения. Этот заряд представляет собой заряд одного электрона и равен $-1{,}6 \cdot 10^{-19}$ кулона. В 1 кулоне содержится $1/(1{,}6 \cdot 10^{-19}) = 6{,}3 \cdot 10^{18}$ зарядов электрона (или протона).

Вопрос 18-20
Сколько примерно электронов находилось на надувном шаре, который вы заряжали в «Знакомстве с явлениями»?

Теперь нам известен заряд электрона (и протона). Сравним две изученные силы. Каково отношение электростатического притяжения к гравитационному притяжению между протоном и электроном — например, в атоме водорода? Подсчитаем его:



Обе силы $F_{гр}$ и $F_{эл}$ — силы притяжения

$$\frac{F_{эл}}{F_{гр}} = \frac{kq_e q_p/r^2}{Gm_e m_p/r^2} = \frac{kq_e q_p}{Gm_e m_p} =$$

$$= \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл})^2}{6{,}7 \cdot 10^{-11} \cdot 9 \cdot 10^{-31} \text{ кг} \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-27} \text{ кг}} =$$

$$= 2 \cdot 10^{39}.$$

Отношение сил электростатического и гравитационного притяжения невообразимо велико! Заметьте, что расстояние между протоном и электроном сокращается. Обе силы обратно пропорциональны квадрату расстояния.

Если электростатическая сила во столько раз больше гравитационной, то почему мы ощущаем такую тяжесть

здесь, на Земле? Причина в том, что хотя и мы сами, и Земля наполнены электрически заряженными частицами, но ровно половина из них заряжены положительно, а половина – отрицательно. Почти полная нейтральность приводит к сокращению любых больших суммарных электрических эффектов. Однако не существует отрицательных гравитационных зарядов. Масса всегда положительна, а действующая сила – всегда притяжение. В человеческом теле содержится около $4 \cdot 10^{28}$ протонов и нейтронов, а в Земле – около $3{,}5 \cdot 10^{51}$. Сила взаимодействия между каждой парой частиц, входящих в ваше тело и в Землю, очень мала, – но имеется достаточно пар для того, чтобы вы ощутили свой вес.

РЕЗЮМЕ

Существует только четыре типа физических взаимодействий: гравитационное, электромагнитное, сильное и слабое ядерные взаимодействия. Мы приступили к изучению электромагнетизма – взаимодействия, которое играет наиболее важную роль в нашей повседневной жизни. Оно включает в себя все обычные атомные, молекулярные, химические и биологические процессы, а также все явления, связанные со светом, радиоизлучением и рентгеновским излучением. Источником электромагнитного взаимодействия является электрический заряд. Проводимое нами рассмотрение разделено на три раздела: неподвижные заряды, равномерно движущиеся заряды и заряды, испытывающие ускорение. В этой главе на основе модельных представлений связываются воедино качественные и количественные электростатические эффекты. Во-первых, мы предположили, что существуют отрицательно заряженные электроны, которые можно отнимать от одних веществ и присоединять к другим. Если два вещества приводятся в контакт, то одно из них притягивает электроны сильнее, чем другое, и приобретает отрицательный заряд, в то время как другое вещество заряжается положительно. Разноименные заряды притягиваются, одноименные заряды отталкиваются. Заряженное тело любого знака может поляризовать распределение зарядов на нейтральном теле, что приводит к появлению силы притяжения.

Электростатике можно придать количественный характер, используя закон Кулона. Сила взаимодействия двух точечных зарядов, расположенных на расстоянии r друг от друга, равна

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

Если F выражается в ньютонах, r – в метрах, q – в кулонах, то числовое значение $k = 9 \cdot 10^9$. Кулон является единицей заряда, которая определена через электрический ток. По проволоке идет ток в 1 ампер, если через ее поперечное сечение в 1 секунду проходит заряд в 1 кулон. В электростатике обычно приходится иметь дело с зарядами, составляющими микрокулоны.

Вторая используемая нами модель обращает внимание на то, каким образом электрический заряд искажает (или поляризует) пространство вокруг себя. Мы описываем силовое поле, создаваемое зарядами, и затем вычисляем силу, действующую на единичный пробный заряд, помещенный в это поле. Напряженность поля в определенной точке пространства определяется как сила, действующая в этой точке на единичный пробный заряд:

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}/q_{\text{пр}}.$$

Напряженность поля – вектор, и созданные в какой-либо точке разными источниками напряженности должны складываться векторно. Поле можно изобразить линией со стрелкой, которая указывает направление силы, действующей на единичный заряд. Эти линии напряженности (линии поля) дают наглядное представление качественной природы электрического поля вокруг заряженных тел. При одной дополнительной гипотезе они дают также и количественное представление о силе поля. С помощью этой модели напряженность поля можно сделать равной числу линий напряженности, проходящих через единицу площади, если единичная площадка выбрана таким образом, что ее плоскость перпендикулярна этим ли-

ниям:

$$E = \frac{\text{число линий напряженности}}{\text{площадь}}.$$

Каждая линия напряженности должна начинаться на положительном заряде и заканчиваться на отрицательном. Закон Гаусса в том виде, в каком он был использован, утверждает, что полное число линий напряженности, выходящих через замкнутую поверхность, должно быть пропорционально суммарному заряду, заключенному внутри этой поверхности. В используемой в этой книге Международной системе единиц (СИ) каждому единичному заряду соответствует $4\pi k$ линий напряженности.

С помощью законов Гаусса и Кулона были найдены электрические поля вблизи заряженного шара, заряженного цилиндра, заряженных параллельных пластин и вблизи электрического диполя. Соответствующие формулы приведены в таблице на с. 162.

Вместо того чтобы находить напряженность поля в произвольной точке вблизи заряженного тела, можно измерить работу, необходимую для перемещения единичного пробного заряда из одной точки поля в другую. Такая работа, совершаемая над единичным зарядом при перемещении его из одной точки в другую, называется разностью электрических потенциалов (или просто разностью потенциалов) между этими точками. Разность потенциалов в 1 вольт равна 1 джоулю на кулон. Разность потенциалов между двумя точками не зависит от пути, по которому пробный заряд перемещается из одной точки в другую. Если потенциал какой-либо точки считать равным нулю (иногда эту точку выбирают на бесконечности), то потенциал любой другой точки равен разности потенциалов между данной точкой и точкой нулевого потенциала. Зависимость потенциалов от расстояния для некоторых распределений зарядов приведена в таблице на с. 168.

Поскольку потенциал – скалярная величина, то потенциал в любой точке нетрудно найти как сумму потенциалов, создаваемых различными зарядами. Эквипотенциальные поверхности перпендикулярны линиям напряженности поля.

Электрическая емкость заряженного тела равна

$$C = q/U.$$

Емкость в 1 кулон на вольт называется фарадом. Большинство конденсаторов, с которыми приходится иметь дело, обладает емкостью порядка микрофарад или еще меньше. Емкость шара равна

$$C_{\text{ш}} = R/k,$$

где R – радиус шара в метрах. Емкость параллельных пластин равна

$$C_{\text{п. пл}} = \frac{1}{4\pi k}\frac{S}{d} = \varepsilon_0 \frac{S}{d}.$$

Если пространство между обкладками конденсатора заполнено диэлектриком, то следует использовать другое значение диэлектрической проницаемости ε_a: $\varepsilon_a = \varepsilon\varepsilon_0$. Емкость такой системы:

$$C_{\text{п. пл}} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{S}{d}.$$

У некоторых конденсаторов очень велика площадь поверхности S, у других очень мало расстояние между обкладками d, в третьих используется керамика с очень высоким значением относительной диэлектрической проницаемости ε.

Запасенная в конденсаторе энергия равна

$$W = \frac{1}{2}qU = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{q^2}{2C}.$$

Когда конденсаторы соединяются параллельно, их емкости складываются: $C = C_1 + C_2$. При последовательном соединении конденсаторов эквивалентная емкость определяется выражением $1/C = 1/C_1 + 1/C_2$.

Электрический заряд квантован; это означает, что он может равняться только целому кратному некоторого основного естественного заряда. Такой величиной является заряд электрона или протона. (Однако субатомные частицы, называемые кварками, обладают зарядами в 1/3 или 2/3 естественной единицы. Делается много попыток обнаружить и идентифицировать такие частицы.) Заряд электрона был измерен Милликеном, который получил значение в $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ кулона.

Ответы на вопросы

18-1. Модель Франклина объясняет часть того, что происходит при поднесении заряженной расчески к маленькому алюминиевому шару. Когда расческа касается шара, часть лишних электронов перескакивает с нее на шар, также заряжая его отрицательно. Одноименные заряды отталкиваются. Отрицательно заряженный алюминиевый шар отскочит от отрицательно заряженной расчески. Однако из развитой модели неясно, почему отрицательно заряженная расческа будет сначала притягивать к себе нейтральный алюминиевый шар.

18-2. Обычно влажность воздуха ниже зимой, чем летом, особенно внутри отапливаемых строений. При повышенной влажности сырой не только воздух, но становится влажной и поверхность тел. Водяная пленка на поверхности тел обеспечивает частично проводящий путь, поэтому заряды могут стекать с тел, возвращая все вокруг в электронейтральное состояние.

18-3. Поскольку электроны все-таки соскакивают с ленты на собирающую иглу, то, очевидно, внутренность купола не заряжена отрицательно. Электроны, попадающие на собирающую иглу, попытаются расположиться настолько далеко друг от друга, насколько это возможно. Оптимальное условие будет достигнуто, когда все электроны окажутся на наружной поверхности купола. Ниже это будет доказано теоретически.

18-4. Если бы у Кулона был третий пробный шар такого же размера, как и два других, то он мог коснуться этим нейтральным шаром первого шара и удалить половину его заряда. Затем, удалив сначала заряд с третьего шара, он мог проделать то же самое со вторым шаром и уменьшить его заряд вдвое.

18-5. Сила взаимодействия шаров была бы равна

$$F = 9 \cdot 10^9 \frac{(1\ \text{Кл})^2}{(1\ \text{м})^2} = 9 \cdot 10^9\ \text{Н} \approx 10^{10}\ \text{Н}.$$

Это – невообразимо большая сила; 1 кг весит 9,8 Н, 1 т $= 10^3$ кг весит 10^4 Н. Электростатической силе почти в 10^{10} Н соответствует около 10^6 т. Очевидно, что такая ситуация невозможна.

18-6. Как мы видели в ответе на вопрос 18-5, заряд в 1 Кл разрушит все вокруг себя. Конечно, пробный заряд вовсе не должен равняться 1 кулону только потому, что напряженность поля измеряется в ньютонах на кулон. Пробный заряд может равняться всего лишь $1 \cdot 10^{-9}$ Кл. Если действующая на этот пробный заряд сила равнялась $1 \cdot 10^{-3}$ Н, то напряженность поля составляла

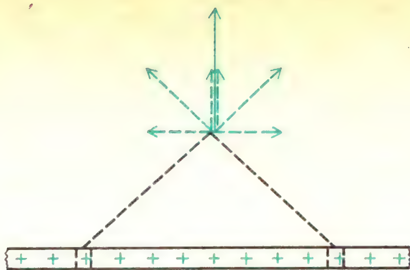
$$E = 1 \cdot 10^{-3}\ \text{Н}/(1 \cdot 10^{-9}\ \text{Кл}) = 1 \cdot 10^6\ \text{Н/Кл}.$$

18-7. Этот вопрос аналогичен вопросу о перетягивании каната. Если одна команда тянет канат влево с силой 1000 Н, а другая команда тянет вправо с силой 1000 Н, то равно ли натяжение веревки 2000 Н? Конечно, нет. При взаимодействии двух тел на каждое из них действуют одинаковые силы, направленные в противоположные стороны.

18-8. «Линии» – это просто наглядная модель с количественной характеристикой – средним числом линий, проходящих через единичную площадку. Действительное число линий зависит от того, как нарисована картина и какая система единиц используется. Конечно, напряженность поля во всех точках, равноудаленных от точечного источника, одинакова. Чтобы найти поле на этом расстоянии, нужно взять достаточно большую площадь, чтобы число пронизывающих ее линий напряженности соответствовало их средней густоте.

18-9. Оказавшись внутри проводящего слоя, свободные заряды стремятся удалиться друг от друга как можно дальше. Они делают это, располагаясь на наружной поверхности проводящего слоя. Если положительный заряд находится внутри полости на диэлектрике, то на внутренней поверхности полости образуется такой же отрицательный заряд. Суммарный внутренний заряд (находящийся на диэлектрике и на внутренней поверхности полости) равен нулю.

18-10. Поле в любой точке определяется суммарным действием всех зарядов. Как можно увидеть на рисунке на с. 179, вблизи равномерно заряженного цилиндра горизонтальная составляющая напряженности поля, создаваемая одним участком цилиндра, полностью компенсируется горизонтальной составляющей, создаваемой другим участком. Не сокращаются только направленные наружу, или радиальные,



составляющие. Они складываются, образуя радиальное поле.

18-11. Если бы линии напряженности существовали внутри проводника, то на свободные электроны действовала бы сила, которая заставляла бы их двигаться до тех пор, пока они не сгруппировались бы таким образом, чтобы создаваемое ими поле скомпенсировало эту силу. В электростатике заряды не движутся. Это условие может выполняться в проводнике только в одном случае, когда электрическое поле внутри проводника отсутствует.

18-12. Если бы линия электрического поля покидала проводящую поверхность под любым углом, не равным 90°, она имела бы составляющую вдоль поверхности металла. Но в статической ситуации в проводнике не может быть электрического поля. Если бы электрическое поле было создано в проводнике на мгновение, это привело бы к движению электронов до тех пор, пока внутреннее электрическое поле не обратилось бы снова в нуль.

18-13. Хотя закон Гаусса в своей общей форме справедлив всегда, использовать его для практических целей можно только тогда, когда удается найти поверхности, которые либо перпендикулярны, либо параллельны линиям напряженности. Более того, каждая точка на поверхности должна быть одинаково удалена от заряда, создающего поле. Электрический диполь невозможно окружить такой поверхностью.

18-14. Использованное выражение основано на предположении, что E_x остается постоянной на протяжении Δx. Но в разобранном случае напряженность поля на расстоянии в 11 см примерно на 20% меньше, чем на расстоянии в 10 см. Можно было провести расчет точнее, если взять напряженность поля в точке, лежащей между 10 и 11 см. В действительности разность потенциалов в этом случае составляет $-8{,}2$ В.

18-15. Потенциал в любой точке, расстояние до которой от центра равномерно заряженного шара больше или равно его радиусу, равен

$$U = k\frac{q}{r}.$$

В рассматриваемом случае потенциал любой точки поверхности шара равен $U = 9\cdot 10^9 \cdot 1\cdot 10^{-6}$ Кл/0,1 м $= 9\cdot 10^4$ В. Потенциал в точке, удаленной на 30 см от центра шара, равен $U = 9\cdot 10^9\cdot 1\cdot 10^{-6}$ Кл/0,3 м $= 3\cdot 10^4$ В. Разность потенциалов между этими точками, таким образом, равна $6\cdot 10^4$ В. Работа, которую необходимо совершить, чтобы переместить пробный заряд в 10^{-8} Кл из точки с меньшим потенциалом в точку с большим, равна

$$A = q\Delta U = 1\cdot 10^{-8}\ \text{Кл}\cdot 6\cdot 10^4\ \text{В} = 6\cdot 10^{-4}\ \text{Дж}.$$

18-16. Энергия, выделяющаяся в искре, равна $(1/2)qU$. (Множитель 1/2 появляется потому, что напряжение падает при стекании заряда. Среднее значение разности потенциалов, которую проходит заряд, составляет половину первоначальной разности потенциалов.) Эта энергия составляет $(1/2) \times 1\cdot 10^{-7}$ Кл $\cdot\, 1\cdot 10^4$ В $= 5\cdot 10^{-4}$ Дж. Такая незначительная энергия не может причинить заметного вреда.

18-17. Хотя вы и не обладаете сферической формой, но, возможно, имеете примерно ту же площадь поверхности что и шар диаметром в 1 м. Поэтому ваша электрическая емкость должна быть равна примерно 50 пкФ ($5\cdot 10^{-11}$ Ф).

18-18. В обоих случаях благодаря индуцированным на диэлектрике зарядам возникает сила притяжения между диэлектрической пластиной и обкладками конденсатора. Пластина втягивается внутрь. Чтобы понять, что происходит в случае, когда батарея остается подсоединенной и напряжение на конденсаторе постоянно, воспользуемся формулой $W = (1/2)CU^2$. Когда диэлектрик располагается между пластинами конденсатора, электрическая емкость C возрастает и, следовательно, возрастает электростатическая энергия. Кроме того, необходима энергия для того, чтобы вдвинуть диэлектрическую пластину; совершаемая при этом работа равна произведению силы на перемещение. Эта работа ли-

бо сообщает пластине кинетическую энергию, либо поглощается за счет трения. Как электростатическая энергия, так и энергия движения поставляются батареей. Постоянное напряжение поддерживается за счет того, что источник питания поставляет в конденсатор дополнительный заряд по мере того, как вдвигается диэлектрик. Это движение зарядов также требует энергетических затрат, которые увеличивают температуру источника питания и соединительных проводов.

Во втором случае, когда постоянен заряд конденсатора, удобно воспользоваться формулой для запасенной энергии $W=(1/2)q^2/C$. Когда между обкладками помещают диэлектрик, электрическая емкость увеличивается и запасенная энергия убывает. Куда она девается? Исчезающая электростатическая энергия превращается в кинетическую энергию диэлектрической пластины. Если бы не было трения, то эта пластина выскочила бы с другой стороны и затем начала бы колебаться вперед и назад. Происходящее в этом случае было бы очень похоже на маятник. Электростатическая потенциальная энергия превращалась бы в кинетическую энергию и обратно.

18-19. Капли или калиброванные пластмассовые шары имеют в диаметре около 1 мкм. Длина волны света составляет только около половины этой величины. Невозможно точно измерить размер чего-либо, используя зондирующие средства примерно такого же размера, что и измеряемый объект. Этот запрет не зависит от качества или от увеличения используемого микроскопа.

18-20. На с. 150 мы убедились, что заряд типичного надувного шара может составлять 0,5 микрокулона: 0,5 мкКл $=5\cdot10^{-7}$ Кл. Число электронов на этом шаре, следовательно, будет равно

$$5\cdot10^{-7}\ \text{Кл}/(1{,}6\cdot10^{-19}\ \text{Кл/электрон}) = 3\cdot10^{12}\ \text{электронов}.$$

Задачи

1. Опишите качественно, каким образом благодаря индукции заряженный надувной шар удерживается на электрически нейтральной стене.

2. Перечислите и опишите действия (используемые материалы и методику), при которых маленький металлический шар зарядится отрицательно при соприкосновении с заряженным телом.

3. Перечислите и опишите действия (используемые материалы и методику), при которых маленький металлический шар зарядится положительно без прикосновения к заряженному телу.

4. Используя рисунок на с. 148, объясните, почему электроны соскакивают с иглы на наружную поверхность ленты в демонстрационном генераторе Ван-де-Граафа.

5. Какова сила взаимодействия между положительным и отрицательным точечными зарядами в 1 мкКл при расстоянии между ними в 10 см?

6. Какова напряженность электрического поля на расстоянии 1 м от точечного заряда в $+1\cdot10^{-9}$ Кл? Какая сила действует в этой точке на тело, обладающее зарядом в $-1\cdot10^{-11}$ Кл?

7. Сколько линий напряженности электрического поля заканчивается на электроне при использовании СИ?

8. Если бы плотность Земли была постоянна, то гравитационное поле убывало бы равномерно при опускании в глубокую шахту. В действительности плотность ядра гораздо выше, чем плотность поверхностной мантии. Как это сказывается на зависимости гравитационного поля от расстояния внутри Земли? Возможно ли, чтобы гравитационное поле в глубокой шахте было сильнее, чем на поверхности Земли?

9. Два положительных заряда каждый по $1\cdot10^{-8}$ Кл находятся на расстоянии 10 см друг от друга. Каковы значение и направление напряженности поля в точке, расположенной в 5 см от прямой, соединяющей заряды, на перпендикуляре, проходящем через ее середину? Какая сила будет действовать в этой точке на заряд в $1\cdot10^{-10}$ Кл?

10. Электрический дипольный момент молекулы воды составляет около $6\cdot10^{-30}$ Кл·м. Какова напряженность электрического поля в точке, лежащей на оси диполя на расстоянии $2\cdot10^{-10}$ м? (Дипольный момент возникает потому, что атом кислорода захватывает электроны атомов водорода, превращаясь в дважды заряженный ион. Два положительно заряженных протона, оставшихся от атомов водорода, прилипают к краю атома кислорода. Такая конфигурация ответственна за так называемую водородную связь.)

11. Запишите последовательно доводы, показывающие, что суммарный электрический заряд внутри проводящей оболочки должен равняться нулю.

12. Запишите последовательно вывод выражения для напряженности поля снаружи

равномерно заряженного шара с помощью закона Гаусса. Изобразите соответствующий рисунок.

14. Каковы значение и направление напряженности электрического поля на расстоянии 10 см от длинного стержня, имеющего постоянную линейную плотность заряда в $1 \cdot 10^{-8}$ Кл/м. Какая сила действует там на пробный заряд в $1 \cdot 10^{-10}$ Кл?

15. Запишите последовательно вывод выражения для напряженности поля между заряженными параллельными пластинами плоского конденсатора. Изобразите подходящий рисунок.

16. Квадратному плоскому конденсатору со стороной в 10 см сообщен заряд $1 \cdot 10^{-9}$ Кл. Какова напряженность электрического поля внутри конденсатора? Какая сила действует на пробный заряд в $1 \cdot 10^{-11}$ Кл, расположенный между обкладками конденсатора? Как зависит эта сила от расположения пробного заряда?

17. К плоскому конденсатору с расстоянием между пластинами в 1 мм приложено напряжение 100 В. Какова напряженность E? Чему равно σ?

18. Каков был бы потенциал шара радиусом 10 см, если бы ему удалось сообщить заряд в 1 Кл?

19. Радиус металлического шара у игрушечного генератора Ван-де-Граафа равен 5 см. Какой заряд нужно поместить на шар, чтобы сообщить ему потенциал в 50000 В?

20. Расстояние между квадратными пластинами плоского конденсатора со стороной в 10 см равно 1 мм. Какова разность потенциалов между пластинами, если заряд на одной пластине равен $1 \cdot 10^{-9}$ Кл?

21. Укажите зависимость от расстояния величин E и U для источников поля в виде точечного заряда, равномерно заряженного шара, равномерно заряженного цилиндра, бесконечной плоскости, диполя.

22. Изобразите линии напряженности электрического поля (сплошными линиями) и эквипотенциальные поверхности (штриховыми) для источников поля, приведенных в задаче 21.

23. Какова приблизительно электрическая емкость обычной легковой автомашины? Какой потребуется заряд, чтобы сообщить ей потенциал в 1000 В?

24. Какова емкость плоского конденсатора, у которого пластины имеют длину 1 м, ширину 10 см, а расстояние между пластинами равно 0,1 мм? Диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 3$. Увеличится ли емкость, если это длинное сооружение превратить в четырехслойный бутерброд: диэлектрическая пленка – проводник – диэлектрическая пленка – проводник, а затем свернуть его в цилиндр диаметром в несколько сантиметров?

25. Какова емкость керамического конденсатора с площадью пластин в 1 см^2, расстоянием между ними в 0,1 мм и диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 10000$?

26. Если вы зарядите себя до потенциала в 15000 В, волоча ноги по ковру, то сколько энергии вы запасете?

27. Имеются два конденсатора с емкостями $C_1 = 1 \cdot 10^{-6}$ Ф, $C_2 = 2 \cdot 10^{-6}$ Ф. Какова будет емкость, если соединить их последовательно? Параллельно?

28. Имеются два конденсатора с емкостями $C_1 = 1 \cdot 10^{-6}$ Ф, $C_2 = 1 \cdot 10^{-8}$ Ф. Какова будет емкость, если соединить их последовательно? Параллельно?

29. Опишите соотношения между E и U. Дано E, как найти U? Дано U, как найти E?

30. Каков диаметр масляной капли ($\rho = 900$ кг/м^3), которую с помощью одного лишнего электрона можно уравновесить в поле напряженностью 10 000 В/м?

31. Изобразите (качественно) линии напряженности и эквипотенциальные поверхности в окрестности точечного заряда, находящегося вблизи проводящей плоскости.

32. Два крошечных металлических шара массой по 10 мг, имеющих одинаковые заряды $-q$, подвешены в одной точке на нитях длиной 30 см. Каждая нить образует угол $15°$ с вертикалью. Каково значение q? Сколько лишних электронов соответствует такому заряду?

ГЛАВА 19. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

Мы приступаем к изучению второго раздела электромагнетизма. В этой главе мы узнаем, что происходит, когда электрические заряды движутся в основном по проводам, и притом только с постоянной скоростью. Этот тип движения зарядов называется *постоянным током*. В этой главе будут рассмотрены движение зарядов и пути, которые они выбирают в различных соединениях проводов. В главе 20 будет рассмотрено другое явление, происходящее при движении зарядов.

Очевидно, что в *электростатике* электрическое поле внутри проводника равно нулю. В противном случае заряды двигались бы. Чтобы создать ток, необходимо движение зарядов и поэтому нужно *поддерживать* электрическое поле внутри проводника. Необходим какой-то источник энергии для того, чтобы поддерживать это электрическое поле и проталкивать заряды через разность потенциалов. Мы познакомимся с тем, каким образом электролитические элементы или их комбинации, называемые батареями, могут поддерживать необходимые электрические поля.

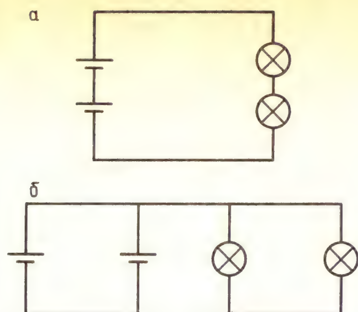
Сила электрического тока уже была определена как $\Delta q/\Delta t$ — скорость прохождения заряда. Теперь предстоит выяснить, каким образом сила тока I зависит от напряженности электрического поля E и материала проводника. Сколько энергии должны обеспечить батареи для поддержания электрического поля и куда эта энергия идет? Чтобы ответить на эти вопросы, необходимо построить модель микроструктуры проводников.

Имеется также ряд практических вопросов, на которые нужно получить ответ. Построенные теории нужно приложить к реальным цепям, реостатам, измерительным приборам. Необходимо научиться соединять их между собой с целью получения ряда практических приложений.

ЗНАКОМСТВО С ЯВЛЕНИЯМИ

1. Для изучения электрических цепей потребуется некоторое оборудование, которое не всегда имеется дома или в студенческом общежитии. Необходимы две батарейки для карманного фонаря, две лампочки для него, два патрона для лампочек и пара метров тонкой проволоки. Первое, что предстоит сделать, это просто зажечь одну лампочку, используя одну батарейку и кусок провода. По определению за направление тока принято направление движения положительного заряда. Влияет ли направление тока в лампочке на яркость ее свечения?

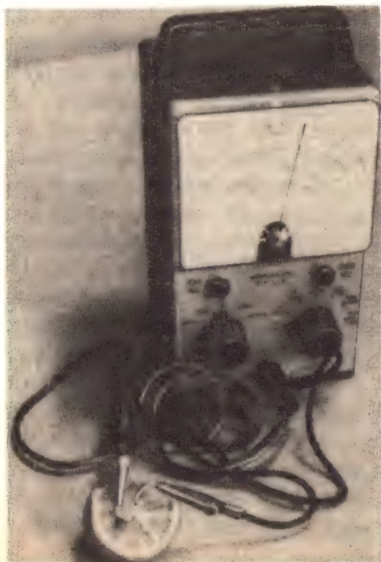
Затем попробуйте собрать цепь, содержащую различные комбинации из элементов и двух лампочек, как показано на рисунке. Все они соединены «последовательно». Сравните яркость света в случаях, когда включен один элемент и одна лампочка, два элемента и одна лампочка, один элемент и две лампочки



Последовательное (*а*) и параллельное (*б*) соединения

и, наконец, два элемента и две лампочки. Затем, в соответствии с рисунком, соберите схемы «параллельного» соединения. Сравните яркость света в схемах с одним элементом и двумя параллельно включенными лампочками, двумя элементами и одной лампочкой, двумя элементами и двумя лампочками. Отметьте полученные результаты, с тем чтобы в конце главы посмотреть, получили ли они объяснение.

2. Можно изготовить собственный электролитический элемент, используя лимон (или любой другой фрукт из цитрусовых), медную монету и оцинкованный гвоздь. Гвозди для крыши или гвозди, которые выглядят серыми и шишковатыми, обычно покрыты цинком. Введите монету и гвоздь в лимон достаточно близко, но так, чтобы они не



касались друг друга. Этот элемент не может обеспечить достаточно энергии для того, чтобы лампочка горела, но если у вас есть хороший вольтметр, то можно обнаружить наличие разности потенциалов между медной монетой и цинковым гвоздем. Если вольтметра нет, воспользуйтесь своим языком; имеющаяся разность потенциалов не причинит вам вреда, но обеспечит пощипывание кончика языка, сходное с возникающим при пробовании чего-нибудь кислого.

3. Если вы живете дома, понаблюдайте за определенными явлениями, связанными с домашними электрическими схемами. Конечно, в жилых домах используется не постоянный, а переменный ток. Тем не менее многие из правил, которые будут сформулированы для цепей постоянного тока, справедливы и для переменного тока.

Прежде всего, посмотрите на электрический счетчик, расположенный в том месте, где электрические провода входят в ваш дом. Заметьте, что он показывает не мощность, а энергию. Название коммерческой единицы электрической энергии – киловатт-час. (Она будет определена ниже.) Попросите кого-нибудь включить мощный потребитель энергии, такой как электрическая печка или тостер, и понаблюдайте при этом за счетчиком.

Провода, выходящие из розеток на стене, проходят некоторое расстояние, прежде чем заканчиваются панелью

с плавкими предохранителями или распределительным щитом. Эти провода должны быть достаточно толстыми для

того, чтобы они не нагревались и не вызывали бы большого напряжения в тех случаях, когда из розеток потребляется большой ток. Большинство бытовых электрических цепей ограничено током в 15 ампер. Тостер потребляет ток почти в 10 ампер. Вставьте в розетку вилки от лампы и от тостера и понаблюдайте, что происходит с лампой, когда вы включаете тостер. Если у вас есть электрическая бритва, то включите ее вместо лампы и прислушайтесь, к чему приводит пропускание большого тока через тостер. Через саму электробритву, кстати, проходит гораздо меньший ток, чем через лампу.

ТОК И МОЩНОСТЬ В ОБЫЧНЫХ ЦЕПЯХ

Уже упоминалось о том, что ток измеряется в амперах. По цепи идет ток в 1 ампер, если через поперечное сечение провода проходит за 1 секунду заряд в 1 кулон: 1 А = 1 Кл/с. Эта единица названа так в честь Андрэ Ампера (1775–1836).

У большинства обычных домашних электроприборов указывается потребляемая ими мощность, а не ток. Конечно, эти величины связаны между собой. Если подаваемая к проводам, лампе или двигателю разность потенциалов поддерживается неизменной, то энергия, потребляемая при прохождении через прибор небольшого заряда, равна $\Delta W = U\Delta q$. Необходимая мощность определяется скоростью расхода энергии: $P = \Delta W/\Delta t$. Но так как $\Delta q = I\,\Delta t$, то $\Delta W = UI\Delta t$ и $P = UI$. Мощность измеряется в джоулях в секунду. Единицей мощности является ватт: 1 Вт = 1 Дж/с. Эта единица названа так в честь Джеймса Уатта (1736–1819). (Как можно заметить, многие из ранних исследователей обрели определенное номинальное бессмертие.)

Если известна мощность электрического прибора и подаваемая на него разность потенциалов, то можно найти силу тока в нем. Мощность типичной лампочки для карманного фонаря составляет 1 Вт. Разность потенциалов обеспечивается двумя последовательно соединенными элементами по 1,5 В каждый. Поскольку $P = UI$, то $1\ \text{Вт} = 3\ \text{В}\cdot I$. Ток через такую лампочку, следовательно, равен (1/3) А. Рассмотрим теперь ток в используемой в домах лампочке в 60 Вт; конечно, через нее течет переменный ток, но для средних значений мощности, тока и напряжения справедливы те же соотношения. Эквивалентное среднее значение разности потенциалов в этом случае составляет от 110 до 120 В, в зависимости от места расположения дома. Если принять значение в 120 В, то $I = P/U = 60\ \text{Вт}/120\ \text{В} = 0{,}5\ \text{А}$.

Вопрос 19-1
Как может 60-ваттная лампочка давать так много света по сравнению с лампочкой для карманного фонаря, если текущий в ней ток лишь чуть-чуть больше?

Большинство тостеров имеет мощность около 1000 Вт. Сила тока в тостере, следовательно, будет равна

$$I = P/U = 1000\ \text{Вт}/120\ \text{В} = 8{,}3\ \text{А}.$$

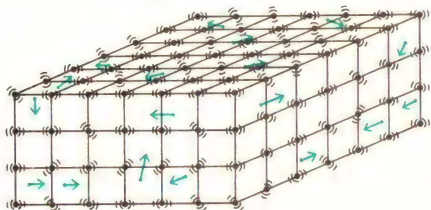
Стартер в легковой машине работает на постоянном токе. Типичный мотор требует около 1 лошадиной силы: 1 л. с. ≈ 746 Вт.

При 12-вольтовой батарее ток в таком моторе равен $I = P/U = 746\ \text{Вт}/12\ \text{В} = 62\ \text{А}$. Ток такой силы уничтожил бы плавкие предохранители в вашем доме. Взгляните на провода, идущие от батареи к стартеру в автома-

шине. Они очень толстые. В некоторых генераторах и исследовательских магнитах используются токи в 10 000 А и больше. «Провода» для таких больших токов обычно представляют собой медные шины с площадью сечения в несколько квадратных сантиметров.

МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯДОВ В ПРОВОДЕ

В металле атомы образуют кристаллическую решетку. Один или два наружных электрона, которые считались бы валентными электронами в свободном атоме, не привязаны к своему родительскому атому. Вместо этого они могут свободно странствовать по кристаллу. В атомной модели, которую мы



будем использовать, предполагается, что свободные электроны ведут себя подобно молекулам газа. Они блуждают случайным образом, сталкиваясь с массивными ионами, которые совершают колебания около фиксированных положений.

Этой классической модели электронов в металле присущи те же ограничения, что и модели атома Бора. Электроны с энергией в электрон-вольт или меньше не могут быть локализованы в области размером меньше, чем атом. Поэтому невозможно последовательно описать их движение на языке орбит или межчастичных столкновений. Вместо этого квантовая механика позволяет предсказать вероятность обнаружения электрона в определенном месте и с определенным значением энергии. Функции вероятности получаются в виде волн, которые обладают всеми обычными волновыми свойствами, такими как отражение, преломление и, что наиболее важно, интерференция. В этой более сложной теории движение электронов в решетке, образованной ионами, описывается как движение волны, которая рассеивается на дефектах решетки. Далее, появляются условия квантования энергетических уровней блуждающих электронов. Эти условия аналогичны условиям квантования атомных орбит. Например, два электрона с одинаковым спином не могут иметь одинаковые импульсы, а спин может принимать только два значения.

Достаточно удивительно, однако, то, что грубая модель электронного газа в металле объясняет большинство обычных явлений, связанных с электрическим током. Воспользуемся ею как хорошим первым приближением и будем заимствовать дополнительные факты, когда они будут необходимы, из более сложной теории. Прежде всего обратим внимание на различие между проводниками и диэлектриками. Если наружные атомные электроны вещества используются для образования молекулярной связи, то они не могут свободно проводить ток. Однако в этом случае вещество не обязательно будет либо диэлектриком, либо проводником. Существует еще бесконечное число промежуточных возможностей, в том числе и таких, когда некоторые пары веществ разрешают электронам двигаться через их границу в одном направлении и запрещают в другом. Некоторые вещества, такие как алмаз, обычно являются очень хорошими диэлектриками, но если через них пролетает субатомная частица, освобождая по пути связанные в определенных местах электроны, кристалл может мгновенно превратиться в хороший проводник.

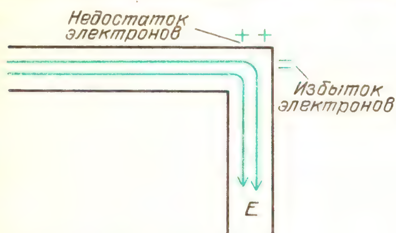
Предположим, что имеется длинная медная проволока, полная свободных электронов. Каким образом можно приложить постоянное электрическое поле, которое заставит электроны двигаться? Практически мы просто присоединяем концы проволоки к полюсам батареи.

Вопрос 19-2
Как выглядит электрическое поле вокруг батареи до того, как присоединяется проволока?

Если бы электрическое поле в одной точке внутри провода было сильнее, чем

в другой, то в этой области на электроны действовала бы бóльшая сила, и они накапливались бы во второй области. Но этого не может быть. Сила тока должна быть одинаковой в любом месте проволоки, иначе происходило бы накопление зарядов. Поэтому электрическое поле должно быть одинаковым в любом месте провода (в предположении, что сам провод одинаков и не имеет ответвлений). Каким образом электрическое поле может быть постоянным внутри провода, который может протянуться на большое расстояние от батареи и вообще может быть даже завязан узлом? Ответ заключается в том, что если вначале электрическое поле не одинаково в разных местах, то произойдет накопление заряда, в результате чего возникнут силы, которые замедлят движение зарядов в одном месте и ускорят его в другом. Когда установится стационарное состояние, то вдоль внешней границы и по углам могут появиться небольшие нескомпенсированные заряды. Это распределение избыточных зарядов вдоль провода корректирует электрическое поле, заставляя его быть одинаковым во всех местах.

Чтобы оценить какой избыточный заряд необходим на наружной поверхности провода для того, чтобы изогнуть линии напряженности электрического поля в месте резкого изгиба провода, рассмотрим частный случай с простой геометрией. На рисунке показан провод,



который имеет прямой угол. Для того чтобы электрическое поле в таких условиях оставалось неизменным, линии напряженности, приходящие слева, должны выглядеть так, как будто они должны окончиться на отрицательном заряде в углу. Линии напряженности, идущие вниз, должны выглядеть так, как будто они начались на положительном заряде, расположенном с другой стороны угла. В обычной цепи, содержащей соединительные провода и батарейки для карманного фонаря, существует ток около 1 А в проводе сечением в 1 мм. Чтобы обеспечить такой ток, необходима разность потенциалов в 17 мВ на каждый 1 м провода. Следовательно, напряженность поля в проводе равна

$$E = -\frac{17 \cdot 10^{-3}\ \text{В}}{1\ \text{м}} = -17 \cdot 10^{-3}\ \text{В/м}.$$

Заметьте, что при вычислении напряженности электрического поля было предположено, что она одинакова по всему проводу и, следовательно, соотношение между напряженностью поля и разностью потенциалов такое же, как в конденсаторе, где поле также постоянно: $E = -\Delta U/\Delta x$.

Теперь можно найти, какой заряд должен быть на сгибе провода, чтобы линии напряженности могли на нем окончиться. Напомним, что при обрыве линий на поверхности проводника соотношение между напряженностью поля и поверхностной плотностью заряда имеет вид $E = \sigma/\varepsilon_0$. В данном случае,

$$17 \cdot 10^{-3}\ \text{В/м} = \sigma/(8{,}9 \cdot 10^{-12}).$$

Следовательно, поверхностная плотность заряда равна $\sigma = 1{,}5 \cdot 10^{-13}$ Кл/м^2. Полный заряд равен произведению плотности заряда на площадь:

$$q = \sigma S = (1{,}5 \cdot 10^{-13}\ \text{Кл/м}^2)(1 \cdot 10^{-6}\ \text{м}^2) = 1{,}5 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл}.$$

Это приблизительно заряд одного электрона! При данных конкретных значениях электрического поля и площади поперечного сечения прóвода присутствие одного избыточного электрона с одной стороны сгиба и отсутствие электрона с другой стороны – все, что требуется для того, чтобы повернуть линии напряженности постоянного электрического поля на 90°.

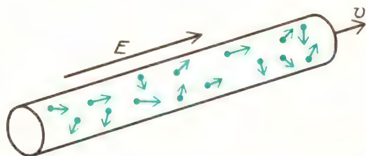
Когда цепь только замыкается, то электрическое поле не может быть одинаковым вдоль всего провода. Пока происходит установление стационарно-

го режима, электроны движутся быстрее там, где электрическое поле сильнее, и накапливаются таким образом, что уменьшают это сильное поле. Излишние заряды быстро устанавливают стационарное состояние, так что электрическое поле становится одинаковым вдоль всего провода, в результате чего и ток также становится везде одинаковым. В главе 21 мы выясним, сколько времени занимает установление стационарного состояния в типичном случае.

Подчеркнем, что ток должен быть постоянным, а электрическое поле одинаковым только в случае, когда цепь состоит всего из одного провода постоянного сечения с неизменными свойствами по всей его длине. Если же имеются точки разветвления, то ток разделится: часть зарядов пойдет по одному пути, а часть – по другому. Если две различные проволоки соединяются вместе, чтобы образовать один длинный провод, то ток будет постоянным в любом месте; но чтобы добиться этого условия, электрические поля в обеих частях провода должны быть различными. Для объяснения вышесказанного необходимо найти связь между электрическим полем и током.

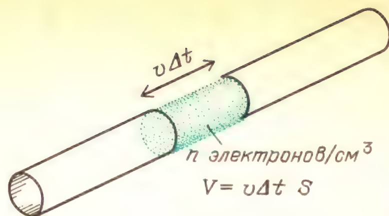
СКОРОСТЬ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯДОВ В ПРОВОДЕ

Согласно нашей модели, проволока подобна трубке, наполненной электронами. Несмотря на то что электроны



совершают хаотическое тепловое движение, они должны также, благодаря приложенному электрическому полю, перемещаться вдоль трубки. Сосчитаем скорость, с которой электроны движутся вдоль провода.

На рисунке показано, как подсчитать число электронов, которые пройдут через данное сечение за время Δt. Мимо точки наблюдения за время Δt пройдут все электроны, находящиеся в цилиндре длиной $v\Delta t$ и площадью поперечного се-



чения S. Плотность числа электронов (или их концентрация в металле) равна n и, поскольку каждый электрон несет заряд e, плотность заряда равна ne. Заряд в указанном цилиндре равен

$$\Delta q = nev\Delta t S.$$

Сила тока равна

$$I = \Delta q/\Delta t = neSv.$$

Если известна концентрация свободных электронов в металле, то можно сосчитать скорость, с которой они движутся, создавая определенный ток. Сколько свободных электронов имеется в проводе?

Большинство электронов в атоме крепко привязаны к ядру. В твердом теле наружные, или валентные, электроны часто образуют молекулярные связи. Однако в металлах один или два наружных электрона могут свободно странствовать по всему веществу, в то время как тяжелые ионы остаются около фиксированных мест в кристаллической решетке. В меди имеется один свободный электрон на атом. Концентрация свободных электронов, следовательно, такая же, как и концентрация атомов. Поскольку нам известны число атомов в 1 моле, число молей в 1 грамме и число граммов в 1 кубическом сантиметре, то можно найти число атомов в 1 кубическом сантиметре. Для меди концентрация свободных электронов (носителей заряда) равна

$$n = \frac{\text{1 носитель заряда}}{\text{атом}} \times$$

$$\times \frac{\text{атомы}}{\text{моль}} \cdot \frac{\text{моль}}{\text{граммы}} \cdot \frac{\text{граммы}}{\text{см}^3} =$$

$$= \frac{\text{1 носитель заряда}}{\text{атом}} \times$$

$$\times 6 \cdot 10^{23} \, \frac{\text{атомов}}{\text{моль}} \cdot \frac{\text{1 моль}}{\text{64 г}} \cdot \frac{\text{9 г}}{\text{см}^3} =$$

$$= 8{,}4 \cdot 10^{22} \text{ носителей заряда/см}^3 =$$

$$= 8{,}4 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}.$$

Скорость носителей заряда равна $v = I/neS$. Для тока в 1 ампер в медной проволоке с площадью сечения в 1 мм^2 эта скорость равна

$$v = \frac{1\ \text{А}}{8{,}4\cdot 10^{22}\ \text{см}^{-3}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\ \text{Кл}\cdot 1\cdot 10^{-2}\ \text{см}^2} = 7\cdot 10^{-3}\ \text{см/с}.$$

Вопрос 19-3

Это необычайно маленькая скорость! Предположим, что батарея соединена с лампочкой двумя проводами длиной по 1 м. Через сколько времени загорится лампочка после того, как провод присоединен к батарее?

Средние *тепловые* скорости электронов при комнатной температуре составляют примерно $8\cdot 10^4$ м/с – гораздо больше, чем скорость движения под действием электрического поля. (Согласно нашей модели, средняя энергия электронов должна быть такой же, как и у молекул газа при той же температуре. Масса электрона меньше, чем масса молекулы воздуха, примерно в 60 000 раз. Поэтому средняя скорость электронов должна быть больше средней скорости молекулы примерно в $\sqrt{60\,000} \approx 250$. Поскольку $v_{\text{ср. мол}} \approx v_{\text{зв}} = 340$ м/с, то $v_{\text{ср. эл}} \approx 8\cdot 10^4$ м/с.) Очевидно, что направленное движение в результате действия электрического поля представляет собой просто медленный дрейф, накладывающийся на основное хаотическое движение. Тем не менее с такой скоростью дрейфует много электронов, и в результате этого получается заметный ток. Обратите, однако, внимание на то, что было сделано предположение о пропорциональности тока напряженности электрического поля в условиях стационарного режима. Но это означает, что скорость дрейфа электронов пропорциональна напряженности поля.

Действительно, описанная модель является плохим приближением для рассматриваемого случая. Из-за квантовых ограничений электроны в проводнике вовсе не находятся в тепловом равновесии с ионами решетки. Например, они не поглощают тепло и, таким образом, не дают заметного вклада в теплоемкость вещества. В действительности скорость хаотического движения электронных носителей заряда в меди составляет около $2\cdot 10^6$ м/с, что делает ситуацию еще более драматичной!

Вопрос 19-4

Может ли *скорость* заряда быть пропорциональной действующей на него *силе*? Разве второй закон Ньютона не справедлив?

Если сила тока и скорость дрейфа пропорциональны электрическому полю и если электрическое поле постоянно внутри провода, то напряженность электрического поля равна $E = U/l$, где U – разность потенциалов*) на концах провода длиной l. Из сделанных предположений следует утверждение: если сила тока в цепи пропорциональна напряженности электрического поля в проводе, то она также пропорциональна напряжению на концах провода: $I \sim E \to I \sim U$. Обычно легче измерить напряжение на концах провода или во всей цепи, чем напряженность электрического поля в проводнике. Мы исследуем много цепей, в которых сила тока пропорциональна напряжению, но, вообще говоря, это не всегда так. Существуют важные исключения. Как часто бывает в науке, эти исключения раскрывают теорию полнее, чем правила.

ТОК КАК ФУНКЦИЯ НАПРЯЖЕНИЯ

Теперь у нас есть формула, выражающая силу тока как функцию скорости движения носителей заряда, и соотношение между этой скоростью и разностью потенциалов на концах цепи. Объединим эти выражения:

$$I = neSv,\quad v = v_{\text{д}} = \beta E = \beta U/l.$$

Коэффициент пропорциональности между скоростью дрейфа и напряженностью электрического поля обозначен

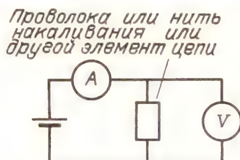
*) Начиная с этого места в данной главе буквой U обычно будет обозначаться разность потенциалов *на концах цепи*. Обычно о U говорят как о напряжении.

через β; он называется подвижностью. Постоянная по модулю напряженность поля в проводе равна отношению разности потенциалов на концах провода к его длине. Тогда сила тока равна

$$I = ne\frac{S}{l}\beta U, \quad I \sim U.$$

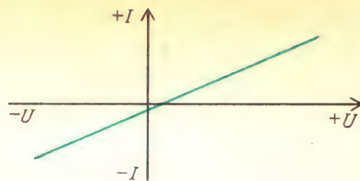
Сила тока в проводе пропорциональна напряжению на его концах, хотя коэффициент пропорциональности может меняться при изменении условий. Например, при изменении температуры может измениться n – концентрация носителей заряда; может измениться также коэффициент β, который связывает электрическое поле со скоростью дрейфа. Далее, коэффициент пропорциональности между током и напряжением зависит от длины и площади поперечного сечения провода.

Рассмотрим соотношение между током и напряжением в трех случаях. В лабораторных условиях легко менять приложенное напряжение, нить накаливания или какие-либо другие элементы цепи, и измерять ток в ней. Эти операции показаны схематически на рисунке,



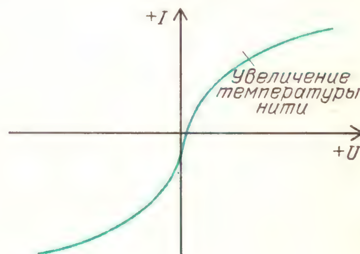
где кружок с буквой A означает амперметр, используемый для измерения тока, а кружок с буквой V означает вольтметр. Заметьте, что амперметр показывает ток в цепи, в то время как вольтметр показывает разность потенциалов на концах элемента цепи.

$I(U)$ **для металлического провода при постоянной температуре.** Для обычного металлического провода при неизменной температуре сила тока пропорциональна напряжению. Число носителей заряда остается постоянным и не зависит от направления тока. (Скоро мы встретимся со случаем, когда n зависит от направления тока.) Зависимость $I(U)$ изображена на рисунке. Положительные и отрицательные знаки тока и напряжения соответствуют просто разным направлениям. В этом случае, изменив



полярность батареи, вы меняете направление тока на обратное, но коэффициент пропорциональности остается тем же.

$I(U)$ **для нити лампы накаливания.** Температура вольфрамовой нити в лампе накаливания поднимается до 2000 К, когда она светит на полную мощность. Концентрация носителей заряда в проволоке не меняется существенно при таком значительном изменении температуры. Но скорость дрейфа меняется. Напомним, что $v_д = \beta E = \beta U/l$. В соответствии с изложенной моделью электронов в металле можно ожидать, что скорость дрейфа должна уменьшиться в результате увеличившихся тепловых колебаний ионов решетки. При более высоких температурах и больших амплитудах колебаний ионы оказывают большее сопротивление дрейфующим электронам, понижая таким образом их подвижность. Обратите внимание на эффект, к которому приводит изменение подвижности β в основном уравнении: $I = ne(S/l)\beta U$. Если β уменьшается при увеличении температуры, то при определенном напряжении получится меньший ток. По мере увеличения напряжения на накаливаемой нити растет и ее температура. Результирующая кривая $I(U)$ выглядит так, как показано на рисунке.



Зависимость силы тока от напряжения для вольфрамовой нити. Форма кривой зависит от температуры нити при определенном напряжении. Силу тока следует измерять после того, как установится стационарное значение температуры

Вопрос 19-5
Область отрицательных значений силы тока соответствует высокой или низкой температуре?

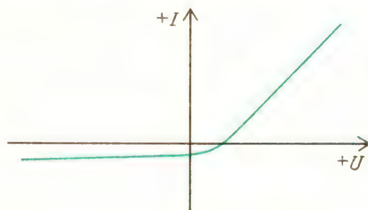
Когда Томас Алва Эдисон начал в конце девятнадцатого века изготавливать лампы накаливания, он использовал угольные нити в вакуумных трубках. (Современные лампы накаливания содержат вольфрамовые нити, заключенные в колбах, содержащих инертный газ при атмосферном давлении.) Угольные нити накаливания были очень недолговечными, а также обладали электрическими характеристиками, совершенно отличными от характеристик вольфрама. Кривая зависимости $I(U)$ для угольной нити выглядит так, как показано на рисунке. Поскольку увеличение напряжения делает свет более

У углерода при увеличении температуры β убывает, но n растет

ярким в результате увеличения температуры, то и коэффициент пропорциональности между I и U должен *увеличиваться* с ростом температуры. Тем не менее по-прежнему справедливо, что коэффициент β уменьшается при увеличении температуры нити. У углерода, однако, при росте температуры сильно увеличивается концентрация носителей заряда. Причина этого заключается в том, что большинство валентных электронов в твердом углероде довольно слабо связаны ковалентными связями. Число электронов на каждый атом, которые могут свободно странствовать, зависит от температуры (и от типа кристалла углерода). При увеличении подаваемого на угольную нить напряжения ток растет и температура повышается. Но при повышении температуры увеличивается число электронов, освобождающихся от ковалентных связей, что приводит к росту тока. В свою очередь увеличившийся ток поднимает температуру еще выше. Эти процессы продолжались бы до тех пор, пока угольная нить не перегорела, если бы не еще одно обстоятельство. Излучение раскаленной нити пропорционально четвертой степени температуры. Прежде чем нить испарится, устанавливается равновесие между энергией, поставляемой источником питания цепи, и излучаемой энергией. При этом и температура, и ток перестают увеличиваться.

Когда напряжение прикладывается к вольфрамовой нити, ток в начальный момент велик, так как нить холодная. Примерно за одну сотую долю секунды температура увеличивается, и ток уменьшается до своего стационарного значения. У угольной нити последовательность происходящего прямо противоположная. Вначале ток мал, а затем увеличивается до стационарного значения при росте температуры нити.

$I(U)$ **для диода.** При соединении медного провода с проводом из серебра электроны могут двигаться в любом направлении. Но это уже несправедливо для соединений определенных веществ, таких как медь и окись меди или приготовленная специальным образом комбинация германия или кремния. Соединения, которые пропускают заряд преимущественно в одном направлении, называются диодами. Типичная кривая зависимости $I(U)$ для диода показана на рисунке. В одном направлении, показанном на рисунке как положительное,



электроны могут двигаться через точку соединения, как по обычному проводу. Однако в другом направлении наблюдается большое сопротивление движению электронов. Для большинства дио-

дов кривая на графике не изменяет резко своего направления при равном нулю напряжении. Вместо этого характеристики, присущие для одного направления, медленно переходят в характеристики, присущие другому направлению, в области порядка нескольких десятых вольта. Кроме того, в большинстве случаев такой переход происходит при положительном значении приложенного напряжения. Необходимо перейти за некоторое пороговое значение напряжения в несколько десятых вольта для того, чтобы электроны могли свободно проходить через место контакта.

ЧАСТНЫЙ – НО ВАЖНЫЙ – СЛУЧАЙ ЗАКОНА ОМА

Мы только что столкнулись с несколькими случаями, когда ток в каком-либо элементе цепи *не* пропорционален приложенному к нему напряжению. Однако во многих цепях используются такие элементы, что ток *пропорционален* напряжению. Условия должны быть такими, чтобы число носителей заряда не зависело от напряжения и коэффициент пропорциональности β между $v_д$ и E оставался приблизительно постоянным. Обычно эти ограничения означают, что температура элементов цепи не должна заметно меняться при пропускании тока. В этом случае можно объединить все коэффициенты, связывающие силу тока и напряжение, в одну новую константу:

$$I = ne\frac{S}{l}\beta U = \frac{U}{R}.$$

Эта новая постоянная R называется *сопротивлением*. Единицей сопротивления служит ом, равный сопротивлению цепи, в которой течет ток в 1 А, если приложенная разность потенциалов составляет 1 В:

1 Ом = 1 В/А.

Ненавидевший все человечество англичанин Кавендиш установил экспериментально пропорциональность тока и напряжения в 1770-е годы. В характерной для него манере Кавендиш не удосужился никому сообщить об этом. Впервые этот закон был опубликован около 1820 года Георгом Омом (1787–1854), но еще в течение 10 лет он не был повсеместно признан. Сейчас он известен как закон Ома:

$$I = U/R.$$

Обратите внимание на соотношение между сопротивлением R и другими величинами, определяющими ток: $1/R = ne(S/l)\beta$. Может показаться неразумным, что произведение этих характеристик определяется как обратная величина новой постоянной. Можно было бы поступить по-другому и определить произведение этих величин как проводимость. Однако история и привычка распорядились иначе.

Сопротивление можно выразить через другие характеристики и так:

$$R = \frac{1}{ne\beta}\,\frac{l}{S} = \rho\frac{l}{S}.$$

В результате этой перегруппировки геометрические факторы провода отделяются от характеристик, связанных с его микроструктурой. Новая постоянная ρ называется *удельным электрическим сопротивлением* (или просто удельным сопротивлением). Эта величина зависит от типа вещества проводника и определяется концентрацией носителей заряда и соотношением между напряженностью электрического поля и скоростью дрейфа. Геометрический фактор l/S зависит от толщины провода и его длины. Если известны размеры провода и удельное сопротивление металла, из которого он сделан, то можно рассчитать его сопротивление. Удельное сопротивление измеряется в ом-метрах. При умножении удельного сопротивления на длину провода (в метрах) и деления на площадь его поперечного сечения (в квадратных метрах) получается сопротивление в омах.

Вопрос 19-6

Зависимость $I(U)$ для проводника, подчиняющегося закону Ома, показана на с. 189. Каким образом сопротивление проводника связано с наклоном кривой?

Удельное сопротивление различных веществ представлено на с. 192. Обратите

внимание на огромный интервал значений. Как нетрудно видеть, существуют как хорошие и плохие проводники, так хорошие и плохие диэлектрики с очень большим различием между ними в каждой группе.

Удельное сопротивление и температурный коэффициент сопротивления

Вещество	ρ, Ом·м	α, $10^{-4}К^{-1}$
Алюминий	$2{,}7\cdot10^{-8}$	43
Бор	$2\cdot10^{4}$	
Углерод (аморфный)	$3{,}5\cdot10^{-5}$	−5
Медь	$1{,}7\cdot10^{-8}$	68
Германий	0,46	−500
Золото	$2{,}4\cdot10^{-8}$	40
Железо	$9{,}7\cdot10^{-8}$	65
Свинец	$20{,}7\cdot10^{-8}$	34
Ртуть	$98\cdot10^{-8}$	9
Платина	$10{,}6\cdot10^{-8}$	39
Кремний	100 – 1000	−750
Серебро	$1{,}6\cdot10^{-8}$	41
Сера	$2\cdot10^{15}$	
Вольфрам	$5{,}6\cdot10^{-8}$	45
Нихром (сплав Fe, Ni, Cr)	$100\cdot10^{-8}$	4
Плавленый кварц	10^{18}	
Стекло	$10^{10}-10^{14}$	
Твердый каучук	$10^{13}-10^{16}$	
Твердые породы дерева	$10^{8}-10^{11}$	

Подсчитаем сопротивление медной проволоки длиной 1 м и поперечным сечением 1 мм^2. Это примерно соответствует размерам тонкой проволоки, которая могла использоваться ранее в нескольких опытах с батареями и лампочками накаливания.

Итак,

$$R = 1{,}7\cdot10^{-8}\ \text{Ом}\cdot\text{м}\,\frac{1\ \text{м}}{1\cdot10^{-6}\ \text{м}^2} = 1{,}7\cdot10^{-2}\ \text{Ом}.$$

Вопрос 19-7

Если этим проводом длиной 1 м замкнуть полюса батарейки для карманного фонаря, какой силы ток пойдет по цепи?

Используя закон Ома, можно подсчитать сопротивление цепи карманного фонаря. Как уже отмечалось, типичная лампочка, для которой используется батарея из сдвоенных элементов, потребляет мощность 1 Вт при токе около (1/3) А. Поэтому

$$I = U/R,\ (1/3)\ \text{А} = 3\ \text{В}/R.$$

Сопротивление этой цепи должно равняться 9 Ом. Такое сопротивление довольно велико по сравнению с сопротивлением медного провода. Это обеспечивается горячей нитью, сопротивление которой при комнатной температуре гораздо меньше.

Коэффициент пропорциональности β при скорости дрейфа, а следовательно, и при удельном сопротивлении ρ зависит не только от температуры металла, но и от его кристаллической решетки.

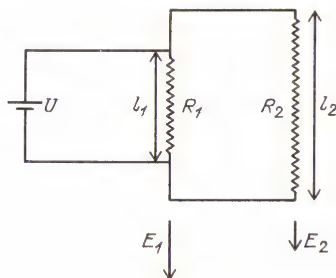
Приведенные здесь значения удельного сопротивления проводников относятся к очень чистым металлам. Небольшое количество примесей или дефектов решетки, возникающих в процессе кристаллизации, может значительно увеличить сопротивление. Исчерпывающее объяснение этих эффектов базируется на использовании квантовых законов, о которых уже упоминалось. В модели электронной проводимости, основанной на понятии волны вероятности, эта волна просто дифрагирует на неподвижных атомах. Сопротивление обусловлено рассеянием волны по мере ее движения по проводу. Любое отклонение от регулярной кристаллической структуры, такое как наличие вакансий или примесных атомов, приводит к увеличению сопротивления. Здесь мы сталкиваемся с квантовомеханическим объяснением того, каким образом электроны с высокой концентрацией ($n \approx 10^{23}$ носителей заряда/см^3) могут вести себя подобно газу при низком давлении (при нормальном давлении и температуре в газе $n \approx 3\cdot10^{19}$ молекул/см^3). Хотя атомы в твердой меди разделены промежутками всего в $3\cdot10^{-8}$ м, электроны в таком кристалле при комнатной температуре пробегают между двумя последовательными столкновениями в среднем расстояние в $300\cdot10^{-8}$ м. Фактически их волновое поведение уменьшает эффективную концентрацию в $100^3 = 10^6$ раз.

Дополнительный материал

Часто об электрическом сопротивлении вещества думают как о чем-то обусловленном определенным типом преград, которые электроны должны преодолеть. Такая точка зрения приводит к очевидным парадоксам, которых на самом деле можно избежать. Напомним, что сопротивление – это просто коэффициент пропорциональности между током в цепи и приложенной к ее концам разностью потенциалов. Еще лучше представлять себе закон Ома как соотношение между током и напряженностью электрического поля:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U}{\rho(l/S)} = \frac{U/l}{\rho/S} = \frac{E}{\rho/S}.$$

В качестве примера этой альтернативной точки зрения рассмотрим два параллельно соединенных провода, показанные на рисунке. Они сделаны из одного и того же материала и обладают одинаковым поперечным сечением S и удельным сопротивлением ρ.

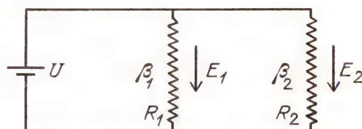


Однако $l_2 = 2l_1$. Напряжение на концах этих двух проводов одинаково, но напряженность электрического поля в них разная: $E_1 = U/l_1$, $E_2 = U/l_2 = U/2l_1$. Следовательно, $E_1 = 2E_2$. Из-за того что электрическое поле в более коротком проводе вдвое больше, чем в длинном, скорость дрейфа электронов в нем будет также в два раза больше. Поэтому и сила тока в этом проводе будет в два раза больше, чем во втором. Конечно, такой же результат можно получить, подсчитав, что $R_2 = 2R_1$. Поскольку $I = U/R$, то справедливо соотношение $I_1 = 2I_2$. Если спросить, какую работу нужно совершить, чтобы провести единичный заряд через эти сопротивления, то может показаться, что работа будет больше при прохождении через большее сопротивление; однако падение потенциала одинаково на обоих сопротивлениях, поэтому совершаемая работа должна быть одной и той же при прохождении единичного заряда по любому пути.

Вопрос 19-8

Почему в обоих случаях совершается одинаковая работа? В конце концов, заряд, идущий через сопротивление R_2, проходит вдвое больший путь.

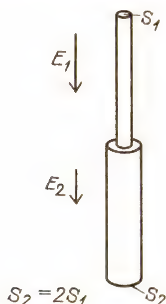
Выясним значение сопротивления в другом случае, изображенном на следующем рисунке. Снова имеются два параллельно соединенных провода, к концам которых приложена одна и та же разность потенциалов,



однако в данном случае длина проводов одинакова. Поэтому одинакова и напряженность электрического поля в каждом проводе. Они могут иметь одинаковую площадь поперечного сечения S и одинаковую концентрацию носителей заряда n, но могут различаться значением коэффициента пропорциональности β при скорости дрейфа из-за того, что они сделаны из разных металлов или находятся при разных температурах. Предположим, что $\beta_1 = 2\beta_2$, тогда в силу равенства $v_д = \beta E$ должно быть справедливо соотношение $v_1 = 2v_2$. Скорость дрейфа в первом проводе вдвое больше скорости дрейфа во втором. Следовательно, сила тока в первом проводе будет вдвое больше, чем во втором: $I_1 = 2I_2$. Поскольку $\rho \sim 1/\beta$, то сопротивление первого провода должно составлять только половину сопротивления второго: $R_1 = (1/2)R_1$. Снова мы сталкиваемся с вопросом, какая работа совершается при перемещении заряда по каждому пути. Конечно, работа должна быть одинаковой, поскольку провода соединены параллельно. Но сопротивление первого пути равно половине сопротивления второго. Тем не менее напряженности поля в проводах одинаковы и одинаковы расстояния, на которые перемещаются заряды. Поскольку работа равна произведению действующей на заряд силы на перемещение, то работа в обоих случаях одинакова, несмотря на то, что сопротивления различны.

Рассмотрим еще один случай, когда электрические поля и сопротивления в двух

частях цепи различны. На рисунке показано соединение между тонким и толстым проводом. Предположим, что провода сделаны из одинакового материала, находятся при одной и той же температуре, но $S_2 = 2S_1$.

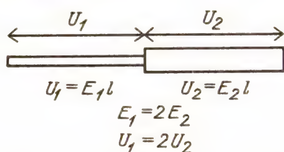


Поскольку провода соединены между собой последовательно, то ток в них должен быть одинаков. Так как $I = neSv_д$, то скорость дрейфа в толстом проводе должна быть вдвое меньше этой скорости в тонком проводе: $v_{д2} = (1/2)v_{д1}$. Но скорость дрейфа пропорциональна напряженности электрического поля: $v_д = \beta E$. Поэтому поле в толстом проводе должно быть вдвое слабее поля в тонком: $E_2 = (1/2)E_1$.

Вопрос 19-9

Что происходит с линиями напряженности электрического поля в тонком проводе, когда они подходят к месту соединения с толстым проводом?

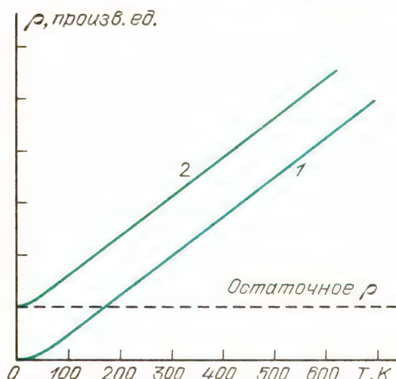
Если последовательно соединенные между собой тонкий и толстый провода имеют одинаковую длину, то разность потенциалов на концах тонкого провода вдвое больше, чем на концах толстого, так как $U = El$.



В этом случае сопротивление тонкого провода вдвое больше сопротивления толстого и работа, совершаемая при перемещении заряда по тонкому проводу, вдвое больше работы, совершаемой при перемещении по толстому проводу такой же длины. Однако причина того, что совершается вдвое большая работа, заключается не в большем сопротивлении провода, а в том, что электрическое поле в нем сильнее.

ТЕМПЕРАТУРНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ УДЕЛЬНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

Согласно нашей модели, удельное электрическое сопротивление должно увеличиваться с ростом температуры до тех пор, пока концентрация носителей заряда остается постоянной. Зависимость удельного сопротивления от температуры для чистого (*1*) и «грязного» (*2*) металлов показана на рисунке. В значительном интервале в области комнатных температур эта кривая может быть



Удельное электрическое сопротивление чистого металла в отсутствие дефектов решетки обусловлено тепловыми колебаниями атомов. В реальных металлах любые примесные атомы или дефекты кристаллической решетки приводят к остаточному удельному сопротивлению, которое не зависит от температуры

задана соотношением $\rho = \rho_0(1 + \alpha t)$. В этой формуле t соответствует температуре, отсчитанной от комнатной, т. е. от 20 °C. На с. 192 приведены значения температурного коэффициента сопротивления α для некоторых веществ.

В принятом на графике масштабе получается, что удельное сопротивление металлов обращается в нуль при температуре абсолютного нуля. Вообще это неверно; имеется остаточное сопротивление. Как на основе модели электронного газа, так и на основе модели волны вероятности следует ожидать, что сопротивление уменьшается с понижением температуры. В обеих моделях колебания связанных ионов с уменьшением температуры кристалла становятся меньше, что приводит к уменьшению роли столкновений и повышению регу-

лярности решетки. В модели электронного газа с понижением температуры тепловые скорости электронов убывают. В течение более длинных промежутков времени между столкновениями электрическое поле оказывает большее воздействие на электроны, увеличивая их скорость дрейфа и понижая сопротивление. В модели волны вероятности уменьшение скорости электронов приводит к увеличению длины волны, в результате чего уменьшается рассеяние волны и убывает сопротивление. Однако колебания решетки не прекращаются при абсолютном нуле температуры. Даже в совершенном кристалле следует ожидать межчастичных столкновений по одной модели или рассеяния волн по другой, что приводит к отличному от нуля сопротивлению.

Однако при температурах ниже 20 К сопротивление некоторых веществ обращается в нуль. Это явление было открыто в 1911 году. Оно называется *сверхпроводимостью.* Ниже приведены температуры, при которых некоторые вещества становятся сверхпроводниками.

Критическая температура перехода в сверхпроводящее состояние

Вещество	T_c, K
Алюминий	1,18
Ртуть	4,16
Индий	3,41
Ниобий	9,17
Свинец	7,23
Олово	3,72
Тантал	4,39
Ванадий	5,37
Цинк	0,85

Различные комбинации молибдена (Mo), ниобия (Nb), олова (Sn), ванадия (V), германия (Ge), индия (In), галлия (Ga) и алюминия (Al) дают вещества, которые переходят в сверхпроводящее состояние при сравнительно высоких температурах. Эти смеси частично являются соединениями, частично – твердыми растворами.

Al_2CMo_3	10
$Al_{0,8}Ge_{0,2}Nb_3$	20,7
$AlNb_3$	18,0
$In_{0,3}Nb_3Sn_{0,7}$	18

Заметьте, что медь и серебро не бывают сверхпроводниками. Заметьте, что сверхпроводники имеют не маленькое сопротивление, а сопротивление, строго равное нулю. Камерлинг-Оннес, который обнаружил этот эффект, создал ток в кольце сверхпроводящей ртути, который поддерживался в течение многих лет без всякого подвода энергии.

Вопрос 19-10

Как Камерлинг-Оннес сумел определить, что в кольце все еще идет ток, не включая в цепь измерительного прибора, что привело бы к поглощению энергии?

Теоретическое объяснение явления сверхпроводимости было дано только в течении двух последних десятилетий. Это строго квантовый эффект, не имеющий никаких классических аналогов, который заключается в следующем. Два электрона взаимодействуют друг с другом и с решеткой таким образом, что образуют единую пару. Хотя энергия связи невелика, она достаточна для того, чтобы один электрон не мог испытать столкновения (его волна вероятности не могла рассеяться) благодаря дефектам или колебаниям решетки без того, чтобы не возмутилось движение второго электрона. Ниже критической температуры ионы решетки не могут обеспечить при столкновении такую энергию, которая достаточна для разрушения электронной пары. Электроны не могут обмениваться меньшими порциями энергии, и в результате они движутся по кристаллической решетке, вообще не испытывая никакого сопротивления.

Легко представить себе, какие большие экономические преимущества принесло бы использование проводов с нулевым электрическим сопротивлением. Разве не оказалась бы возможной передача энергии на большие расстояния без всяких потерь? На этом пути встречаются две проблемы. Во-первых, сверхпроводник должен находиться при температуре, меньшей критической, которая во всех случаях близка к абсолютному нулю. Охлаждение и изоляция, необходимые для поддержания таких условий, очень дороги. Во-вторых, сила тока, который можно поддерживать в сверхпро-

воднике, ограничена. Большие токи или сильные магнитные поля могут разрушить сверхпроводящее состояние. Несмотря на эти трудности, построено большое число сверхпроводящих устройств, включая магниты, которые используются для практических целей, главным образом в исследовательских физических лабораториях.

ПОТЕРИ ЭНЕРГИИ В ЦЕПЯХ

Мы уже знаем, что при перемещении заряда в поле с разностью потенциалов U совершается работа, равная $\Delta A = \Delta q U$, и необходимая мощность определяется равенством $\Delta A/\Delta t = (\Delta q/\Delta t)U = IU$. Заряды движутся со скоростью дрейфа и поэтому в среднем не приобретают кинетическую энергию благодаря ускорению. Тем не менее над ними совершается работа для поддержания скорости дрейфа, и эта энергия должна куда-то деваться. Она проявляется, конечно, в тепловом движении ионов в решетке. Другими словами, проводник, по которому идет ток, нагревается.

Поскольку $I = U/R$, то потери энергии в единицу времени можно выразить тремя различными способами:

$$P = IU = I^2R = U^2/R.$$

Например, если по резистору сопротивлением 100 Ом идет ток в 0,1 А, то мощность тепловых потерь равна

$$P = (0{,}1\ \text{А})^2 \cdot 100\ \text{Ом} = 1\ \text{Вт}.$$

В большинстве случаев 1 ватт – это маленькая мощность. Она примерно равна мощности, поглощаемой лампочкой карманного фонаря. Однако если ток в 100-омном резисторе равен 10 А, то поглощаемая мощность гораздо выше, а именно:

$$P = (10\ \text{А})^2 \cdot 100\ \text{Ом} = 1 \cdot 10^4\ \text{Вт}.$$

Заметьте, что хотя ток во втором случае в 100 раз больше, чем в первом, поглощаемая мощность возрастает в 10 000 раз.

Плавкие предохранители в домашней цепи состоят из тонкой полоски металла, который имеет небольшое сопротивление и низкую температуру плавления. Если ток в проводах и, следовательно, в предохранителе превышает допустимое значение, то полоска в предохранителе плавится, разрывая цепь и, возможно, предохраняя от более серьезных нарушений. Типичный предохранитель на 15 А имеет сопротивление 0,1 Ом. При предельном токе поглощаемая мощность в предохранителе составляет

$$P = (15\ \text{А})^2 \cdot 0{,}1\ \text{Ом} = 22{,}5\ \text{Вт}.$$

Вопрос 19-11
Согласно одному из приведенных выражений, мощность пропорциональна сопротивлению. Согласно другому, она *обратно* пропорциональна сопротивлению. Если соединить два провода, один сопротивлением в 1 Ом, а другой сопротивлением в 2 Ом, то в каком из них будет поглощаться большая мощность?

Единицей мощности является ватт:

$$1\ \text{Вт} = 1\ \text{А} \cdot 1\ \text{В} = 1\ \text{Кл/с} \cdot 1\ \text{В} = 1\ \text{Дж/с}.$$

Более крупной единицей является киловатт (кВт), который составляет примерно 4/3 лошадиной силы. Когда вы платите за электричество, вас больше интересует не мощность, а израсходованная электроэнергия. Широко используемой единицей ее является киловатт-час (кВт · ч):

$$1\ \text{кВт} \cdot \text{ч} = 1 \cdot 10^3\ \text{Вт} \cdot 3{,}6 \cdot 10^3\ \text{с} = 3{,}6 \cdot 10^6\ \text{Дж}.$$

На с. 197 приведены значения используемой или производимой мощности различных потребителей и источников электроэнергии. Как можно убедиться, бытовые устройства, которые используются для получения тепла с помощью электричества, обычно расходуют гораздо больше энергии, чем устройства, совершающие механическую работу.

ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕЗИСТОРЫ

Многие элементы цепи, такие как катушки индуктивности и нити накаливания, обладают собственным сопротивлением. В одних случаях, как, например,

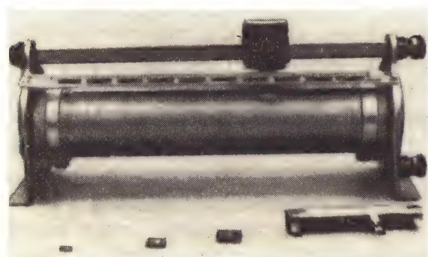
у нити накаливания, сопротивление является положительным качеством, поскольку благодаря джоулевым потерям нить нагревается до белого каления.

Потребители и источники электроэнергии в быту

Карманный фонарь (2 сухих элемента)	3 Вт
Газонокосилка мощностью 3 л. с.	2,25 кВт
Средняя мощность (от всех источников), потребляемая одним американцем	12 кВт
Воздушный кондиционер для комнаты с одним окном	1,5 кВт
Электрическое одеяло (в среднем)	175 Вт
Электрические часы	2 Вт
Сушилка для одежды	5 кВт
Посудомойка	1,2 кВт
Небольшой вентилятор	100 Вт
Подвесной вентилятор	350 Вт
Морозильник (15 фут^3)	400 Вт
Холодильник (12 фут^3)	250 Вт
Электробритва	14 Вт
Тостер	1,2 кВт
Пылесос	650 Вт
Стиральная машина	500 Вт
Телевизор	200 – 300 Вт
Электроплита (4 комфорки, духовка)	12 кВт
Фен для волос	400 Вт
Электропроигрыватель	100 Вт
Водяной насос	500 Вт
Бензиновый движок	300 Вт

В других случаях выделение тепла нежелательно и приходится идти на ухищрения, чтобы обеспечить отвод тепла из цепи. Некоторые электронные устройства, требующие принудительного воздушного охлаждения, снабжаются металлическими радиаторами.

Сосредоточенное сопротивление заранее заданной величины является основным элементом цепи. Оно называется резистором. Некоторые из резисторов показаны на рисунке.



22-Омные резисторы

Вопрос 19-12
Зачем умышленно включать резистор в цепь?

Сопротивление каждого из изображенных на рисунке резисторов равно 22 Ом. Вместе с тем они несравнимы по размерам. Различие обусловлено той энергией, которую они могут поглотить безопасно для себя. Самый маленький резистор рассчитан на 0,5 Вт, в то время как самый большой – на 100 Вт. Ток, который можно пропускать через каждый резистор, определяется выделяющимся теплом, равным I^2R. Для 22-омного полуваттного резистора максимальная сила тока равна 0,15 А, для 100-ваттного резистора максимальная сила тока составляет 2,1 А.

Показанные на рисунке маленькие резисторы сделаны из керамики в смеси с углем. В продажу поступают резисторы со стандартными значениями сопротивления, такими как 22 Ом (но не 20 Ом), рассчитанные на мощности в 0,5, 1 и 2 Вт. Когда поглощаемая мощность превышает 2 Вт, резисторы обычно выполняются из проволочных катушек на керамических цилиндрах. Сопротивление резисторов, в которых используется прессованный уголь, может достигать 10^8 Ом. При больших сопротивлениях вещество, из которого сделан резистор, должно заключаться в стеклянную капсулу и обращаться с ним следует таким образом, чтобы на стеклянную оболочку не попадали пыль и жирная грязь. В противном случае поверхностное сопротивление окажется меньше его номинального внутреннего сопротивления.

Рассчитаем, какой тип резистора следует использовать, если вы собираетесь замкнуть источник питания сопротивлением в 10 Ом. Если источником питания служит батарейка для карманного фонаря, то поглощаемая мощность составит $P = U^2/R = (1{,}5\ \text{В})^2/10\ \text{Ом} \approx \approx 0{,}25\ \text{Вт}$. В этом случае можно взять полуваттный резистор и иметь достаточный запас безопасности. Однако в случае, когда 10 Ом собираются включить в домашнюю электрическую сеть, развиваемая мощность составит $P = (120\ \text{В})^2/10\ \text{Ом} = 1440\ \text{Вт}$.

Теперь 10-омный резистор должен обладать такими же способностями к рассеянию энергии, как и тостер.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ И ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЯ РЕЗИСТОРОВ

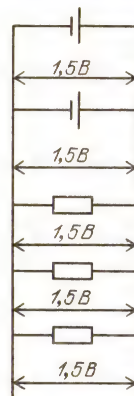
В электрических цепях встречаются различные комбинации резисторов, катушек индуктивности, конденсаторов, батарей и разных других элементов. Ток идет через них, разделяясь в каждой точке соединения. Для того чтобы рассчитать силу тока в каждом элементе цепи и существующее на нем напряжение, необходимо найти эквивалентное сопротивление двух и более резисторов, соединенных последовательно и параллельно.

Основное предположение при анализе цепи заключается в том, что на соединительных проводах не происходит падения напряжения. В действительности это не всегда так. В «Знакомстве с явлениями» вы узнали и убедились сами, что происходит, когда тостер включается в сеть следом за лампой или электробритвой. Подаваемое напряжение падает. Очевидно существует падение напряжения на проводах, соединяющих розетку на стене с главными плавкими предохранителями. Тем не менее в первом приближении в тех цепях, которые мы исследуем, будем считать, что потенциалы всех точек соединительных проводов одинаковы.

Далее следует также воспользоваться фактом, который нам уже известен. Если два элемента цепи соединить последовательно, то разность потенциалов на концах этого соединения равна сумме разностей потенциалов на концах каждого элемента. Например, если последовательно соединены две полуторавольтовые батарейки для карманного

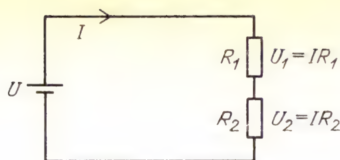
фонаря, то они обеспечивают разность потенциалов в 3 В. То же самое справедливо для двух последовательно соединенных резисторов. Если на первом из них потенциал падает на 1 В, а на втором – на 2 В, то разность потенциалов на концах всей комбинации равна 3 В. Во всех этих случаях следует помнить, что разность потенциалов равна работе, совершаемой при перемещении единичного заряда по соответствующему элементу цепи. Если требуется 1 Дж/Кл для прохождения через первый резистор и еще 2 Дж/Кл для прохождения через второй, то, разумеется, потребуется 3 Дж/Кл для прохождения через оба.

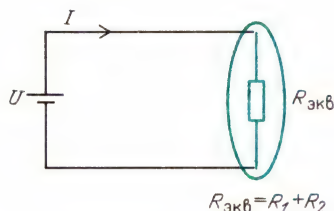
С другой стороны, если элементы цепи соединены параллельно, то разность потенциалов, измеренная между точками их соединения, одинакова. Это должно быть так, поскольку на соединительных проводах падение напряжения



отсутствует. Когда в «Знакомстве с явлениями» вы соединяли параллельно два сухих элемента, было видно, что яркость свечения лампы такая же, как и при одном элементе. (Однако если необходимо обеспечить ток очень большой величины, то иногда может оказаться хорошей идеей включить два элемента параллельно, так, чтобы каждый из них мог обеспечить половину тока. В следующем разделе мы познакомимся с другой причиной для использования такого соединения.)

Последовательное соединение резисторов. Разность потенциалов на концах резистора равна IR, поскольку $I = U/R$. О такой разности потенциалов обычно говорят как о напряжении на сопротивлении. Напряжение на двух последова-





тельно соединенных резисторах равно

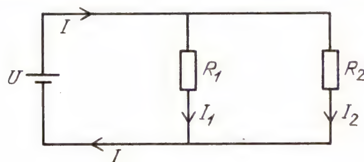
$$U = U_1 + U_2 = IR_1 + IR_2 = IR_{экв},$$

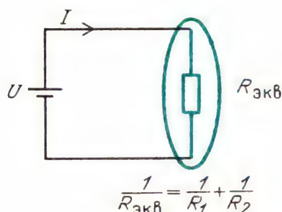
где U_1 и U_2 – напряжение на резисторах R_1 и R_2. Их эквивалентное сопротивление обозначено как $R_{экв}$. Поскольку резисторы соединены последовательно, по каждому из них идет одинаковый ток. Следовательно,

$$R_{экв} = R_1 + R_2.$$

Эквивалентное сопротивление последовательно соединенных резисторов равно просто сумме их отдельных сопротивлений.

Параллельное соединение резисторов. В параллельной цепи падение напря-





жения на каждом из элементов цепи одинаково:

$$U = U_1 = U_2.$$

Однако токи в каждом элементе цепи могут быть различными. Ток, идущий в основной части цепи, разветвляется, так что часть зарядов проходит через одну ветвь, а часть через другую:

$$I = I_1 + I_2.$$

Поскольку ток и падение напряжения в каждой ветви цепи связаны соотношением $I = U/R$, то должно быть справедливо соотношение

$$\frac{U}{R_{экв}} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2}.$$

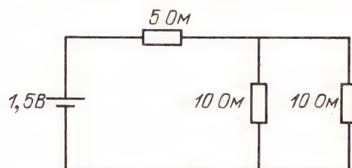
Так как напряжение одинаково, то

$$\frac{1}{R_{экв}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Сравните эти формулы для соединения *резисторов* с аналогичными формулами для соединения *конденсаторов*. Они как раз противоположные. Здесь, если резисторы соединены последовательно, то их сопротивления складываются. Если они соединены параллельно, то эквивалентное сопротивление определяется сложением обратных величин.

Вопрос 19-13
Чем объяснить это различие в формулах сложения для резисторов и конденсаторов? Разве в обоих выводах использовались не сходные аргументы?

Применим эти правила сложения в одном простом конкретном случае. Какой ток создает батарея в изображенной цепи и каково напряжение на параллельной части цепи? Общий путь решения всех подобных задач заключается



в том, чтобы заменить каждую параллельную часть цепи ее эквивалентным сопротивлением, а затем сложить это сопротивление со всеми сопротивлениями, включенными последовательно с ним. В данном случае параллельно включены два 10-омных резистора. Здесь легко найти эквивалентное сопротивление, которое равно половине со-

противления каждого из одинаковых резисторов, т.е. 5 Ом. Это верно для одинаковых резисторов, поскольку

$$\frac{1}{R_{экв}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1} = \frac{2}{R_1}.$$

Итак, эквивалентное сопротивление равно $R_{экв} = 0{,}5R_1$. В рассматриваемом примере

$$\frac{1}{R_{экв}} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5}.$$

Дополнительный материал

Иногда полезно непосредственно выразить эквивалентное сопротивление из формулы для параллельного соединения двух резисторов:

$$R_{экв} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Отсюда очевидно, что эквивалентное сопротивление при параллельном соединении всегда должно быть меньше любого отдельного сопротивления, поскольку эту формулу можно записать так:

$$R_{экв} = R_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} = R_2 \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

В любом случае отдельное сопротивление умножается на дробь, меньшую единицы. Если сопротивление одного из параллельно соединенных резисторов составляет меньше 0,1 сопротивления другого, то резистором с большим сопротивлением обычно можно пренебречь.

Вопрос 19-14

Каким будет приближенное эквивалентное сопротивление и какой будет вносимая ошибка, если пренебречь одним из сопротивлений, при параллельном соединении 10- и 100-омного резисторов?

Поскольку в рассматриваемом примере эквивалентное сопротивление параллельной части цепи равно 5 Ом, то полное сопротивление цепи составляет 10 Ом. Следовательно, создаваемая батареей сила тока равна

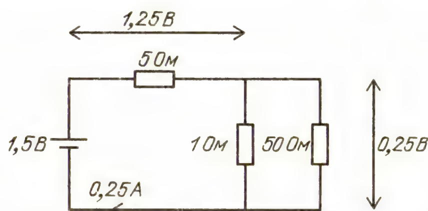
$$I = \frac{1{,}5\ \text{В}}{10\ \text{Ом}} = 0{,}15\ \text{А}.$$

Падение потенциала на параллельной части цепи определяется величиной IR, где R – ее эквивалентное сопротивление. В данном случае это напряжение равно

$$IR = 0{,}15\ \text{А} \cdot 5\ \text{Ом} = 0{,}75\ \text{В}.$$

Поскольку отдельный 5-омный резистор соединен последовательно с эквивалентным сопротивлением в 5 Ом, то напряжение на всей комбинации делится поровну, так что на каждый элемент приходится по 0,75 В.

Рассмотрим ток и распределение потенциала в другой простой цепи, изображенной на рисунке. В этом случае нет необходимости проводить подробное



вычисление для определения эквивалентного сопротивления параллельной части. Оно должно быть немного меньше 1 Ом, отличаясь от этого значения всего на 2%.

Действительно, предположим, что $R_1 \ll R_2$. Тогда относительное отличие R_1 от точного значения $R_{экв}$ равно

$$\frac{R_1 - R_{экв}}{R_{экв}} = \frac{R_1[1 - R_2/(R_1 + R_2)]}{R_{экв}} \approx 1 - \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \approx \frac{R_1}{R_2}.$$

В данном случае относительное отличие составляет приблизительно 1/50, что равняется 2%.

Полное сопротивление в рассматриваемой цепи составляет около 6 Ом. Создаваемая батареей сила тока равна

$$I = 1{,}5\ \text{В}/6\ \text{Ом} = 0{,}25\ \text{А}.$$

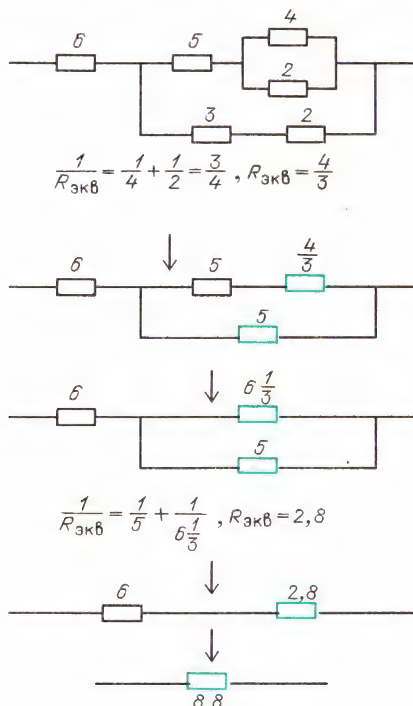
Падение потенциала на параллельной части цепи равно

$$IR = 0{,}25\ \text{А} \cdot 1\ \text{Ом} = 0{,}25\ \text{В}.$$

Остальные 1,25 В, обеспечиваемые бата-

реей, приходятся на падение потенциала на 5-омном резисторе.

Для того чтобы найти эквивалентное сопротивление сложной цепи, показанной на этом рисунке, следует просто несколько раз подряд применить простые правила сложения. Определите эквивалентное сопротивление каждой параллельной части, начиная с самой внут-



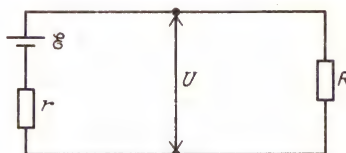
ренней. Этот анализ показан стрелками как серия шагов на рисунке.

ВНУТРЕННЕЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ИСТОЧНИКА ПИТАНИЯ

До сих пор мы предполагали, что батарея работает в цепи просто как электронный насос, поддерживая неизменную разность потенциалов между ее полюсами. В действительности батарея (или любой другой источник тока) должна обладать внутренним сопротивлением. Рассмотрим, например, что происходило, когда вы замыкали накоротко гальванический элемент в «Знакомстве с явлениями». Сила тока в проводе могла возрасти до 10 А, что, конечно, достаточно для того, чтобы температура проволоки поднялась настолько, чтобы это можно было ощутить. Но сопротивление того короткого куска медной проволоки не могло превышать 0,01 Ом. Если бы батарея не обладала внутренним сопротивлением, то можно было бы ожидать появления силы тока, равной

$$I = 1{,}5\ \text{В}/0{,}01\ \text{Ом} = 150\ \text{А}.$$

Внутреннее сопротивление батареи (или любого другого источника тока) может быть изображено как в приведенной на рисунке схеме цепи. Возможная



разность потенциалов называется выходным напряжением. По историческим причинам действительная разность потенциалов, создаваемая батареей, называется электродвижущей силой $\mathscr{E}$. Несмотря на такое название электродвижущая сила, или э. д. с., это не сила, а разность потенциалов — энергия, сообщаемая одному кулону.

Сила тока с учетом э. д. с. выразится формулой

$$I = \mathscr{E}/(r + R).$$

Напряжение, существующее на полюсах батареи, равно

$$U = \mathscr{E} - Ir =$$
$$= \mathscr{E} - \mathscr{E}r/(r + R) = \mathscr{E}R/(r + R).$$

Если внутреннее сопротивление r очень мало по сравнению с сопротивлением нагрузки R, то выходное напряжение почти равно э. д. с., как можно убедиться с помощью приведенного выше выражения.

Выходное напряжение зависит от силы тока, получаемого от источника питания. Внутреннее сопротивление нового 1,5-вольтового гальванического элемента составляет около 0,1 Ом. Даже если этот элемент обеспечивает силу тока 1 А, его выходное напряжение ненамного меньше номинальной э. д. с.:

$$U = \mathscr{E} - Ir = 1{,}5\ \text{В} - 1\ \text{А}\cdot 0{,}1\ \text{Ом} =$$
$$= 1{,}4\ \text{В}.$$

Внутреннее сопротивление увеличивается по мере старения батареи. Если измерить выходное напряжение у отработавшего элемента для карманного фонаря, то вольтметр может показать величину, близкую к 1,5 В, но это происходит потому, что вольтметр потребляет очень маленький ток и, следовательно, падение напряжения внутри батареи Ir мало́. Старый сухой элемент вполне может обладать внутренним сопротивлением в 5 Ом.

Вопрос 19-15
Что произойдет, если попытаться использовать такой элемент для создания тока в (1/3) А, необходимого для лампочки карманного фонаря?

В «Знакомстве с явлениями» вы заметили, что свет лампы тускнеет, а электробритва замедляет вращение, когда тостер питается током от той же розетки. В этом случае под внутренним сопротивлением источника питания можно подразумевать сопротивление проводов, идущих от розетки в стене до главного плавкого предохранителя. В зависимости от длины настенных проводов и «возраста» дома внутреннее сопротивление вполне может равняться 1 Ом. Если тостер потребляет силу тока около 10 А, то напряжение на проводах Ir равно

$$10\ \text{А} \cdot 1\ \text{Ом} = 10\ \text{В}.$$

Падение подаваемого напряжения на 10 В вполне может быть обнаружено по изменению яркости лампы или звука электробритвы.

Любой источник питания обладает внутренним сопротивлением. Это сопротивление в большом генераторе мало́, но создаваемый им ток велик. Возникающие во внутренней части цепи потери энергии являются расточительством, хотя и неизбежным, и выделяющееся тепло должно отводиться водяным охлаждением.

Дополнительный материал

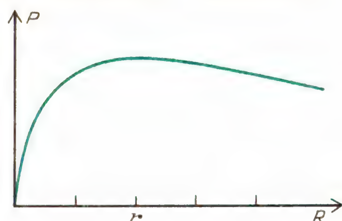
Существует удивительное условие получения максимальной мощности от источника питания при *фиксированном внутреннем сопротивлении.* Объединим выведенные нами выражения для силы тока и для выходного напряжения и получим формулу, определяющую мощность, выделяющуюся на сопротивлении нагрузки R:

$$P = IU = \frac{\mathscr{E}}{r+R}\,\frac{\mathscr{E}}{r+R}\,R = \frac{\mathscr{E}^2}{(r+R)^2}\,R.$$

Будем менять сопротивление нагрузки, чтобы получить максимальную мощность. Если сопротивление нагрузки равно нулю, то ток максимален, но внешнее напряжение и мощность равны нулю. С другой стороны, если сделать сопротивление нагрузки R больше внутреннего сопротивления r источника питания, то внешнее напряжение примерно равно э. д. с. Однако выделяющаяся на нагрузке мощность мала:

$$P \to \mathscr{E}^2/R \quad \text{при} \quad R \gg r.$$

Здесь показан график зависимости мощности, выделяющейся на нагрузке, от сопротивления R. Обратите внимание на два только что разобранных предельных случая.



Зависимость мощности от сопротивления нагрузки

Кривая достигает максимума в точке, где $R = r$. При таком соотношении максимальная мощность отбирается от источника питания и выделяется на внешней нагрузке. Но такая же мощность должна выделяться и внутри источника питания. Конечно, крупные электростанции работают не при таких условиях; там стараются уменьшить внутреннее сопротивление генераторов. Однако в электронике для получения максимальной мощности в определенных цепях приходится делать сопротивление нагрузки равным фиксированному внутреннему сопротивлению.

Элементы Вольты и батареи.

Когда Бенджамин Франклин и другие исследователи в восемнадцатом веке изучали электричество, им приходилось использовать электростатические генераторы. Так было до 1800 года, когда Алессандро Вольта (1745—

1827) создал первую имеющую практическое значение батарею. За несколько лет до этого друг Вольты, Луиджи Гальвани, обнаружил, что касание проволокой, один конец которой медный, а другой железный, различных нервных и мышечных окончаний препарированных животных приводит к сокращению мышечных тканей. Гальвани полагал, что ему удалось продемонстрировать «животное» электричество. Вольта же обнаружил, что при использовании различных металлов и раствора соли можно получить тот же эффект.

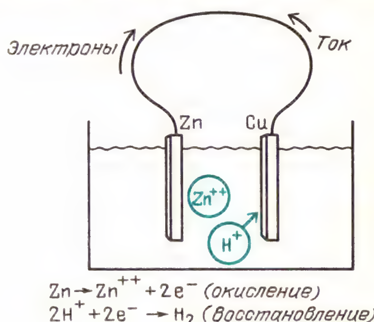
На рисунке схематически показан типичный «вольтов столб». Чередующиеся слои цинка (*1*) и серебра (*2*) разделены бумагой, пропитанной раствором соли (*3*).

«Вольтов столб»

Каждый слой образует электролитический элемент, обладающий э. д. с. около 1 В. Собирая элементы в столб, Вольта смог получить источник значительного напряжения.

При наличии источников питания – батарей, которые могли поддерживать постоянный ток в течение длительного времени, решительно изменился характер исследований электрических явлений. Джозеф Генри в Америке и Майкл Фарадей в Англии получили возможность питать током большие магниты и проводить эксперименты по электролизу, в которых различные элементы и соединения образуют проводящие жидкости. Изготовляя в «Знакомстве с явлениями» лимонную батарею, вы построили электролитический элемент. (Техническая электрическая батарея представляет собой комбинацию некоторого числа элементов, но на обыденном языке вольтов элемент часто называют батареей.) Между почти любыми двумя различными металлами, которые погружены в электрически проводящую жидкость, называемую *электролитом*, существует разность потенциалов. В случае элемента из лимона электролитом являлась слабая лимонная кислота. Химические реакции, происходящие между двумя электродами и электролитом, подчас бывают очень сложными.

Независимо от конкретных деталей, на одном электроде происходит «окисление», а на другом – «восстановление». Когда атом окисляется, он теряет электроны, восстанавливаясь, он получает их обратно. Если один из электродов растворяется в электролите, то его атомы уходят в раствор как положительные ионы, оставляя электроны на



электроде. На другом электроде, где происходит восстановление, положительные ионы присоединяют электроны. В некоторых гальванических элементах при восстановлении ионы металлов оседают на электроде. Во многих других элементах на электроде, где происходит восстановление, ионы водорода превращаются в атомы, которые затем объединяются в молекулы и всплывают пузырями, как газ.

Окисление и восстановление могут продолжаться только в том случае, если электроны, освободившиеся на одном электроде, могут перебраться на другой. Такой путь обеспечивает внешний соединительный провод. Каждый электрон, освободившийся при окислении, путешествует по внешней цепи (или толкает другие электроны впереди себя) и заканчивает свой путь на другом электроде, где он восстанавливает положительный ион.

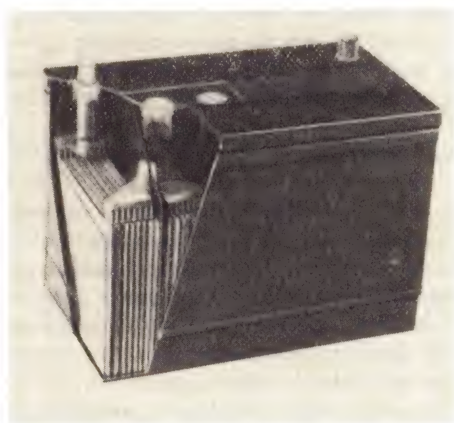
В случае гальванического элемента, где электролитом является лимонная кислота, цинк растворяется быстрее меди и попадает в раствор как ион с двойным положительным зарядом. Каждый ион цинка оставляет после себя два электрона, которые движутся по внешнему соединительному проводу. Если этот провод соединен с медным электродом, то электроны могут восстанавливать ионы водорода в кислотном электролите, превращая их в водородные атомы. В гальваническом элементе химическая энергия превращается в электрическую. При этом процессе некоторые химические соединения распадаются на более ста-

бильные образования атомов и ионов, обеспечивая таким образом энергию, необходимую для того, чтобы заставить электроны двигаться в ту часть цепи, где уже имеется избыток электронов. Конечно, химическая энергия в действительности, прежде всего, также представляет собой электромагнитную энергию. Освобождаемая энергия зависит от типа химических реакций (типа электродов и электролита), от концентрации электролита, от температуры и давления. Во всех случаях возникающая э. д. с. оказывается *порядка* вольта (в используемых на практике элементах от 1 до 2 В). Поэтому энергия, сообщаемая каждому электрону, испущенному таким элементом, оказывается порядка электрон-вольта. Как мы уже видели раньше, энергия связи валентных электронов составляет величину порядка электрон-вольта, и как раз такая энергия характерна для соединения одного атома с другим.

Обыкновенный сухой элемент, который обычно используется в карманных фонариках, был изобретен французом Лекланше в 1868 году. Наружный корпус сделан из цинка, который служит отрицательным электродом; кнопка сверху, которая является положительным электродом, прикреплена к угольному стержню, идущему вниз по оси цилиндра. Уголь играет роль химически инертного соединения с окружающим слоем пасты из двуокиси марганца в смеси с графитовой пудрой. Между двуокисью марганца и цинком помещается влажная паста из нашатырного спирта и хлористого цинка, которая служит электролитом. Когда цинк растворяется и переходит в электролит, его электроны остаются на дне корпуса. Если дно корпуса и положительная верхняя кнопка соединены через внешнюю цепь, то электроны могут пройти через угольный стержень и восстановить двуокись марганца из состояния 4^+ до состояния 3^+. Именно эта реакция создает э. д. с. примерно в 1,6 вольт. Поступающие в продажу батареи могут иметь много различных отклонений от этой основной схемы, включая использование цинковых сэндвичей между остальными слоями, а также наличие небольшого числа других химических соединений в электролите для управления химическими реакциями.

Можно встретить и батареи несколько других типов. «Щелочная батарея», в принципе, является элементом Лекланше, но с высокой концентрацией гидроокиси натрия в электролите. Она может переносить временное потребление большего тока, чем обычный сухой элемент. У ртутной батареи электроды сделаны из цинка и окиси ртути и используется щелочной электролит. При такой комбинации э. д. с. составляет 1,34 В и имеется преимущество в том, что внутреннее сопротивление при старении батареи меняется незначительно. «Никель – кадмиевый» элемент можно перезаряжать, что означает, что при приложении внешнего напряжения противоположной полярности химические реакции идут в обратном направлении, запасая энергию для использования в будущем. Никель-кадмиевый элемент известен уже много лет, но стал доступным для практического использования лишь недавно, когда был создан практически герметичный контейнер. Проблема, которую предстояло решить, заключалась в том, как удержать газы, выделяющиеся в процессе зарядки.

«Рабочей лошадкой» среди батарей является свинцовый аккумулятор, используемый во всех автомашинах. Один электрод сделан из свинца, другой – из двуокиси свинца, а в качестве электролита используется



серная кислота. Свинец стремится перейти в раствор в виде двукратнозаряженного иона, оставляя на электроде два электрона. Однако положительный ион свинца немедленно соединяется с отрицательным сульфатным ионом серной кислоты, образуя отложение сульфата свинца на пластине. Когда внешняя цепь замкнута и электроны приходят на пластину из окиси свинца, то окись свинца восстанавливается. Кислород сдирается с пластины и соединяется с водо-

родными ионами из кислоты, образуя воду, а на пластине остаются двукратнозаряженные положительные ионы свинца. Они немедленно соединяются с отрицательными сульфатными ионами и образуют отложение сульфата свинца. Таким образом, оба электрода покрываются сульфатом свинца, а серная кислота медленно превращается в воду. Во время процесса зарядки химические реакции идут вспять, снова повышая концентрацию серной кислоты. Плотность серной кислоты является хорошим индикатором степени заряженности батареи. Когда батарея полностью заряжена, плотность серной кислоты равняется 1,28. При 50% заряженности батареи плотность равна 1,18, а когда батарея полностью разряжена, плотность равна 1,08. Э. д. с., создаваемая каждым элементом, составляет около 2 В. Шесть элементов соединяют последовательно с целью создать стандартную 12-вольтовую автомобильную батарею.

Заряд, запасаемый в типичном автомобильном аккумуляторе, равен 50 ампер-часам. Поскольку 1 А·с = 1 Кл, то такая батарея может поставить заряд 180 000 Кл.

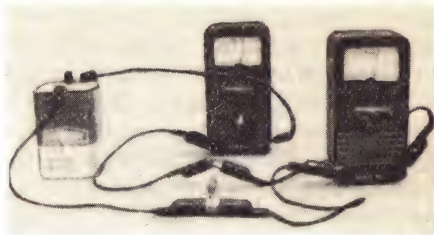
Подсчитаем, сколько электронов переносится при полной разрядке батареи и массу химических соединений, претерпевающих превращения. Заряд одного моля электронов называется постоянной Фарадея F:

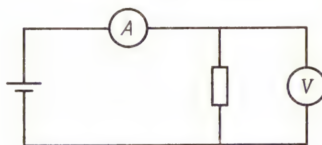
$$F = 6 \cdot 10^{23}\ \text{моль}^{-1} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл} = 96\,500\ \text{Кл/моль}.$$

Как легко видеть, батарея на 50 А·ч может обеспечивать заряд, равный $2F$. Однако в процессе не участвуют два моля свинца, поскольку каждый атом свинца, превращаясь в двукратнозаряженный положительный ион, поставляет два электрона. В соответствии с этим на отрицательном электроде превращается в сульфат свинца 1 моль (или 207 г) атомов свинца. В этом процессе участвуют два моля серной кислоты, один около положительной пластины, а другой — около отрицательной. Поэтому при разрядке в превращении участвуют 196 г серной кислоты. ■

ИЗМЕРЕНИЕ ТОКА И НАПРЯЖЕНИЯ

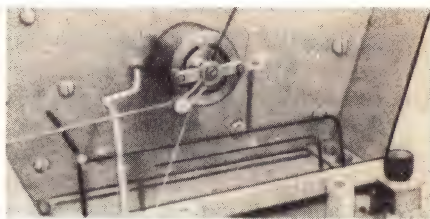
Прибор для измерения электрического тока называется *амперметром*, а для измерения разности потенциалов — *вольтметром*. Амперметр должен всегда включаться последовательно, поскольку он измеряет ток *в цепи*. С другой стороны, вольтметр включается параллельно участку цепи, поскольку он

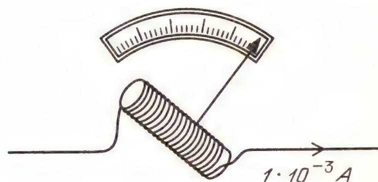




измеряет разность потенциалов *на концах* этого участка.

Амперметры и вольтметры обычного типа (в противоположность электронным приборам) имеют одинаковое основное измерительное устройство, называемое гальванометром. Оно состоит из проволочной катушки, которая может поворачиваться между полюсами постоянного магнита. Когда по катушке идет ток, она превращается в магнит, сила которого пропорциональна току. Угловой поворот катушки, которому противодействует пружина, определяет

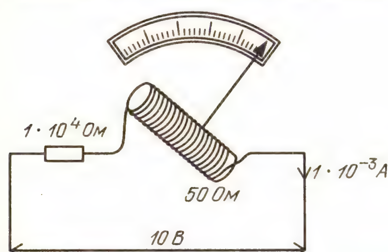




Катушка гальванометра, к которой прикреплена длинная стрелка, помещается в поле постоянного магнита

ток. Чувствительность гальванометра зависит от его конструкции. Типичная подвижная часть гальванометра имеет катушку, которая совершает поворот, соответствующий полной шкале, при токе в 1 мА. Сопротивление обмотки такой катушки может равняться 50 Ом.

Гальванометр – это основа устройства для измерения *тока.* Как можно превратить его в *вольтметр*? Предположим, что мы хотим сделать прибор, вся шкала которого соответствовала бы разности потенциалов в 10 В. Последовательно с катушкой гальванометра можно включить такое сопротивление, чтобы сила тока в цепи была всего 1 мА при разности потенциалов на ее концах



Использование гальванометра в качестве вольтметра

10 В. Полное сопротивление последовательно соединенных резистора и катушки гальванометра должно равняться

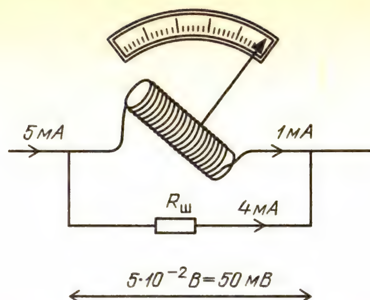
$$R = U/I = 10\ \text{В}/(1 \cdot 10^{-3}\ \text{А}) = 1 \cdot 10^{4}\ \text{Ом}.$$

Собственные 50 Ом катушки гальванометра составляют только 0,5% от полного необходимого сопротивления. Точность показаний такого прибора не может быть выше 2%, и такой прибор редко калибруется точнее 5%, следовательно, сопротивлением обмотки катушки в 50 Ом можно пренебречь. При подключении последовательно с этим гальванометром резистора с сопротивлением 10 000 Ом гальванометр даст отброс на полную шкалу, если к этому устройству подвести разность потенциалов в 10 В.

Теперь изготовим из этого гальванометра *амперметр.* Сам по себе гальванометр *уже является* амперметром, вся шкала которого рассчитана на силу тока 1 мА. На рисунке показано, как превратить его в амперметр, полная шкала которого соответствовала бы силе тока 5 мА. «Шунт» с сопротивлением $R_ш$ включается параллельно с подвижной катушкой. Если в неразветвленной части цепи сила тока равна 5 мА, то 1 мА идет через катушку, а 4 мА – через шунт. Падение напряжения на катушке и на шунте должно быть одинаковым, поскольку они соединены между собой параллельно:

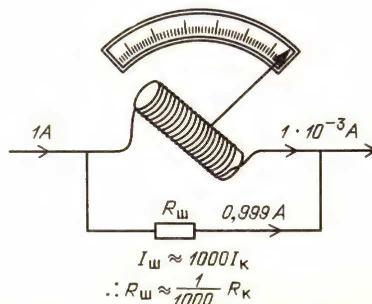
$$I_г R_г = I_ш R_ш,$$

$$R_ш = 1 \cdot 10^{-3}\ \text{А} \cdot 50\ \text{Ом}/(4 \cdot 10^{-3}\ \text{А}) = 12{,}5\ \text{Ом}.$$



Использование гальванометра в качестве амперметра

С помощью такой же процедуры можно найти необходимое сопротивление шунта при любом масштабе шкалы амперметра. При больших токах сопротивлением катушки можно пренебречь по сравнению с очень маленьким сопротивлением, необходимым для шунта. Предположим, например, что мы хотим использовать этот гальванометр в амперметре, полная шкала которого соответствует 1 А. Через катушку должна идти 0,001 полного тока, а 0,999 пойдет через шунт. Поскольку ток через шунт



примерно в 1000 раз больше тока через катушку, то его сопротивление должно быть в 1000 раз меньше. Поэтому

$$R_ш = 50 \text{ Ом} \cdot 10^{-3} = 0{,}05 \text{ Ом}.$$

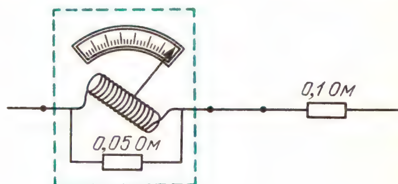
При проведении измерений с амперметрами и вольтметрами такого типа необходимо знать две характеристики. Во-первых, при использовании прибора всегда существует падение напряжения на катушке. При отбросе на всю шкалу это падение напряжения равно $IR = 1 \cdot 10^{-3}$ А $\cdot$ 50 Ом = 50 мВ. Во-вторых, при использовании прибора в качестве вольтметра необходимо знать сопротивление последовательно включенного резистора. Его значение обычно приводится мелким шрифтом на лицевой стороне прибора. Типичная надпись такова: 10 000 Ом/В. Если у вольтметра несколько диапазонов шкалы, то для каждой из них существует свой последовательно включаемый резистор. Если один диапазон таков, что вся шкала соответствует 1,5 В, то значение последовательно включаемого резистора составляет 15 000 Ом. Переключая прибор на диапазон, соответствующий 10 В, вы включаете последовательно резистор в 100 000 Ом.

Вопрос 19-16

Предположим, что вольтметр включен на 10-вольтовый диапазон, а измеряется напряжение в 5 В. Каково сопротивление последовательно включенного резистора?

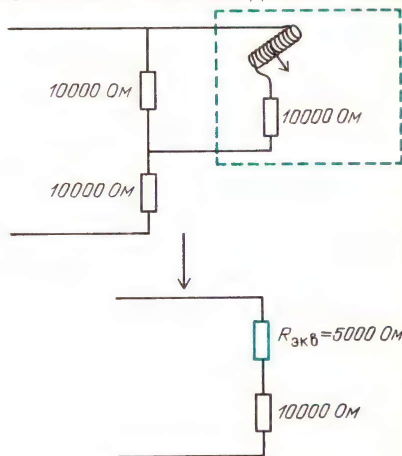
Трудно провести измерение без того, чтобы каким-либо образом не повлиять на то, что измеряешь. (Возможно, что вам довелось познакомиться с этим явлением, когда вы отвечали преподавателю на экзамене по физике.) При включении вольтметров и амперметров можно существенно исказить цепь. Поскольку внутренний гальванометр такого измерительного прибора обладает сопротивлением и потребляет ток, то он, несомненно, поглощает энергию, которая должна поставляться цепью.

Предположим, что вы хотите измерить ток в 0,1-омном резисторе. Воспользуемся амперметром, характеристики которого мы уже рассчитали. В 1-амперном диапазоне внутреннее сопротивление амперметра составляет 0,05 Ом. Включая амперметр в цепь, вы соединяете сопротивление 0,05 Ом последовательно с сопротивлением 0,1 Ом, т. е. полное сопротивление составляет 0,15 Ом. Амперметр правильно покажет ток в этой цепи, однако теперь



амперметр сам является важной составной частью цепи, ибо обеспечивает $\frac{1}{3}$ ее полного сопротивления.

Предположим, что два 10 000-омных резистора соединены последовательно и вы хотите измерить напряжение на одном из них. Если ожидаемое значение



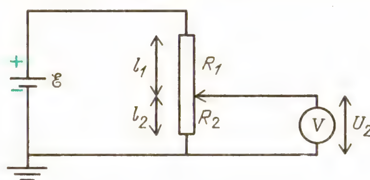
немного меньше 1 В и используется вольтметр, характеристики которого мы рассчитали, то внутреннее сопротивление самого вольтметра будет всего 10 000 Ом. Когда вы включите этот прибор параллельно участку цепи сопротивлением в 10 000 Ом, то уменьшите эффективное сопротивление этого участка до 5000 Ом. Вольтметр покажет правильное значение падения напряжения именно в этой цепи, но сама цепь будет совершенно отличной от той, которая имеется в отсутствие вольтметра.

Следует придерживаться правила, что при использовании для контроля цепи измерительных приборов, которые затем удаляются из нее, их внутреннее сопротивление не должно приводить более чем к 10% изменениям в цепи. Для амперметра это означает, что его внутреннее сопротивление должно составлять меньше 10% сопротивления цепи, в которую он включается последовательно. В случае вольтметра его внутреннее сопротивление должно быть по крайней мере в 10 раз больше сопротивления участка цепи, параллельно которому он подсоединяется.

Внутреннее сопротивление элемента, приготовленного из лимона в «Знакомстве с явлениями», может составлять от 1000 до 10 000 Ом в зависимости от того, насколько далеко друг от друга расположены монета и гвоздь. Э. д. с. медно-цинковой пары равна приблизительно 1 В. Если вы пытались измерить эту величину с помощью вольтметра сопротивлением всего 1000 Ом/В, то вы могли зафиксировать очень маленькое внешнее напряжение. Для того чтобы измерить напряжение на лимонном элементе, следует воспользоваться вольтметром с внутренним сопротивлением по крайней мере в 10 000 Ом/В. Во многих электронных схемах, особенно когда вместо транзисторов используются радиолампы, пороговые значения напряжения, которые можно зафиксировать, часто существуют на резисторах сопротивлением 1 мегаом (1 МОм = 10^6 Ом) или даже больше. Если для измерения таких напряжений воспользоваться вольтметром с катушечным гальванометром, то это приведет к полному искажению цепи и показания прибора будут бессмысленными. Для таких измерений должны использоваться ламповые вольтметры. Они обычно содержат встроенное сопротивление в 10 мегаом или выше.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЦЕПИ

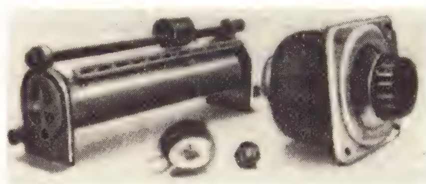
Делитель напряжения. Часто бывает необходимо или удобно получить непрерывно меняющиеся значения разности потенциалов. Включая элементы последовательно, можно получить только кратные значения – 1,5 В, 3 В, 4,5 В и т. д. Изображенная на рисунке цепь представляет собой делитель напряжения с непрерывным изменением. Его выход можно было использовать при



измерениях $I(U)$ для компонентов цепи, как описано на с. 189. Сила тока цепи равна

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R_1 + R_2}.$$

Подвергающееся делению сопротивление $R_1 + R_2$ обычно представляет собой длинную катушку с дополнительным скользящим контактом. Такое устройство называется *реостатом*. Некоторые из них показаны на рисунке. Напряже-



ние между скользящим контактом и одним из выходов реостата равно

$$U_2 = IR_2 = \frac{\mathscr{E}}{R_1 + R_2} R_2 = \mathscr{E} \frac{l_2}{l_1 + l_2}.$$

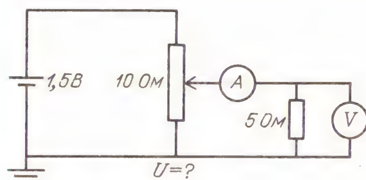
В схеме цепи использовано стандартное обозначение для «земли» или точки нулевого потенциала. В большинстве цепей выбор этой точки совершенно произволен. Цепь с делителем напряжения будет так же хорошо работать, если в качестве точки с нулевым потенциалом взять положительный полюс батареи. Однако обычно за точку с нулевым потенциалом выбирается отрицательный полюс батареи, в результате чего все остальные потенциалы в цепи оказываются положительными.

Когда соединяются вместе различные цепи, то обычно важно бывает убедиться в том, что соединения с зем-

лей совместимы друг с другом. В частности, если в цепях используются измерительные приборы, питаемые переменным током, такие как электронные осциллографы или ламповые вольтметры, то места соединений с землей могут быть уже предусмотрены конструкцией прибора. Корпус обычно заземляется через подземные водопроводные трубы с помощью нулевого провода силовой сети трехфазного переменного тока. Собирая сложную схему, нужно сначала объединить между собой все точки соединения с землей. Никогда не следует также соединять выходную клемму с источником питания до тех пор, пока не проверены все остальные соединения в цепи.

Вопрос 19-17

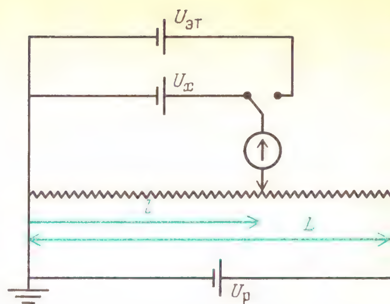
Изображенная на рисунке цепь представляет собой делитель напряжения, который можно использовать для построения зависимости $I(U)$ для 5-омного резистора. Как видно из рисунка, скользящий контакт



реостата находится в центральном положении, так что $l_1/(l_1 + l_2) = 1/2$. Каково напряжение на 5-омном резисторе?

Потенциометр. В точных приборах часто используется принцип компенсации. Примером такого прибора являются химические весы. Тело, массу которого нужно определить, уравновешивается известным стандартным телом, причем равенство их масс устанавливается по нулевому отклонению весов.

Цепь, в которой принцип компенсации используется для измерения напряжения, показана на рисунке. Такое устройство называется потенциометром. В своей основе оно представляет собой делитель напряжения, в котором напряжение между одним из концов и скользящим контактом сравнивается с напря-



жением на неизвестном источнике. Гальванометр, с помощью которого устанавливается равенство этих напряжений, может быть очень чувствительным, потому что при приблизительном равенстве напряжений ток через него очень мал. Нулевое значение силы тока обычно можно измерить с гораздо большей точностью, чем его отличное от нуля значение.

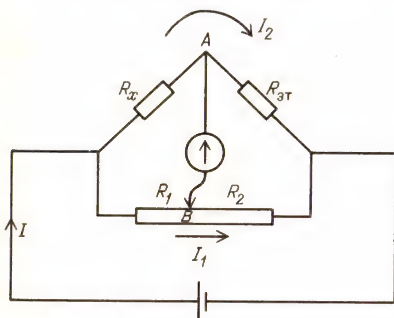
В простой цепи, показанной на рисунке, неизвестное напряжение равно

$$U_x = \frac{l}{L} U_р.$$

Лабораторные потенциометры устроены значительно более сложно, чем разобранная простая модель. Например, в хорошем приборе гальванометр снабжается несколькими шунтами, для того чтобы защитить его и сделать менее чувствительным до тех пор, пока приближенно не будет найдена область нулевой точки. В рассмотренной простой цепи неизвестное напряжение U_x сравнивается с рабочим напряжением $U_р$. В реальных приборах в качестве эталона используется другой элемент. Как показано на рисунке, эталонный элемент может быть включен вместо неизвестного напряжения. В предварительной процедуре он используется для калибровки $U_р$, которое затем используется в реальном измерении. При таком способе эталонному элементу не приходится создавать ток. Эталонный элемент, напряжение которого может быть известно с погрешностью до 10^{-5}, сохраняет свое номинальное напряжение только в том случае, когда он не создает тока.

Вопрос 19-18
Точность потенциометра зависит от точности и надежности калибровки эталонного элемента. Какое еще важное требование предъявляется к этому прибору?

Мост Уитстона. Существует много «мостовых» схем, используемых в электрических приборах. Они работают по принципу компенсации и сравнивают неизвестные величины с известными частями стандартных значений. Одна из простейших подобных схем была изобретена Шарлем Уитстоном более века тому назад. Она показана на рисунке. Условие компенсации достигается, когда ток через гальванометр отсутствует. Поскольку для измерения очень



Мост Уитстона

маленького тока можно использовать очень чувствительный гальванометр, то условие компенсации может быть установлено очень точно. В отсутствие тока через гальванометр цепь состоит просто из двух параллельных ветвей. Создаваемый батареей ток делится на верхний ток I_2 и нижний ток I_1. Напряжение на неизвестном резисторе R_x должно быть таким же, как и напряжение на R_1; аналогично напряжение на эталонном резисторе $R_{эт}$ должно быть таким же, как и напряжение на R_2.

Вопрос 19-19
Почему это так?

Приравняем эти напряжения и поделим полученные уравнения почленно:

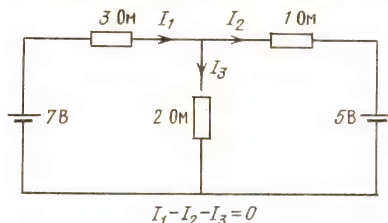
$$\frac{I_1R_1}{I_1R_2} = \frac{I_2R_x}{I_2R_{эт}}, \quad R_x = \frac{R_1}{R_2} R_{эт}.$$

Заметьте, что значение неизвестного сопротивления зависит от точности, с которой известно эталонное сопротивление $R_{эт}$, и от однородности струны реохорда или реостата, с помощью которого определяется отношение R_1/R_2. Напряжение, создаваемое батареей, и характеристики гальванометра не фигурируют в уравнении. Однако эти характеристики влияют на точность, с которой определяется условие компенсации.

Дополнительный материал

Правила Кирхгофа для расчета цепей.

Не всегда можно упростить цепь и свести ее расчет к сложению эквивалентных последовательно и параллельно соединенных сопротивлений. На рисунке приведен простой пример такого случая. Все цепи, включая данную, можно рассчитать, по крайней мере

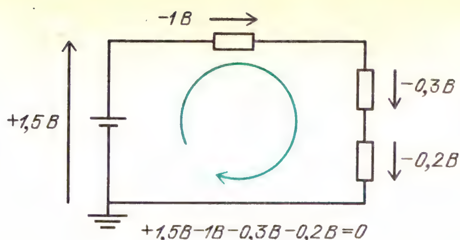


Эту цепь нельзя рассчитать, используя правила сложения последовательно и параллельно соединенных эквивалентных сопротивлений

в принципе, используя два правила, которые носят имя Густава Кирхгофа.

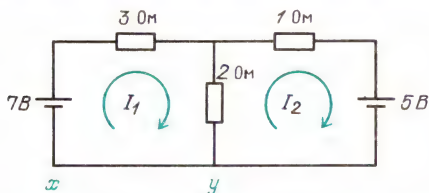
Первое из них заключается в том, что в любой точке ветвления цепи подходящий к ней ток должен равняться уходящему от нее. Требование носит общий характер, но, применяя его, следует быть аккуратным при выборе направлений токов. В примере, показанном на рисунке, ток, подходящий к точке ветвления, обозначен через I_1, а уходящие токи – через I_2 и I_3. Правило Кирхгофа требует, чтобы $I_1 - I_2 - I_3 = 0$. Алгебраические знаки перед токами определяются тем фактом, что I_1 подходит к точке ветвления, а I_2 и I_3 уходят от нее.

Второе правило Кирхгофа заключается в том, что при обходе вдоль любого замкнутого контура в цепи сумма увеличений и уменьшений напряжения должна равняться нулю. Снова это требование носит общий характер. Если бы можно было обойти



вдоль замкнутого контура и окончить свой путь при более высоком потенциале, то можно было бы получить энергию из ничего (вот был бы подарок судьбы!). Электростатический потенциал, как и гравитационный, является сохраняющейся величиной. В главе 21 мы познакомимся с явлением, где заряженная частица приобретает энергию, двигаясь по замкнутому контуру. Но в этом случае что-то другое поставляет энергию.

Применим эти два закона к простой цепи, приведенной на с. 210 и снова повторяемой здесь. Обратите внимание на то, что токи обозначены двумя различными способами. На первом рисунке введены три неизвестные



Сравните эту цепь с такой же на с. 210

величины: I_1, I_2 и I_3. Для нахождения трех неизвестных необходимы три уравнения. Одно уравнение дается первым правилом Кирхгофа: $I_1 - I_2 - I_3 = 0$. Остальные два уравнения можно получить, записывая увеличение и уменьшение напряжения в двух различных контурах. Можно упростить арифметические действия, используя обозначения, приведенные на втором рисунке. В этом случае имеются только два неизвестных тока: I_1 и I_2, следовательно, необходимы только два уравнения.

Вопрос 19-20

Но при таких обозначениях получается, что через 2-омный резистор идут два тока. Как такое может быть?

Теперь применим второе правило Кирхгофа к двум контурам, показанным на рисунке. При обходе левого контура от точки, обозначенной буквой x, напряжение сначала возрастает благодаря батарее на 7 В. Затем оно понижается на величину, определяемую IR, из-за того, что ток I_1 идет через 3-омный резистор. Эту разность потенциалов следует записать как $-3I_1$. Поскольку дальше наш путь пролегает вниз через 2-омный резистор, то имеется падение напряжения благодаря току I_1, равное $-2I_1$. Однако на этом пути мы встречаем противоположно направленный ток I_2, который также идет через 2-омный резистор. Благодаря этому току напряжение повышается на величину, равную $+2I_2$. Окончательное уравнение для левого контура имеет вид

$$+7 - 5I_1 + 2I_2 = 0.$$

Каждый член в этом уравнении характеризует какое-нибудь напряжение.

При обходе правого контура используются такие же соображения. Начиная от точки, обозначенной буквой y, проходим через 2-омный резистор. Поскольку мы движемся в том же направлении, что и ток I_2, то происходит падение напряжения, равное $-2I_2$. Так как навстречу нам идет ток I_1, то имеется повышение напряжения, равное $+2I_1$. Имеется понижение напряжения при прохождении 1-омного резистора, равное $-I_2$. При прохождении 5-вольтовой батареи от положительного полюса к отрицательному происходит падение напряжения на -5 В. Полное уравнение для правого контура выглядит так:

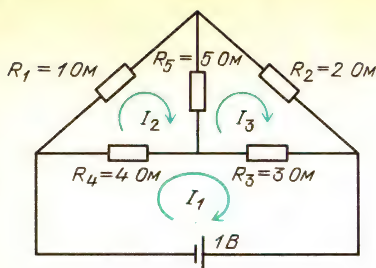
$$-5 + 2I_1 - 3I_2 = 0$$

Имеем два независимых уравнения, из которых можно определить два неизвестных тока. Умножая первое уравнение на 2, второе уравнение на 5 и складывая почленно получающиеся выражения, исключаем I_1. Решения имеют вид $I_2 = -1$ А и $I_1 = +1$ А.

Вопрос 19-21

Что-нибудь неверно? Что означает отрицательность I_2? Чему равен ток через 2-омный резистор в этом случае?

Цепь с мостом Уитстона удалось так просто рассчитать благодаря тому, что при уравновешивании моста ток в центральной его ветви отсутствовал. На следующем рисунке показана цепь с такой же конфигурацией, однако теперь по центральной ветви идет ток. Как можно убедиться, эту цепь невозможно преобразовать в совокупность по-



$$-7I_1 + 4I_2 + 3I_3 = +1,$$
$$+4I_1 - 10I_2 + 5I_3 = 0,$$
$$+3I_1 + 5I_2 - 10I_3 = 0,$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -10 & 5 \\ 0 & 5 & -10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -7 & 4 & 3 \\ 4 & -10 & 5 \\ 3 & 5 & -10 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{100 - 25}{-7(75) - 4(-55) + 3(50)} = -\frac{75}{155} \approx -0{,}5 \text{ A}$$

следовательно и параллельно соединенных эквивалентных сопротивлений. На рисунке показаны три возможных контура, к которым можно применить второе правило Кирхгофа. Каждый контур характеризуется своим током. В этом случае имеется только три неизвестных величины, но суммарный ток в трех резисторах равен разности двух контурных токов. Под рисунком приведены три уравнения, образующие систему, которая решается с помощью метода определителей.

Составьте самостоятельно уравнения с помощью правила Кирхгофа с целью проверить свое понимание выбора знаков перед напряжениями.

Вопрос 19-22

В двух примерах, в которых иллюстрировалось применение правил Кирхгофа, были получены уравнения для такого числа контуров, которое достаточно для определения неизвестных. В первом случае имелись два неизвестных тока и требовались два уравнения, поэтому мы выбрали два контура. Во втором случае было три неизвестных и поэтому мы написали уравнения для трех контуров. В каждом случае можно выбрать другие замкнутые контуры для обхода цепи и получить таким образом больше уравнений. Например, в первом случае, можно было бы обойти всю цепь снаружи. Даст ли эта процедура новые независимые уравнения? Проделайте выкладки сами и сформулируйте ответ.

РЕЗЮМЕ

Некоторые из имен и утверждений, о которых идет речь в главе «Электрический ток», знакомы нам из повседневной жизни. Например, 60-ваттная лампочка, включенная в 120-вольтовую домашнюю сеть, потребляет ток 0,5 А.

В грубой модели движения заряда мы считали, что электроны — носители заряда кружат по металлической решетке. При наложении электрического поля электроны медленно дрейфуют в направлении, противоположном напряженности поля, сталкиваясь с ионами решетки и увеличивая температуру твердого тела. Если n — концентрация носителей заряда, каждый из которых имеет заряд e, S — площадь поперечного сечения провода, а $v_д$ — скорость дрейфа, то сила электрического тока равна $I = neSv_д$. Скорость дрейфа пропорциональна напряженности электрического поля: $v_д = \beta E$. В длинном проводнике $E = U/l$, поэтому

$$I = ne\frac{S}{l}\beta U.$$

Ток в проводе пропорционален напряжению. Обратная величина этого коэффициента пропорциональности называется сопротивлением:

$$R = \frac{1}{ne\beta}\frac{l}{S} = \rho\frac{l}{S},$$

где ρ — удельное электрическое сопротивление вещества. Закон Ома имеет вид

$$I = \frac{U}{R}.$$

Удельное сопротивление зависит от температуры, которая влияет на скорость дрейфа и в некоторых веществах, таких, как углерод, определяет концентрацию n электронов проводимости. В металлических проводниках в ограниченном интервале температуры вблизи

0 °C температурная зависимость сопротивления приблизительно линейная: $\rho = \rho_0(1 + \alpha t)$.

Работа, совершаемая при перемещении заряда в поле с разностью потенциалов U, равна

$$\Delta A = U\,\Delta q.$$

Поскольку $P = \Delta A/\Delta t$ и $\Delta q = I\,\Delta t$, то

$$P = IU = I^2R = U^2/R.$$

Единицей мощности является ватт.

В электрических цепях резисторы встречаются в последовательных и параллельных комбинациях. При последовательном соединении $R = R_1 + R_2 + \ldots$ При параллельном соединении $1/R = 1/R_1 + 1/R_2 \ldots$.

Каждый источник энергии обладает внутренним сопротивлением, которое играет существенную роль в цепи. Если э. д. с., или напряжение в отсутствие нагрузки, равно $\mathscr{E}$, а внешнее напряжение при наличии нагрузки равно U, то $I = \mathscr{E}/(r + R)$ и $U = \mathscr{E} - Ir$. Гальванические элементы создают ток благодаря процессам окисления и восстановления, при которых некоторые химические соединения переходят в более устойчивые формы.

Амперметры должны включаться последовательно с тем устройством, ток в котором они измеряют. Поэтому амперметры должны обладать небольшим внутренним сопротивлением, что обычно обеспечивается включением шунтирующих сопротивлений параллельно внутреннему гальванометру или другому чувствительному к току устройству. Вольтметры должны включаться параллельно элементу цепи, напряжение на котором они измеряют. Поэтому вольтметры должны обладать большим внутренним сопротивлением, что обычно обеспечивается включением резистора последовательно с внутренним гальванометром.

Мы описали три из самых основных устройств для измерения в цепях: делитель напряжения, потенциометр и мост Уитстона. Последние два основаны на повышенной чувствительности измерений, возможной вблизи нулевых значений тока.

Некоторые цепи нельзя рассчитать, пользуясь понятиями последовательных и параллельных элементов цепи. В таких случаях можно пользоваться законами Кирхгофа, описанными в качестве дополнительного материала: 1) ток, подходящий к точке ветвления цепи, равен току, уходящему от нее, 2) сумма изменений напряжения вдоль любого замкнутого контура в цепи равна нулю.

Ответы на вопросы

19-1. Это правда, что через лампочку для карманного фонаря каждую секунду проходит заряд, примерно равный (1/3) Кл, в то время как через 60-ваттную лампочку – только 0,5 Кл. Однако в 60-ваттной лампочке заряд 0,5 Кл проходит через разность потенциалов 120 В, теряя таким образом гораздо больше энергии, чем (1/3) Кл в лампочке для карманного фонаря, где проходимая разность потенциалов равна всего 3 В.

19-2. Прежде чем концы проволоки присоединяются к полюсам батареи, электрическое поле вокруг нее похоже на поле диполя. Конечно, проводящие части батареи вызывают искажение

обычной картины линий напряженности диполя, но в целом линии поля должны быть сконцентрированы в области вокруг батареи, начинаясь на положительном полюсе и оканчиваясь на отрицательном.

19-3. Вычислим это время: $\Delta t = 1$ м$/(7 \cdot 10^{-5}$ м/с$) = 1{,}4 \cdot 10^4$ с ≈ 4 ч. Конечно, лампочка загорается гораздо раньше. Независимо от длины проводов между батареей и лампочкой после замыкания ключа лампочка загорается практически мгновенно. (Имеется небольшое запаздывание, обусловленное тепловой инерцией нити лампочки; требуется несколько тысячных долей секунды для того, чтобы

она стала достаточно горячей и начала светиться.) Лампочке не приходится ждать, пока электроны проделают до нее свой путь от батареи. Вместо этого электроны начинают двигаться вдоль всего провода сразу после замыкания ключа. Требуется некоторое время для того, чтобы электрическое поле возникло и установилось во всей цепи, но это время обычно гораздо меньше микросекунды, как мы увидим позднее.

19-4. Мы уже сталкивались еще с одной ситуацией, когда скорость тела пропорциональна действующей на него силе. Когда большое тело падает в воздухе, сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости тела. Спустя некоторое время скорость тела достигает определенного значения и в дальнейшем уже не меняется. При этой установившейся скорости сила сопротивления равна силе тяжести тела. В таких условиях установившаяся *скорость* зависит от *силы тяжести*. Если экспериментально будет установлено, что скорость дрейфа электронов пропорциональна действующей на них силе, то придется сделать заключение, что на движение электронов влияют такие же непрерывные столкновения, которые приводят к установлению определенной скорости у падающего тела.

19-5. Область отрицательных значений тока и напряжения просто соответствует определенному направлению тока и напряжения. Нить нагревается при увеличении тока независимо от его направления.

19-6. Наклон линейной зависимости $I(U)$ равен $\Delta I/\Delta U$. Поскольку наклон постоянен и кривая проходит через начало координат, то $\Delta I/\Delta U = I/U$. Но это и есть величина, обратная сопротивлению: наклон кривой $I(U)$ равен $1/R$.

19-7. Согласно закону Ома, $I = U/R = 1{,}5\ \text{В}/(1{,}7\cdot 10^{-2}\ \text{Ом}) = 88$ А. Вот пример того, что формулы, как и используемые модели, справедливы только в *ограниченной* области. Обычная батарейка для карманного фонаря не может обеспечить ток больше 5 или 6 А. Если закон Ома выполняется, то в цепи должно быть другое сопротивление или напряжение должно резко падать. Скоро мы узнаем, что в действительности происходит.

19-8. Это верно, что заряд, идущий по второму пути, должен пройти вдвое большее расстояние, однако напряженность электрического поля в этом случае вдвое меньше. Поэтому работа, совершаемая при перемещении единичного заряда, будет такая же, как и при движении по первому пути.

19-9. Линии напряженности, входя в толстый провод, должны отойти друг от друга. Число линий в обоих проводах одинаково, но *на единицу* площади в толстом проводе их приходится вдвое меньше. Следовательно, и электрическое поле там в два раза слабее. На поверхности соединения должен появиться статический заряд, распределение которого должно быть таким, чтобы обеспечивать требуемую картину линий электрического поля.

19-10. Как мы увидим в главе 20, ток создает вокруг себя магнитное поле. Кольцо с током в этом смысле похоже на небольшой магнит в форме бруска. Непрерывное существование сверхпроводящего тока можно обнаружить по ориентирующему действию внешнего магнитного поля на кольцо с током, которое подобно магнитной стрелке компаса.

19-11. Ответ на этот вопрос зависит от того, как соединены эти два провода. Если они соединены параллельно, так что на них одинаково *напряжение*, то мощность, поглощаемая в 1-омном резисторе, будет в два раза больше, чем в 2-омном, поскольку $P = U^2/R$. Если же резисторы соединены последовательно, то одинаковым будет ток в каждом из них, и в 2-омном резисторе будет поглощаться вдвое большая мощность, чем в 1-омном: $P = I^2R$.

19-12. При заданном значении приложенного напряжения током в одной из ветвей цепи можно управлять, добавляя последовательно включенный резистор. С помощью нескольких резисторов, соединенных последовательно, можно делить подаваемую на них разность потенциалов, обеспечивая возможность иметь несколько различных напряжений между разными точками от одного и того же источника питания.

19-13. Аргументы, использованные в обоих выводах, сходны, но основные формулы для емкости и сопротивления содержат взаимно обратную зависимость от напряжения. Заметьте, что $C = q/U$, но $R = U/I$. Когда мы увели-

чиваем напряжение в цепи, состоящей из последовательно соединенных резисторов, то добавляем члены, пропорциональные R. Однако увеличивая напряжение в цепи, состоящей из последовательно соединенных конденсаторов, мы добавляем члены, пропорциональные $1/C$.

19-14. Приближенное эквивалентное сопротивление при параллельном соединении 10- и 100-омного резисторов равно 10 Ом. Точное выражение имеет вид

$$R_{\text{экв}} = R_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} =$$

$$= 10 \frac{100}{100 + 10} \text{ Ом} \approx 10 \text{ Ом}.$$

Приближенное значение завышено примерно на 10%. В действительности сопротивление составляет около 9 Ом. Номинальные значения большинства компонент цепи и точность большинства измерительных приборов не гарантируются больше чем на 5 или 10%. Обычно в бóльшей точности нет никакой нужды, поскольку многие компоненты цепи меняются со временем или с температурой, и цепи могут либо переносить такие изменения, либо регулироваться с целью их компенсации.

19-15. Если источник питания с внутренним сопротивлением в 5 Ом обеспечивает ток в (1/3) А, то падение напряжения внутри него равно (1/3) А·5 Ом = = (5/3) В. Поскольку такой элемент имеет э. д. с. всего в 1,5 В, то очевидно, что он не сможет поддерживать ток в (1/3) А, если его внутреннее сопротивление поднялось до 5 Ом. Вместо этого выходное напряжение падает до значения, определяемого формулой на с. 201. Поскольку ток через нагрузку оказывается гораздо меньше, то, следовательно, элемент «сел».

19-16. Для 10-вольтового диапазона данного определенного вольтметра сопротивление последовательно включенного резистора всегда равно 100 000 Ом независимо от того, соответствуют ли его показания полной шкале прибора или какой-нибудь его части.

19-17. Поскольку скользящий контакт находится посередине реостата, то можно было бы ожидать, что потенциал в этой точке равен 0,75 В — как раз половине приложенного напряжения. Однако нагрузочное сопротивление 5 Ом включено параллельно нижней половине реостата, сопротивление которой также равно 5 Ом. Их общее сопротивление составляет 2,5 Ом. Следовательно, цепь состоит из 5-омной верхней части реостата, последовательно соединенной с 2,5 Ом. Напряжение на нижней параллельной комбинации сопротивлений составляет 1/3 от приложенного напряжения, или 0,5 В.

19-18. Реохорд, который образует реостат, должен быть очень длинным и однородным. В действительности измерение заключается в нахождении отношения длин вдоль реохорда. Предполагается, что отношение длин равно отношению сопротивлений соответствующих частей провода.

19-19. При выполнении условия компенсации ток в гальванометре отсутствует и, следовательно, разность потенциалов между точками A и B равна нулю. Потенциал в точке A может равняться потенциалу в точке B, только если $I_1 R_1 = I_2 R_x$.

19-20. В действительности ток в 2-омном резисторе равен просто алгебраической сумме I_1 и I_2.

19-21. Отрицательность просто означает, что этот ток в действительности идет в противоположную сторону по сравнению с выбранным нами направлением. Поскольку ток в 2-омном резисторе равен $I_1 - I_2$, то его значение суть $+1-(-1) = 2$ А.

19-22. Лишние уравнения не являются независимыми, в чем вам следует убедиться самостоятельно.

Задачи

1. Какой силы ток потребляет домашний телевизор мощностью в 300 Вт?

2. Объясните своими словами и с помощью рисунка, каким образом в длинном проводе постоянного поперечного сечения может быть одинаковой по всей длине напряженность электрического поля, даже если этот провод сгибается и закручивается.

3. Какова скорость дрейфа электронов в медном проводе диаметром 4 мм, по которому к стартеру грузовика подводится ток в 100 А?

4. Запишите и объясните (или докажите) соотношения, существующие между I, v, E и U в проводе.

5. Объясните, что происходит и почему с n и β в угольной нити накаливания с увеличением температуры.

6. Каково сопротивление 30-метрового удлинительного шнура, сделанного из мед-

ного провода диаметром в 1,3 мм? (Не забывайте, что в удлинительном шнуре имеется два провода: ток должен проделать путь туда и обратно.) Каково падение напряжения на шнуре, если потребляемая сила тока равна 10 А?

7. Каково сопротивление вольфрамовой нити накаливания работающей 60-ваттной лампы? Каково сопротивление этой нити при комнатной температуре, если в первом приближении принять, что температурная зависимость сопротивления вольфрама линейная вплоть до 2000 °С? Какой ток она потребляет сразу после включения лампы? (Недорогие омметры обычно содержат 1,5-вольтовую контрольную батарею. Если у вас есть возможность, проверьте свои предположения и вычисления, измеряя низковольтовое сопротивление нити накаливания 60-ваттной лампы.)

8. Имеется три одинаковых резистора, каждый длиной в 2 см. Соедините два из них параллельно между собой и подсоедините последовательно к третьему резистору. Подайте на всю комбинацию электрическое напряжение 3 В. Каково напряжение на каждом резисторе и какова напряженность поля в каждом из них? Почему ответ не зависит от значения сопротивления?

9. Сопротивление длинного медного провода при 20 °С равно 0,005 Ом. Каково его сопротивление при 80 °С?

10. Сколько энергии запасено в 12-вольтовой батарее на 50 А·ч? Какая мощность развивается при силе тока 50 А?

11. Предположим, что вы забыли выключить 60-ваттную лампу под потолком и она горит целый месяц. Сколько стоит израсходованная ею электроэнергия по цене 8 центов за 1 кВт·ч?

12. Какое максимальное напряжение можно приложить к полуваттному 22-омному резистору при соблюдении правил техники безопасности? К 100-ваттному 22-омному резистору?

13. Каково эквивалентное сопротивление соединенных последовательно резисторов в 1, 2 и 10 Ом? Соединенных параллельно?

14. Цепь состоит из 2-омного резистора, последовательно соединенного с параллельно соединенными между собой резисторами в 12 и 6 Ом. Какова сила тока в 6-омном резисторе, если на всю цепь подано напряжение 4 В?

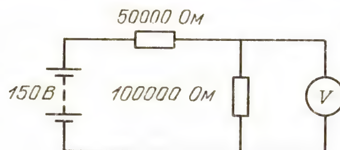
15. Стандартные резисторы рассчитаны на 0,5, 1 и 2 Вт. Какое минимальное значение может иметь каждый из резисторов в цепи, описанной в задаче 14?

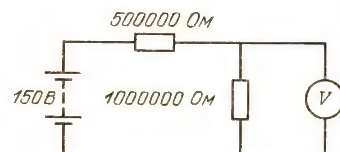
16. Имеются *три* элемента по 1,5 В каждый, *три* 1-омных резистора, амперметр и вольтметр. Введите для каждого из них подходящее обозначение и нарисуйте схему цепи, содержащей *все* эти элементы (8 компонентов), включенные таким образом, что амперметр показывает силу тока 1 А, а вольтметр – напряжение 0,5 В. (Предположите, что сопротивление амперметра намного меньше 1 Ом, а сопротивление вольтметра намного больше 1 Ом.)

17. Напряжение на концах разомкнутой батареи (э. д. с.) равно 1,55 В. При замыкании ее на нагрузку сопротивлением 3,0 Ом внешнее напряжение равно 0,95 В. Каково внутреннее сопротивление батареи?

18. Аккумулятору приходится обеспечивать силу тока 50 А при напряжении 12 В в течение 10 с для того, чтобы завести мотор автомашины. Сколько граммов серной кислоты превращается при этом в воду?

19. Вольтметр с встроенным сопротивлением 20000 Ом/В установлен на 100-вольтовый диапазон. На сколько процентов изменит вольтметр рассчитанные значения напряжений при включении его в две приведенные здесь схемы цепи?



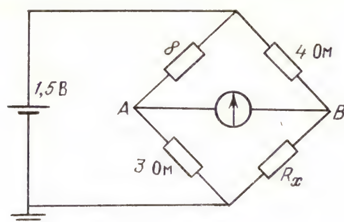


20. В потенциометре с 100-сантиметровым реохордом гальванометр показывает отсутствие тока, когда скользящий контакт удален на 40 см. Рабочее напряжение равно 6,0 В. Каково неизвестное напряжение?

21. Вольтметр, внутреннее сопротивление которого обозначено как 20000 Ом/В, показывает на лимонном элементе напряжение 1,0 В. Вольтметр установлен на диапазон 1,5 В. Более дешевый вольтметр с 1000 Ом/В, также установленный на диапазон 1,5 В, показывает только 0,40 В. Каково внутреннее сопротивление лимона?

22. Внутреннее сопротивление старой батареи от карманного фонаря равно 0,50 Ом. Хороший вольтметр в отсутствие нагрузки показывает на ней напряжение 1,5 В. Каково внешнее напряжение на батарее, если замкнуть ее на нагрузку сопротивлением 1 Ом?

23. Определите неизвестное сопротивление R_x в уравновешенной мостовой схеме, показанной на рисунке. Напряжение на батарее равно 1,5 В. Каков потенциал в точке A? Каков потенциал в точке B?



24. Сопротивление катушки гальванометра равно 200 Ом, а его шкала рассчитана на максимальную силу тока 0,1 мА. С каким сопротивлением следует взять шунт, чтобы изготовить миллиамперметр со шкалой, рассчитанной на силу тока в 1, 10 и 100 мА? Нарисуйте схему цепи.

25. Гальванометр из задачи 24 можно использовать для изготовления вольтметра. Какое сопротивление следует взять, чтобы шкала прибора оказалась рассчитанной на 0,1, 1,0 и 10 В? Нарисуйте схему цепи.

26. Определите силу тока в цепи с мостом Уитстона, изображенной на рисунке на с. 212, если $R_1 = 2$ Ом, $R_2 = 1$ Ом, $R_3 = 2$ Ом, $R_4 = 1$ Ом и $R_5 = 1$ Ом.

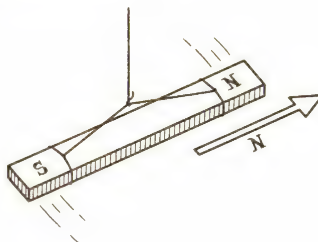
ГЛАВА 20. МАГНЕТИЗМ

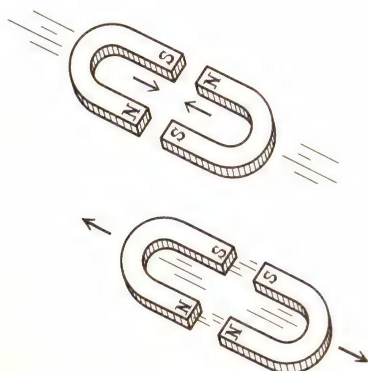
До сих пор при изучении электромагнитных явлений нам все удавалось объяснить действием *электростатических* сил. Постоянное электрическое поле, приводящее в движение заряды в проводнике, создается распределением статических зарядов вдоль проводника. Даже в химических источниках тока в основе взаимодействий, заставляющих электроны двигаться в направлении областей, уже заряженных отрицательно, лежат силы молекулярных связей, имеющие в основном электростатическое происхождение.

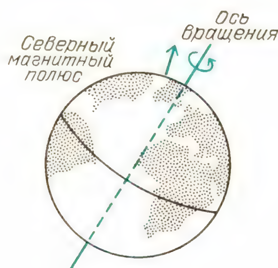
Однако хорошо известно, что существуют постоянные магниты, которые действуют друг на друга с силами без помощи неподвижных электрических зарядов.

Изучение магнитных явлений развивалось совершенно отдельно от исследований электричества, потому что эти области казались совсем не связанными друг с другом. Казалось, что магнитные явления свойственны в первую очередь железу и каким-то таинственным образом самой Земле.

Подобно электрическим зарядам, магниты могут как притягивать, так и отталкивать друг друга. Поэтому должны существовать два рода «магнитных зарядов». Их называют *полюсами*; один из них северный, другой – южный. Если стержневой магнит свободно подвесить, он будет поворачиваться до тех пор, пока не установится своей осью по направлению север – юг. Северным полюсом магнита по определению называется полюс, обращенный к северу; таким образом, северный магнитный полюс Земли представляет собой южный полюс земного магнита.







Ось, проходящая через магнитные полюсы Земли, наклонена на угол приблизительно 11,5 по отношению к оси вращения Земли. Северный магнитный полюс в настоящее время находится на острове Принца Уэльского и, по-видимому, дрейфует к северо-западу

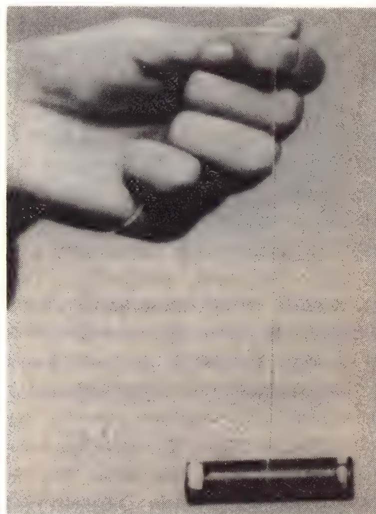
В 1819 году Ханс Кристиан Эрстед (1777 – 1851) сделал открытие (во время занятий со студентами), что электрический ток влияет на магнитный компас. Вскоре после этого Ампер обнаружил наличие силы между двумя проводами с током, действовавшей даже тогда, когда провода были электростатически нейтральны. Стало очевидно, что электрические токи могут производить магнитные эффекты, и в свою очередь магниты могут вызывать силы, действующие на токи. В течение последовавшего за этими открытиями десятилетия Фарадей и Генри научились изготавливать мощные электромагниты, электромагнитные двигатели и генераторы.

В этой главе дадим определение магнитным полям и изучим способы их описания. Мы используем представление о магнитных полях для описания процесса, в котором два электрических заряда действуют друг на друга, когда они движутся по отношению к нам, наблюдателям. *Эти взаимодействия зависят от скорости.* После описания некоторых практических приложений этих принципов мы сможем объяснить, по крайней мере качественно, каким образом возникает магнетизм в твердых телах. И наконец, мы внимательно рассмотрим значение теории, которая описывает силы как функции скорости. Но чьей скорости? Разве может физическая сила, действующая между двумя телами, зависеть от скорости наблюдателя?

ЗНАКОМСТВО С ЯВЛЕНИЯМИ

Многие из изучаемых в физике явлений можно наблюдать в повседневной жизни. Большинство материалов, нужных нам для «Знакомства с явлениями», – это обычные бытовые предметы. Найдутся ли у вас предметы, нужные для *данной* главы, зависит от уклада вашего домашнего хозяйства. Даже если у вас их нет, предметы эти дешевы, их легко достать в магазинах металлоизделий или игрушек и полезно иметь дома. Вам понадобится небольшой туристский компас, какой-нибудь магнит, несколько проводов (желательно с зажимами-крокодильчиками) и исправный сухой элемент на напряжение 1,5 В. В качестве магнита можно использовать игрушечный подковообразный или стержневой, или магнит, которым пользуются для прикрепления бумаг к стальной доске объявлений. Можно взять обычную батарейку, хотя большая была бы лучше.

1. Стрелка компаса представляет собой просто крошечный полосовой магнит, укрепленный так, чтобы он мог поворачиваться в горизонтальной плоскости. Исследуйте с помощью компаса

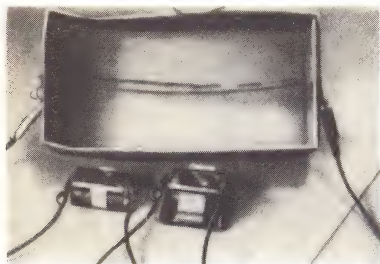


ближайшие окрестности и убедитесь в том, что он указывает направление приблизительно на Север. Затем поднесите к компасу магнит и наблюдайте, какое действие на компас оказывает каждый из двух различных полюсов магнита.

2. Если вам удастся заполучить два одинаковых стержневых магнита, выясните, как их нужно ориентировать, чтобы получить притяжение либо отталкивание. Воспользуйтесь стрелкой компаса, чтобы определить, где у вашего магнита находятся северный и южный полюсы. Как сила взаимодействия двух магнитов зависит от расстояния между полюсами? Легко определить различие между силой, изменяющейся обратно пропорционально первой степени расстояния, и силой, изменяющейся обратно пропорционально квадрату расстояния. Сравните силу взаимодействия полюсов, удаленных друг от

друга на расстояние 2 см, с силой взаимодействия полюсов, удаленных на расстояние 1 см. В два или в четыре раза изменится при этом сила?

3. Для следующей демонстрации вам потребуется два очень тонких провода и две тонкие полоски алюминиевой фольги длиной около 30 см. Укрепите полоски фольги, сделав прорези в картонной коробке, как показано на рисунке. Полоски должны быть гибкими, ненатянутыми, должны находиться



рядом, но все же не соприкасаться. Расстояние между ними должно быть всего 2 или 3 мм. Соедините полоски друг с другом с каждой стороны и затем прямо к ним с помощью тонких проводов подсоедините батарейку, чтобы в обеих полосках ток шел в одном и том же направлении. Такое устройство будет закорачивать батарейку и вызывать ток от 5 до 10 А в зависимости от ее размеров. Чтобы батарейка не вышла из строя, ее можно подключать на несколько секунд каждый раз.

Посмотрите, что произойдет с проводящими полосками, когда ток в них пойдет в одном направлении, а полоски расположены близко друг к другу. Вы можете обратить эффект, соединяя полоски вместе с одной стороны коробки и подсоединяя положительный и отрицательный выводы батарейки к отделенным друг от друга полоскам с другой стороны коробки. Таким способом вы направите ток в полосках в противоположные стороны. Видимый эффект в обоих случаях мал, но легко наблюдаем. Обратите внимание, что этот эффект никак не связан с сообщением заряда полоскам. Электростатически они остаются нейтральными. Чтобы убедиться в том, что с полосками ничего не происходит, когда они действительно *заряжаются* до этого низкого напряжения, подсоедините обе полоски к одному полюсу батарейки, или одну из них к одному полюсу, а другую – ко второму. (Но не замыкайте цепь во избежание появления токов в полосках.)

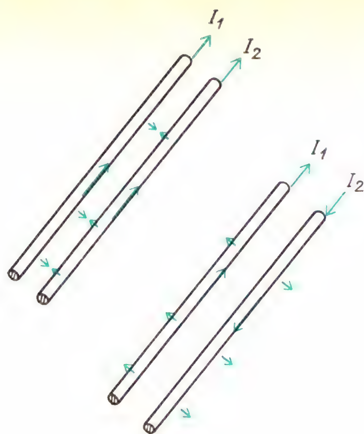
4. Поднесите магнит очень близко к одной из подвешенных полосок. Если у вас есть подковообразный магнит, расположите его так, чтобы алюминиевая полоска проходила между полюсами магнита. Теперь пошлите в полоску кратковременный импульс тока и наблюдайте за тем, что произойдет. Измените направление тока на противоположное и обратите внимание на то, как изменится эффект. Для большинства магнитов и почти при любом взаимном расположении полоски и магнита эта демонстрация должна быть значительно эффектней, чем демонстрация с двумя расположенными рядом полосками в отсутствие внешнего магнита.

5. Положите на стол компас и прямо над ним протяните провод. Закоротите на секунду этим проводом батарейку и посмотрите, что произойдет со стрелкой компаса. Попробуйте выполнить эту демонстрацию, когда провод проходит в двух различных направлениях: во-первых, когда провод параллелен исходному направлению стрелки компаса, и во-вторых, когда провод перпендикулярен стрелке компаса.

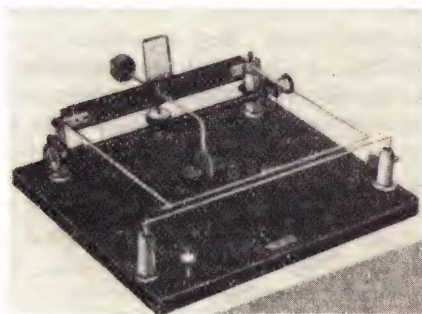
СИЛА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ТОКОВ

В «Знакомстве с явлениями» вы наблюдали силу, которую нельзя объяснить в рамках электростатики. Когда в двух параллельных проводах ток идет в одном направлении, между проводами существует сила притяжения. Когда токи идут в противоположных направлениях, провода отталкиваются друг от друга. В проводах происходит перенос заряда, но ни в одном из участков нет избыточного отрицательного или положительного заряда. Отрицательно заряженные электроны просто дрейфуют мимо положительно заряженных ионов.

Фактическое значение этой силы, действующей между параллельными токами, и ее зависимость от расстояния



между проводами могут быть измерены с помощью простого устройства в виде весов. Опыты показывают, что эта сила обратно пропорциональна расстоянию



Токовые весы учебной лаборатории. Сила взаимодействия двух параллельных проводов уравновешивается расположенным сзади противовесом

между осями проводов: $F \sim 1/r$. Поскольку эта сила должна быть обусловлена каким-то влиянием, распространяющимся от одного провода к другому, неудивительно, что такая *цилиндрическая* геометрия создает силу, зависящую обратно пропорционально первой степени расстояния. Вспомните, что электростатическое поле простирается от заряженного провода тоже с зависимостью от расстояния вида $1/r$.

Опыты показывают также, что сила взаимодействия между проводами зависит от *произведения* протекающих по ним токов. Из симметрии мы бы ожидали, что если эта сила пропорциональна I_1, она должна быть пропорциональна и I_2. То, что эта сила прямо пропорциональна каждому из токов, представляет собой просто экспериментальный факт, хотя в конце данной главы мы рассмотрим некоторый способ объяснения этого факта.

Добавляя коэффициент пропорциональности, можем теперь записать формулу для силы взаимодействия двух параллельных проводов: $F \sim l/r$, $F \sim I_1 I_2$; следовательно,

$$F \sim \frac{I_1 I_2}{r} l.$$

И опять коэффициент пропорциональности будет содержать связанный с ним иррациональный множитель, но на этот раз в форме 2π, не входящий в саму константу. Как мы видели раньше, эти дополнительные кратные π множители обусловлены геометрическими свойствами пространства или свойствами источников. Если бы мы не включили их в одну формулу, они бы появились в другой. Взаимодействие между двумя параллельными проводами выражается в виде силы на единицу длины. Чем длиннее провода, тем больше сила:

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{r}.$$

Расстояние r между осями проводов измеряется в метрах. Сила на 1 метр длины F/l измеряется в ньютонах на метр, и токи I_1 и I_2 — в амперах. В этом случае значение μ_0 в точности равно $4\pi \cdot 10^{-7}$.

Вопрос 20-1

Предположим, что сила, с которой второй провод действует на первый, равна 1 Н. Тогда сила, с которой первый провод действует на второй, тоже должна быть равна 1 Н. Чему равна результирующая сила взаимодействия проводов?

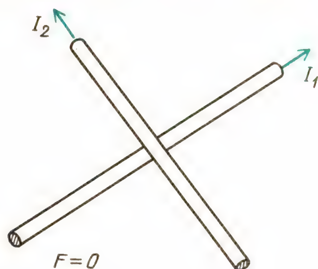
Напомним, что в главе 18 мы дали определение кулону через ампер, не давая при этом определения амперу, и затем приняли на веру значение константы k, появляющейся в законе Кулона. Теперь мы готовы к тому, чтобы внимательно рассмотреть определение ампера. Когда мы полагаем $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$, уравнение для F/l опреде-

ляет ампер. Константа μ_0 называется *магнитной постоянной*. Она аналогична константе ε_0 – электрической постоянной. Однако в приписывании значений этим двум константам имеется операционное различие. Мы можем выбрать для какой-нибудь одной из них любое произвольное значение, но затем вторая константа должна определяться на опыте, поскольку кулон и ампер связаны между собой. В Международной системе единиц (СИ) выбирается μ_0 и затем измеряется ε_0.

Вопрос 20-2
Уже были приведены оправдания по поводу множителя, содержащего π. Но почему для этой константы не приведено большее число значащих цифр? Равна ли она $4\pi \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-7}$ или $4\pi \cdot 1{,}0000 \cdot 10^{-7}$?

Значение ампера, определяемое этой формулой, можно также выразить словами: если сила взаимодействия на 1 м длины двух длинных параллельных проводов, находящихся на расстоянии 1 м друг от друга, равна $2 \cdot 10^{-7}$ Н, то ток в каждом проводе равен 1 А.

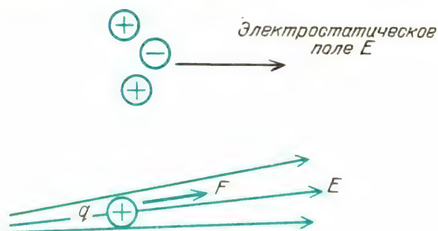
В «Знакомстве с явлениями» вы видели, что́ происходит, если токи в проводах не параллельны, а антипараллельны. Возникает сила отталкивания вместо силы притяжения, но такая же по модулю. Когда провода *перпендикулярны* друг другу, имеется лишь очень небольшая область влияния, где провода проходят близко друг к другу, и поэтому можно ожидать, что будет мала и сила взаимодействия между проводами. На самом деле эта сила равна нулю.



Поскольку силу можно считать положительной, когда токи параллельны, и отрицательной, когда токи антипараллельны, вполне правдоподобно, что эта сила должна быть равна нулю, когда провода перпендикулярны, ибо это нулевое значение лежит посередине между положительными и отрицательными значениями.

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

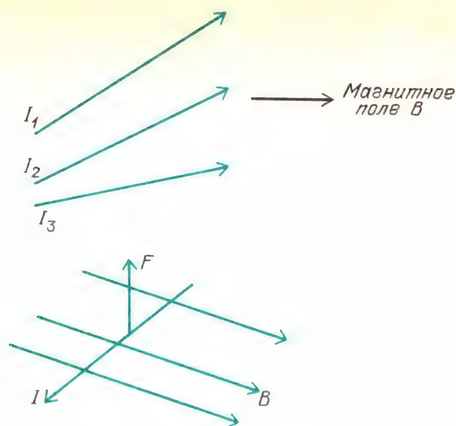
При изучении электростатики мы начали с закона Кулона для силы взаимодействия двух точечных зарядов. Чтобы описать эффекты, создаваемые более сложными распределениями зарядов, мы разделим задачу на две части. Мы говорили, что электростатический заряд, по-видимому, деформирует (или искажает) окружающее пространство. Это искажение мы описывали с помощью электрического поля, определяемого в каждой точке по силе, действующей на помещенный в эту точку единичный положительный электрический заряд. Тогда реальный заряд в этой точке испытывает действие силы, равной произведению заряда на напряженность электрического поля. Таким образом, поле



На единичный положительный электрический заряд q в электростатическом поле E действует сила $F = qE$

фигурирует в качестве промежуточного этапа вычислений, но оно также имеет и независимую реальность.

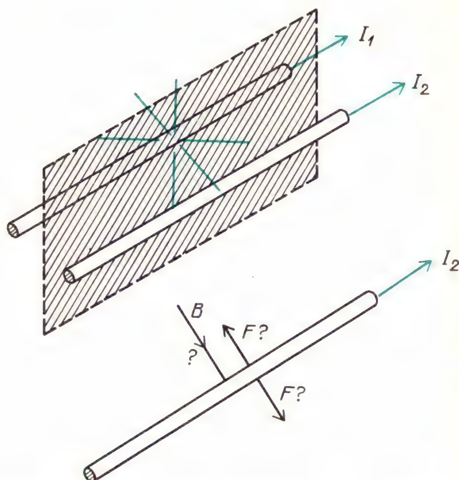
Теперь нам бы хотелось рассчитать взаимодействия различных распределений электрических токов. Мы предполагаем, что *движущиеся* заряды создают *магнитное* поле; это аналогично нашему подходу к возникновению электрического поля. Модуль и направление магнитного поля можно рассчитать на основе его источников, т. е. токов. Обнаружить это поле и измерить его можно по силе, действующей на единичный пробный электрический ток.



На единичный пробный электрический ток I в магнитном поле B действует сила F

При взаимодействии параллельных проводов один из них может служить пробным устройством для измерения магнитного поля, создаваемого другим проводом. Тогда в некоторой точке напряженность магнитного поля, обозначаемая символом B*), будет измеряться как *сила, действующая на метр длины единичного пробного тока* в этой точке. Единицей напряженности B служит Н/(А · м).

Теперь перед нами встает следующая задача. Если описывать магнитное поле с помощью линий поля, каким будет *направление* магнитного поля, создаваемого прямолинейным проводом? (Не забывайте, что линии поля представляют собой придуманную людьми модель, которая изобретена для нашего удобства.) Если бы мы провели эти линии радиально, подобно линиям электростатического поля заряженного провода, то они были бы перпендикулярны к единичному пробному току. Напомним, что действующая на такой пробный ток сила может быть положительной, отрицательной или равной нулю в зависимости от его ориентации по отношению к проводу – источнику поля. Однако в любом случае действующая на пробный ток сила должна быть направлена вдоль радиальной линии, соединяющей оба провода. Но при использовании такой ориентации линий поля и пробного тока не существовало бы способа, на основе которого можно



Параллельные токи создают силы, притягивающие провода. Но если бы линии магнитного поля были радиальными, каким образом ток I_2 смог бы «узнать», идет ли ток I_1 в том же направлении или в противоположном?

было бы предсказать направление или значение этой силы. Такая ситуация неудовлетворительна. Нужно изобрести такой способ изображения магнитного поля, чтобы взаимодействие последнего с пробным током обеспечивало получение силы, действующей в *единственном* должном направлении.

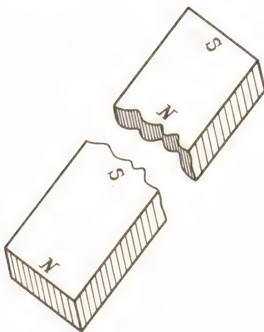
Хотя для построения картины встречающихся нам магнитных полей в принципе можно использовать пробный ток, существует более простой способ нахождения картины линий поля. В качестве пробного инструмента мы воспользуемся маленькими постоянными *диполями* (или магнитами). Исторически магнитные поля впервые были определены в терминах сил, действующих на магнитные диполи.

Дополнительный материал

Разве мы не можем определить направление магнитного поля по силе, действующей на единичный пробный *полюс*? Единичный северный полюс был бы тогда аналогичен единичному положительному за-

*) Автор отказывается от неудачной традиционной терминологии и называет B напряженностью магнитного поля, а не магнитной индукцией, как это обычно принято. (*Примеч. пер.*)

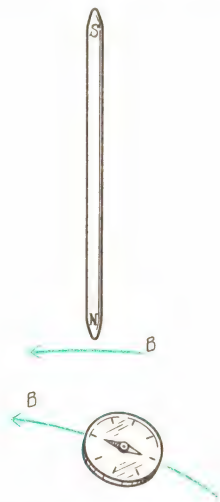
ряду в электростатике. Используя такой единичный полюс, мы могли бы построить картины магнитных полей, создаваемых магнитами или распределениями электрических токов. Беда в том, что не существует изолированных северного или южного полюсов. На следующем рисунке вы видите предлагавшееся решение этой проблемы. Возьмем



стержневой магнит, у которого северный полюс на одном конце и южный полюс на другом конце, и разрежем его пополам. Но, как говорят в народе, палка о двух концах, и если вы сделаете так, то получите два отдельных магнита, каждый из которых имеет северный полюс на одном конце и южный полюс на другом. В действительности о таком эксперименте часто говорят, но редко его делают. Хорошие постоянные магниты обычно очень твердые и хрупкие. Если пилить или разламывать такой магнит пополам, при этом скорее всего не избежать сотрясений или таких возмущений, после которых вообще не получится магнитов или они получатся очень слабыми.

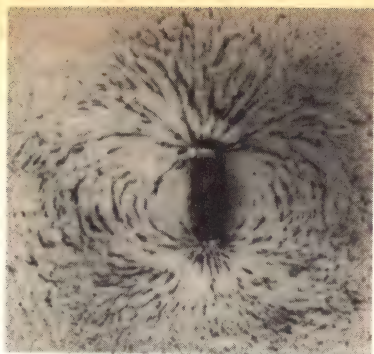
Дело, однако, в том, что до сих пор никому еще не удалось обнаружить изолированный магнитный полюс. И это не от недостатка таких попыток; поиски монополя столь же стары, как и история электричества, и разными способами предпринимались каждым поколением физиков. В 1928 году Поль Дирак, один из основоположников современной квантовой теории, успешно предсказавший существование античастиц, выдвинул простой, но строгий аргумент в пользу существования монополей. Если бы где-либо во Вселенной существовал хотя бы один монополь, то электрический заряд должен был бы быть квантованным. Обратная теорема не обязательно справедлива, но безусловно стимулирующим будет замечание, что электрический заряд и в самом деле квантуется. Недавние поиски монополя предпринимались в области исследований космических лучей и очень высокоэнергетических субатомных частиц. Но если бы такую частицу и удалось обнаружить, она не имела бы никакого отношения к нашей будничной проблеме определения и измерения магнитных полей.

На практике аппроксимацию пробного полюса можно получить, используя один конец намагниченной вязальной спицы. Ее северным полюсом можно зондировать поле, в то время как южный полюс еще находится за его пределами. В качестве альтернативного метода картину магнитного поля можно



построить с помощью маленьких магнитных диполей. Например, на северный полюс стрелки компаса действует сила в направлении поля, в то время как действующая на ее южный полюс сила имеет противоположное направление. Результирующий момент сил поворачивает стрелку, пока она не установится вдоль направления поля.

Один из способов получения магнитных диполей состоит в том, чтобы разбросать железные опилки по гладкой поверхности в магнитном поле (например, около стержневого магнита). В таком поле каждая крошечная железная иголка поляризуется так, что устанавливается параллельно магнитному полю. При этом становится видимой, по крайней мере в двух измерениях, общая картина линий поля.



Линии магнитного поля вокруг стержневого магнита, выявляемые железными опилками

Вопрос 20-3
Мы начали с поисков такого описания магнитных полей, которое позволило бы нам охарактеризовать наблюдаемые силы, действующие на пробные токи. Теперь мы предлагаем строить картину магнитных полей с помощью крошечных постоянных магнитов. Откуда мы знаем, что построенные таким способом поля имеют какое-то отношение к пробным токам?

В следующем разделе данной главы мы рассмотрим качественное описание этой модели магнитного поля и правила ее применения для получения качественных предсказаний о взаимодействиях постоянных магнитов с электрическими токами. Затем мы более тщательно рассмотрим количественные черты этой модели и выведем некоторые формулы, связывающие силы, поля и токи.

КАРТИНЫ ПОЛЕЙ, СОЗДАВАЕМЫХ ПОСТОЯННЫМИ МАГНИТАМИ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ТОКОВ

Стержневой магнит – магнитный диполь. Такой диполь является, по-видимому, наиболее знакомым типом магнита. Картина окружающего его магнитного поля выглядит точно так же, как электрическое поле, окружающее электрический диполь. Используя в качестве пробного полюса северный полюс длинной намагниченной вязальной спицы, находим, что магнитные линии выходят из северного полюса магнита и входят в южный. Что происходит внутри магнита, обычно увидеть не удается. В случае электрического диполя линии поля в области между зарядами идут прямо от положительного заряда к отрицательному. На фотографии показан

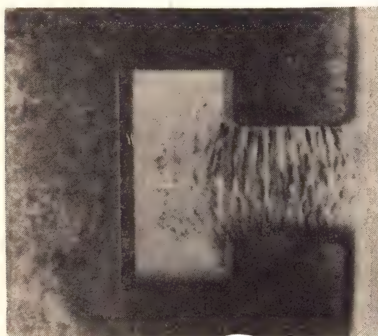
стержневой магнит с отверстием посередине. Находящийся в отверстии компас показывает, что линии поля внутри магнита идут от южного полюса к северному, а это резко отличается от случая электрического диполя. Поскольку не существует изолированных северного и южного полюсов, линии поля нигде не могут начинаться или обрываться. Они должны существовать в форме замкнутых петель.

«Полюсы» постоянного магнита находятся не в каких-то точках, а скорее занимают изрядно большие области. Хотя обычно области полюсов расположены возле концов магнита, они могут находиться почти в любых местах, в зависимости от того, как данный магнит был изготовлен и как он хранился. Иногда существует несколько пар полюсных областей, но никто еще никогда не находил магнита только с одним полюсом.

Компасы и железные опилки дают изображение направления линий поля, но не дают хорошей картины напряженности этого поля. Позже мы увидим, что напряженность магнитного поля может быть представлена числом линий

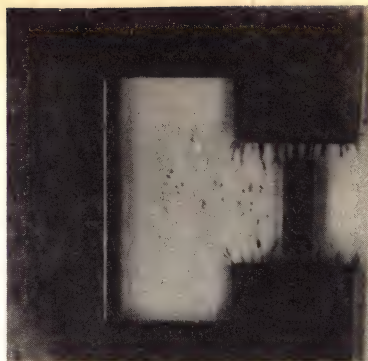
поля, пересекающих единичную площадь, подобно ситуации с напряженностью электрического поля и линиями электрического поля. В приводимом здесь качественном рассмотрении будет по крайней мере правдоподобно считать, что магнитные поля сильны там, где линии очень сгущаются, и слабы там, где эти линии разрежены.

Магнитное поле С-образного магнита. У магнита в форме буквы С или у подковообразного магнита полюсы подведены близко друг к другу. Непрерывные линии поля большую часть своей длины проходят в железе и выходят в воздух лишь в небольшой области. Подобные магниты гораздо лучше сохраняют свою силу, чем стержневые, и можно сделать так, чтобы у них было очень сильное поле в открытом зазоре между полюсами. Показанный на первой фотографии магнит имеет параллельные полюсные щечки, и в центральной области



линии поля равномерны. Эта картина очень напоминает линии электрического поля в плоском конденсаторе с параллельными пластинами.

Линии поля стремятся найти кратчайший магнитный путь, чтобы замкнуть свои петли. На второй фотографии показано, что происходит, когда в зазор С-образного магнита помещен ненамагниченный кусок железа. Линии сгущаются в железе, создавая более сильное поле в железе и более слабое поле во внешней области. На третьей фотографии показано, как можно воспользоваться этим свойством для экранировки магнитных полей. Область внутри железного цилиндра сравнительно свободна от магнитных полей.



Магнитное поле между одноименными полюсами. Два полюса одного сорта отталкивают друг друга, и рисунок линий поля на четвертой фотографии почти воочию инсценирует эту ситуацию. На этой фотографии можно увидеть два

важных момента, касающихся модели поля в виде линий. Во-первых, линии поля не могут пересекать друг друга. Если бы так случилось, то действующая на пробный полюс сила имела бы в точке пересечения два различных направления, что физически невозможно. Второй момент, подмеченный Фарадеем, придает ощутимую реальность этой мысленной конструкции из линий магнитного поля. Кажется, будто эти линии отталкивают друг друга. Мы будем

ссылаться на этот аспект модели при изображении сил, действующих на токи в магнитных полях.

Магнитное поле, создаваемое током в длинном прямолинейном проводе. При первой попытке построить модель магнитного поля мы интересовались, что произошло бы, если бы линии поля вокруг тока в длинном прямом проводе были радиальными прямыми, выходящими из провода. Такая модель отказалась работать.

Вопрос 20-4
Почему не работала такая модель?

На этой фотографии мы видим, что линии магнитного поля вокруг провода с током можно считать концентрическими окружностями. Если бы существовал

По вертикальному проводу идет ток 5 А. Реакция компасов свидетельствует о том, что вокруг провода существуют круговые линии магнитного поля (до включения тока стрелки всех компасов располагались в одном направлении, показанном черными стрелками)

изолированный северный полюс, на него действовала бы сила, стремящаяся привести полюс в движение вокруг провода. (Его орбита не была бы круговой, потому что он непрерывно набирал бы энергию и двигался по раскручивающейся спирали.) Поле вблизи провода более интенсивно; поэтому там больше плотность линий поля.

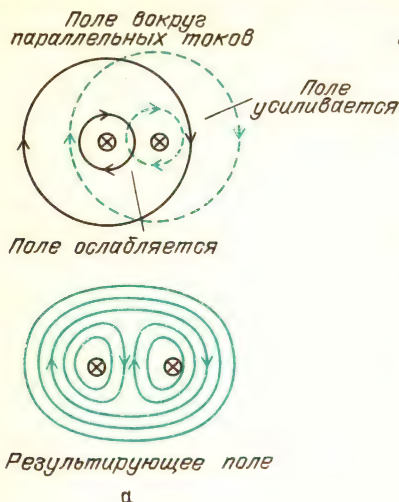
На следующем рисунке можно видеть, как помещенная вблизи провода с током стрелка компаса устанавливается по касательной к линиям поля. Действующая на северный конец сила тянет стрелку в направлении против часовой стрелки, в то время как равная по модулю сила действует на южный полюс в направлении по часовой стрелке. Поскольку эти силы не направлены вдоль одной прямой, действующая на стрелку результирующая сила не равна нулю.

Вопрос 20-5
Как направлена эта результирующая сила?

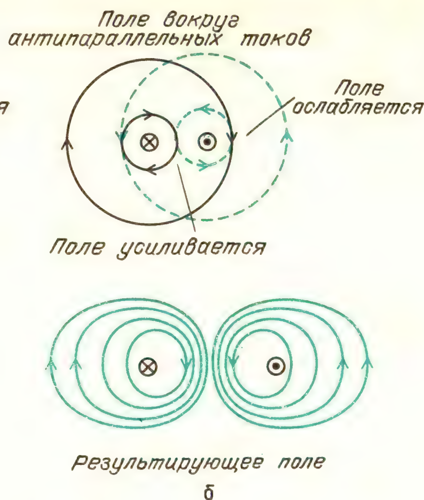
Круговые линии поля вокруг тока имеют определенное направление: по или против часовой стрелки в зависимости от направления тока. В одном из следующих разделов, где этот материал трактуется количественно, мы покажем, как определять направление линий поля с помощью векторного произведения элемента тока и радиус-вектора. А пока приведем простое правило, которого вам будет достаточно для нахождения направлений сил и полей в любом из сложных геометрических расположений проводов с током, которые рассматриваются ниже.

Направьте большой палец правой руки вдоль тока, остальные пальцы правой руки согнутся в направлении линий магнитного поля.

Магнитное поле вблизи двух параллельных токов. Мы уже видели, что между параллельными токами действует сила притяжения. Картина линий поля, приведенная на рис. *а*, показывает, что *вокруг* двух параллельных токов поле усиливается, в то время как *между* проводами ослабляется. Если воспользоваться предложенной Фарадеем моделью, в которой линии поля рассматриваются как упругие нити, стремящиеся сократиться и в то же время отталкивающие друг друга, то мы придем к заключению, что линии магнитного поля пытаются стянуть два провода вместе в центральную область, где их поля взаимно уничтожаются.



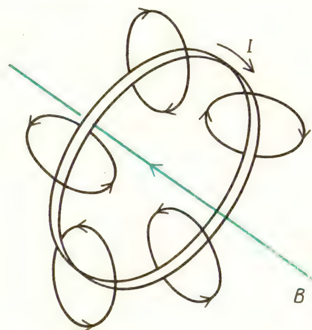
а



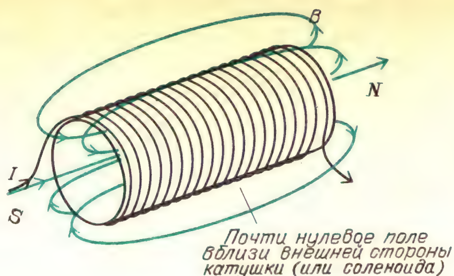
б

На рис. *б* видим противоположную ситуацию. Провода и здесь параллельны, но токи в них антипараллельны. Теперь поля между проводами складываются конструктивно, в то время как во внешних областях происходит частичная компенсация полей. Линии поля отталкивают друг друга и поэтому пытаются раздвинуть провода в стороны.

Магнитное поле на оси кольцевого тока. Линии такого поля вблизи провода должны быть круговыми, и их направление дается правилом правой руки. Если сложить вклады в поле от всех небольших участков кольцевого *контура*, то получится картина поля, показанная на следующем рисунке в правой колонке. Одна из линий магнитного поля направлена вдоль оси кольца. Она уходит в окружающее пространство и возвращается назад с противоположной стороны. На самом деле внешнее магнитное поле во многом выглядит похожим на поле диполя.

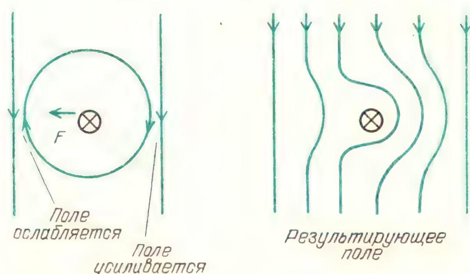


Магнитное поле соленоида. Соленоид представляет собой большое число петель с током, навитых непрерывно на цилиндр. Картина поля особенно проста, если длина цилиндра значительно больше его диаметра. В таком случае рисунок поля вне соленоида выглядит точно так же, как у постоянного стержневого магнита. Здесь есть северный полюс и южный полюс, с линиями поля, выходящими из одного конца и входящими обратно через другой конец. В данном случае поведение линий поля внутри соленоида определяется легко. Не существует изолированных полюсов, поэтому линии поля образуют замк-



нутые петли. Внутри соленоида линии поля параллельны друг другу и проходят в направлении оси с постоянной плотностью. Поэтому магнитное поле однородно всюду внутри соленоида, за исключением пространства вблизи концов, где линии поля начинают расходиться, т.е. поле там слегка ослабляется. Выходящие из северного конца линии расширяются во все пространство, постепенно изгибаясь назад, чтобы войти в южный конец. Вблизи внешней поверхности соленоида плотность линий и, следовательно, само поле почти равны нулю.

Магнитное поле вокруг тока во внешнем однородном магнитном поле. Если пропустить ток по проводу, находящемуся в однородном магнитном поле, создаваемое током поле изменит линии поля вблизи провода так, как показано на рисунке. По одну сторону магнитное поле увеличено, по другую – уменьшено из-за компенсации. В соответствии с нащей моделью сгустившиеся справа линии поля стремятся сдвинуть провод в более слабое поле, находящееся слева.



Это действие лежит в основе электродвигателей, а также гальванометров, используемых в амперметрах и вольтметрах.

КОЛИЧЕСТВЕННОЕ РАССМОТРЕНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ – ЗАКОН АМПЕРА

Существуют два закона, связывающих напряженность магнитного поля с током, точно так, как и две различные формы закона для электростатического поля (закон Кулона определяет силу взаимодействия между двумя точечными зарядами; закон Гаусса связывает число линий электрического поля, выходящих из замкнутой поверхности, с заключенным внутри нее электрическим зарядом). Для магнитного поля начнем рассмотрение с закона, эквивалентного закону Гаусса, т. е. соотнесем линии магнитного поля с током, который создает поле.

Закон Ампера*) в простой форме, которую мы будем использовать, имеет вид

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{l}_{к} = \mu_0 I.$$

Скалярное произведение напряженности магнитного поля **B** и перемещения $\mathbf{l}_к$ вдоль *замкнутого контура* равно произведению магнитной постоянной и тока, окруженного контуром. Это соотношение справедливо для любого охватывающего ток контура, независимо от того, в каком месте внутри контура проходит ток. Если магнитное поле на всем протяжении контура не остается постоянным или изменяет направление относительно участков контура, то скалярное произведение нужно брать по отдельным участкам и результаты сложить для всего замкнутого контура. (В интегральном исчислении такая величина называется криволинейным интегралом.)

Применим закон Ампера для нахождения поля вокруг длинного прямолинейного провода с током. Чтобы найти магнитное поле на расстоянии r от оси провода, умножим напряженность поля на таком расстоянии на длину пути вдоль замкнутого кругового контура такого радиуса. Линия поля то-

*) Для утверждения, которое автор называет законом Ампера, в литературе чаще используют название «теорема о магнитном напряжении» (или о циркуляции напряженности **B**). (*Примеч. пер.*)

же круговая, поэтому магнитное поле всюду на этом контуре направлено вдоль него; скалярное произведение превращается в простое произведение модулей. Закон Ампера в применении к длинному прямолинейному проводу с током будет иметь вид

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I,$$

$$B = \mu_0 I/(2\pi r).$$

Закон Ампера точно устанавливает, что напряженность магнитного поля длинного прямолинейного провода обратно пропорциональна расстоянию от оси провода. Нам и следовало ожидать именно такой функциональной зависимости, поскольку сила взаимодействия двух параллельных токов обратно пропорциональна расстоянию между проводами. Разумно ожидать, что действующая на провод сила пропорциональна напряженности магнитного поля, в котором он находится.

Вопрос 20-6

Был бы закон Ампера по-прежнему применим, если бы мы выбрали путь вокруг провода в виде квадратного контура?

Напряженность магнитного поля в законе Ампера измеряется в тех же единицах, которые мы вывели из взаимодействия двух параллельных токов. На с. 223 мы уже говорили, что единицей напряженности служит Н/(А · м). Ньютон на ампер-метр имеет собственное наименование: такая единица называется *тесла* в честь Николая Теслы (1856–1943). Тесла (Тл) представляет собой крупную единицу магнитного поля. Меньшей единицей является гаусс (Гс). Итак, единица напряженности магнитного поля

$$1\ \text{Н}/(\text{А}\cdot\text{м}) = 1\ \text{Тл} = 1\cdot 10^4\ \text{Гс}.$$

Большие магниты, применяемые для исследований, создают поля в диапазоне нескольких тесла. Земное магнитное поле лежит в диапазоне нескольких гаусс.

Подсчитаем напряженность магнитного поля на расстоянии 1 см от провода, по которому идет ток 10 А:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\,\frac{I}{r} = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}}{2\pi}\,\frac{10\ \text{А}}{1\cdot 10^{-2}\ \text{м}} =$$

$$= 2\cdot 10^{-4}\ \text{Тл} = 2\ \text{Гс}.$$

В «Знакомстве с явлениями» вы закорачивали на короткое время сухой элемент проводом, протянутым над стрелкой компаса. Ток в таком проводе должен иметь значение от 5 до 10 А, и он проходил от стрелки компаса на расстоянии немного меньше 1 см. Таким образом, эти условия соответствуют только что выполненному расчету. Как вы заметили, ток в проводе создавал магнитное поле, которое преодолевало земное магнитное поле и заставляло стрелку компаса отклоняться почти на 90°. Магнитное поле напряженностью 2 Гс имеет тот же порядок величины, что и земное магнитное поле. Напряженность земного магнитного поля изменяется в зависимости от географического положения, но на большей части территории Соединенных Штатов оно составляет около (1/2) Гс. Чем дальше вы продвигаетесь к северу, тем круче вниз направлено земное магнитное поле. *Горизонтальная* составляющая напряженности земного поля на севере Соединенных Штатов составляет всего лишь около (1/3) Гс. Приводимая таблица дает напряженность магнитного поля в различных естественных и технических условиях.

Диапазон измеренных магнитных полей

Источник	B, Тл
Токи альфа-ритма головного мозга	10^{-15}
Токи, управляющие сокращениями сердца	10^{-14}
Типичный телевизионный сигнал	10^{-11}
Свет 100-ваттной лампы на расстоянии 3 м	10^{-8}

Продолжение

Источник	B, Тл
В 1 м от длинного провода с током 1 А	$2 \cdot 10^{-7}$
У поверхности Земли	10^{-4}
Между полюсами игрушечного постоянного магнита	10^{-2}
Исследовательский магнит для фокусировки пучков или электродвигатель	1
Сверхпроводящие исследовательские магниты	10^{1}
На атомном ядре, создаваемое валентным электроном	10^{2}
Лабораторный взрыв с захваченным магнитным полем	10^{3}
Поверхность нейтронной звезды	10^{8}

КОЛИЧЕСТВЕННЫЙ РАСЧЕТ МАГНИТНОГО ПОЛЯ – ЗАКОН БИО – САВАРА

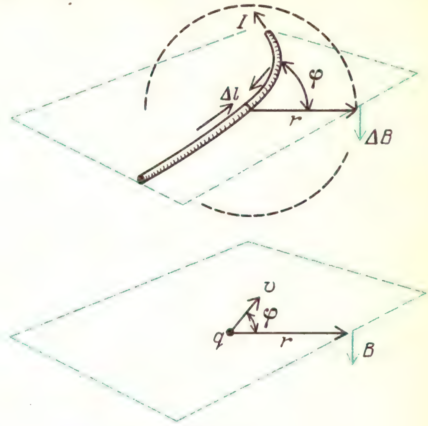
Закон Ампера имеет дело с магнитным полем вдоль замкнутого контура с током. Другой закон магнитного поля описывает поле в одной точке. Это двойник закона Кулона в электростатике. Он называется законом Био – Савара в честь Жана Био (1774 – 1862) и Феликса Савара (1791 – 1841). Существуют две слегка различные формы представления этого закона: одна для поля, создаваемого малым участком (элементом) провода с током, и другая для поля, создаваемого отдельным движущимся зарядом. Поле, создаваемое элементом тока $I\,\Delta l$, имеет вид

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I\,\Delta l \sin\varphi}{r^2}.$$

Поле, создаваемое движущимся зарядом q:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{v \sin\varphi}{r^2}.$$

Первая форма этого закона выражает вклад ΔB в магнитное поле, создаваемый током в малом участке провода. Каждый участок провода дает свой вклад, и полное поле в данной точке должно быть векторной суммой этих вкладов. Во второй форме закона рассматривается только один заряд q, и эта форма выражает единственное поле в удаленной точке. На рисунке показаны геометрические расположения, в которых действуют эти законы. Прежде

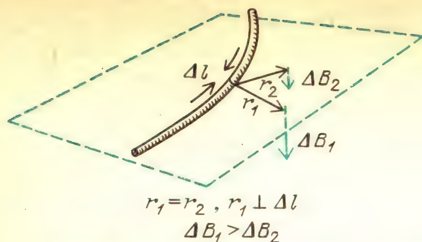


всего обратите внимание на то, что напряженность поля обратно пропорциональна *квадрату* расстояния от источника до точки наблюдения.

Вопрос 20-7
Но выполненный нами ранее расчет показал, что напряженность магнитного поля вблизи провода с током обратно пропорциональна *первой* степени расстояния от провода. Чем же отличается эта новая ситуация?

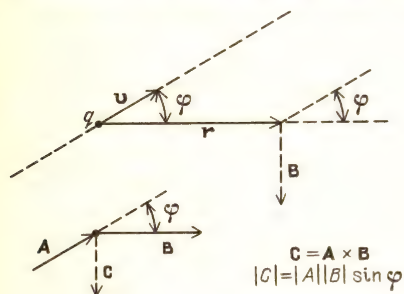
В обеих формах представления закона Био – Савара напряженность магнитного поля пропорциональна току, поскольку движущийся заряд тоже представляет собой некоторый ток. Напряженность поля зависит также от синуса угла между скоростью заряда и направлением от заряда в точку наблюдения. Поле в точке наблюдения максимально, когда прямая, проведенная из этой точки к элементу тока, перпендикулярна к направлению тока или к скорости заряда. Создаваемая в этой точке напряженность магнитного поля изображается вектором, перпендикулярным к плоскости, проходящей через направление тока и прямую от точки к движущемуся заряду.

Во второй форме представления закона Био – Савара используется векторное произведение. Векторное произведе-



Полное поле на расстояниях r_1 или r_2 равно сумме вкладов от всех элементов провода с током (ΔB_1, ΔB_2 – вклады в поле от Δl)

ние было определено в главе 4, где рассматривались моменты сил (с. 91). Такое произведение представляет собой вектор, перпендикулярный к векторам-сомножителям и имеющий максимальный модуль, когда векторы-сомножители перпендикулярны друг к другу. Эти математические условия удовлетворяют физическим условиям для магнитного поля, создаваемого движущимся зарядом. На приводимом рисунке показано взаимное расположение векторов

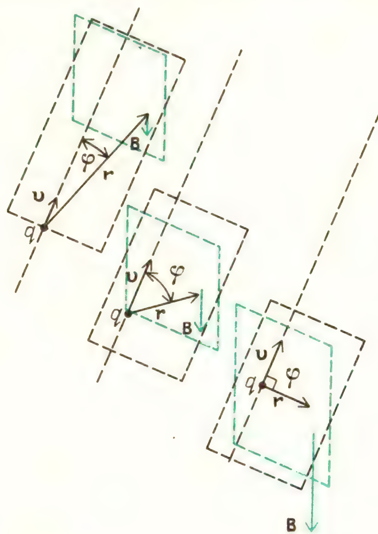


и определение векторного произведения. Используя эту терминологию, можно записать закон Био – Савара для движущегося заряда в следующем виде:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3}.$$

На первый взгляд может показаться, что здесь утверждается, будто напряженность поля обратно пропорциональна *кубу* расстояния от заряда до точки наблюдения. Однако это не так. Теперь лишнее r входит в числитель, представляя радиус-вектор, проведенный из движущегося заряда в точку наблюдения; величина $\mathbf{r}$ нужна для представления направления этого вектора, но поскольку $\mathbf{r}$ характеризуется также и модулем, мы должны для компенсации добавить еще одну степень r в знаменателе.

Предположим, что вам бы удалось измерить магнитное поле, которое создает отдельный протон, пролетая мимо вас. Рассмотрим, как изменялась бы напряженность поля в зависимости от его расстояния до вас. Как показано на следующем рисунке, есть две причины, по



которым поле было бы чрезвычайно слабым, когда протон находится далеко. Во-первых, обратный квадрат большого расстояния делает поле малым, и, во-вторых, синус угла между скоростью протона и направлением от протона к вам тоже был бы очень мал. Фактически, если бы протон летел прямо на вас, этот угол был бы равен нулю. Вы бы не обнаружили никакого магнитного поля, созданного протоном, несмотря на то, что он прошел бы прямо сквозь вас. Если, однако, протон пролетает рядом, будет момент, когда радиус-вектор от протона к вам направлен перпендикулярно к скорости протона. В этот момент $\sin\varphi$ имеет максимальное значение, а расстояние имеет минимальное значение. Следовательно, поле было бы максимальным. Но независимо от того, будет ли магнитное поле сильным или слабым, его *направление* в том месте, где вы находитесь, не изменяется. Оно перпендикулярно к горизонтальной плоскости, в которой лежат радиус-вектор

от протона и вектор его скорости. В показанном случае магнитное поле в том месте, где вы находитесь, было бы направлено вниз.

Посмотрим, возможно ли обнаружить магнитное поле, создаваемое отдельным протоном, когда он пролетает мимо вас с очень высокой скоростью. Будем производить измерение, когда угол равен $\varphi = 90°$ и расстояние $r = 1 \cdot 10^{-3}$ м. Протон мог бы, например, лететь внутри очень тонкой трубки, и мы могли бы попытаться обнаружить его присутствие с помощью окружающего трубку маленького контура. Если протон движется со скоростью, равной одной трети от скорости света, то напряженность создаваемого им магнитного поля равна

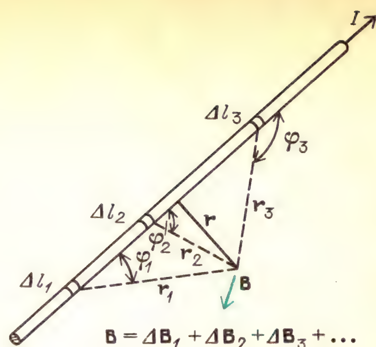
$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{v \sin \varphi}{r^2} =$$

$$= \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{4\pi} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл } \frac{1 \cdot 10^8 \text{ м/с}}{(1 \cdot 10^{-3} \text{ м})^2} =$$

$$= 1{,}6 \cdot 10^{-12} \text{ Тл} = 1{,}6 \cdot 10^{-8} \text{ Гс}.$$

Очевидно, что магнитное поле, создаваемое в таких условиях отдельным протоном, очень мало. Оно лежит на границе обнаружимого. Но магнитные методы регистрации используются для пучков протонов, когда в кольце ускорителя одновременно движется вплоть до 10^6 протонов.

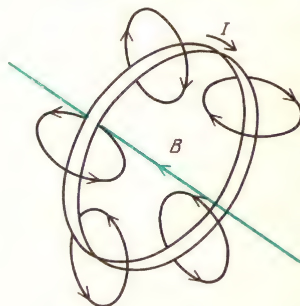
Теперь у нас есть два закона – Ампера и Био – Савара, описывающих одно и то же явление. Всегда ли они предсказывают одинаковые результаты? Нельзя ли, например, воспользоваться законом Био – Савара для расчета магнитного поля вблизи тока в длинном прямолинейном проводе? Мы уже знаем результат, к которому приводит закон Ампера. На рисунке показано, как можно выполнить такой расчет, суммируя вклады в магнитное поле от всех малых участков длинного провода. Хотя такой метод в принципе несомненно возможен, может показаться, что на практике он должен быть очень трудным. Расстояние от отдельных участков до точки наблюдения изменяется, изменяется и угол φ. Оказывается, что этот расчет можно сравнительно просто выполнить с помощью интегрального исчисления. Результат получается в точности таким же, как и при применении закона Ампера: напряженность магнитного поля обратно пропорциональна первой степени расстояния от провода до точки наблюдения.



Вклады ΔB разных элементов длинного провода с током различаются по модулю, но все имеют одно и то же направление

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ НА ОСИ КОНТУРА С ТОКОМ

Из качественного рассмотрения мы знаем, что создаваемое контуром с током магнитное поле выглядит подобно полю, создаваемому диполем. Линии

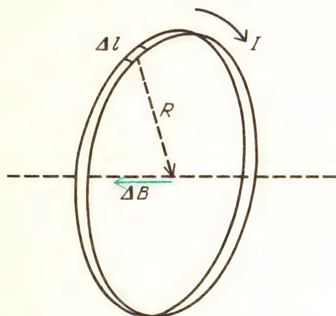


поля проходят сквозь петлю. Рассчитаем напряженность магнитного поля на оси в центре контура.

Поскольку у нас имеется контур с током, может показаться, что здесь следует воспользоваться законом Ампера.

Вопрос 20-8
Почему же мы им не пользуемся?

Для данной геометрии провода в форме петли легко использовать закон Био – Савара для нахождения результирующего поля *на оси петли.* Все малые участки провода с током в таком контуре дают одинаковые вклады в полное поле в центре контура. В каждой точке окружности ток перпендикулярен к радиус-вектору. Все вклады



в поле ΔB имеют общее направление вдоль оси, и поэтому они просто складываются. Вклад в напряженность поля от любого отдельного участка равен

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\Delta l \sin\varphi}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\Delta l}{R^2},$$

так как $\varphi = 90°$. Сумма длин Δl всех малых участков провода равна длине окружности, т.е. $2\pi R$. Поэтому напряженность результирующего поля равна

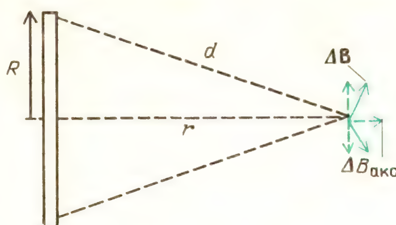
$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cdot 2\pi R}{R^2} = \frac{\mu_0}{2} \frac{I}{R}.$$

Посмотрим, насколько сильное магнитное поле можно получить в центре небольшой петли с током. Если взять один виток радиусом 10 см с током 10 А, то напряженность поля в его центре равна

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2} \frac{10 \text{ А}}{1 \cdot 10^{-1} \text{ м}} =$$
$$= 2\pi \cdot 10^{-5} \text{ Тл} \approx 0{,}6 \text{ Гс}.$$

Это магнитное поле имеет почти такую же напряженность, как и земное. Используя тот же ток, можно получить более сильное поле, если сделать катушку с большим числом витков.

С помощью закона Био – Савара легко также рассчитать магнитное поле на оси кругового контура с током, но на значительном расстоянии от контура. Расчет упрощается, если расстояние r от центра контура до точки наблюдения значительно больше, чем радиус R контура. Геометрия такого расчета показана на рисунке. Вклад в поле от любого



отдельного участка для $r \gg R$ равен

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\Delta l}{d^2} \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\,\Delta l}{r^2}.$$

Напряженность магнитного поля каждого участка контура с током перпендикулярна к прямой d. Лишь небольшая составляющая этого поля направлена вдоль оси. Перпендикулярная к оси большая составляющая напряженности в точности компенсируется вкладом в поле от малого участка на противоположной стороне контура. Такая компенсация перпендикулярных составляющих происходит для всех участков контура. Лишь аксиальные составляющие усиливают друг друга. Аксиальная составляющая каждого вклада в поле ΔB равна

$$\Delta B_{\text{акс}} = \Delta B \frac{R}{d} \approx \Delta B \frac{R}{r} = \frac{\mu_0 R}{4\pi} \frac{I\Delta l}{r^3}.$$

Полное поле, обусловленное всеми отдельными вкладами, равно

$$B = \sum \Delta B_{\text{акс}},$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{r^3} 2\pi R = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2}{r^3} \pi R^2 I.$$

Сравните эту формулу с выражением для электрического поля на оси электростатического диполя, которая была выведена в главе 18, с. 153:

$$E = k \frac{2p}{r^3},$$

где $p = ql$ – электрический дипольный момент. Создаваемое диполем электрическое поле обратно пропорционально

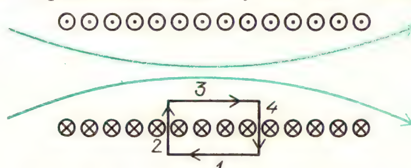
кубу расстояния от диполя. Как вы видите, магнитное поле на оси кругового контура с током имеет ту же самую функциональную зависимость от расстояния. Подобие этих формул будет полным, если для магнитного дипольного момента контура принять значение $\pi R^2 I$. Замкнутый контур с током действует как магнитный диполь с магнитным моментом (или «силой дипольного заряда»), равным произведению площади контура πR^2 и тока I в нем. Мы воспользуемся этим соотношением при изучении происхождения магнитных свойств твердых тел.

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ВНУТРИ СОЛЕНОИДА

Мы уже обрисовали картину магнитного поля внутри длинного соленоида. Может показаться, что рассчитать количественно поле в соленоиде очень сложно. Если использовать закон Био – Савара, то пришлось бы складывать вклады в напряженность поля от элементов тока с очень сложной геометрией. С другой стороны, здесь не видно какого-либо замкнутого контура, вдоль которого можно было бы применить закон Ампера.

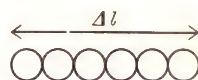
Вопрос 20-9
Почему бы не применить закон Ампера к круговому контуру, концентрическому с соленоидом, проходящему либо внутри, либо вне обмотки соленоида?

Однако в этом случае *существует* замкнутый путь, вдоль которого можно применить закон Ампера. Этот путь показан на рисунке. Он состоит из четырех прямолинейных участков, вдоль



$$\Sigma B \cdot \Delta l = B_1 \cdot \Delta l_1 + B_2 \cdot \Delta l_2 + B_3 \cdot \Delta l_3 + B_4 \cdot \Delta l_4 = 0 + 0 + B_3\,\Delta l_3 + 0 = B\Delta l_3$$

каждого из которых мы должны вычислить скалярное произведение напряженности магнитного поля и перемещения. Для облегчения расчета мы с достаточно хорошим приближением можем принять, что магнитное поле вблизи наружной стороны катушки в средней ее части равно нулю. Поэтому произведение напряженности поля и перемещения вдоль участка *1* этого замкнутого пути равно нулю. На участках *2* и *4* напряженность поля либо равна нулю, либо перпендикулярна перемещению. В любом случае скалярное произведение напряженности поля и перемещения равно нулю. Вдоль участка *3* напряженность магнитного поля постоянна и совпадает по направлению с перемещением. Поэтому скалярное произведение напряженности поля и перемещения равно просто $B\Delta l_3$. В соответствии с законом Ампера это произведение равно произведению магнитной постоянной и полного тока, охватываемого контуром. Проходящий сквозь этот контур ток равен числу охватываемых контуром витков на ток в каждом витке. Число витков внутри контура равно числу витков



Число витков провода на длине Δl равно $n\,\Delta l$, где n = число витков/метр. Полный ток в этих витках равен $n\,\Delta l I$, где I – ток в каждом витке

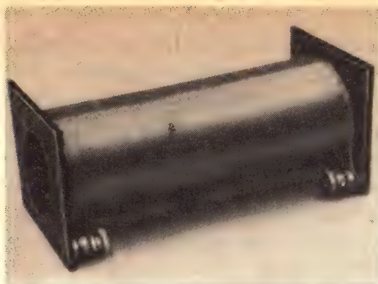
n на 1 м длины, умноженному на длину Δl_3 стороны контура:

$$B\Delta l_3 = \mu_0 n \Delta l_3 I,$$

$$B = \mu_0 n I.$$

Формула для напряженности поля в соленоиде очень проста – напряженность пропорциональна току и линейной плотности обмотки. Обратите внимание, что поле не зависит от полного числа витков в соленоиде, а только от числа витков на единицу длины. Внутри соленоида поле однородно и не зависит от площади его поперечного сечения, пока диаметр соленоида мал по сравнению с его длиной.

Типичный лабораторный соленоид, такой, как приводимый на фотографии, имеет около 10^3 витков на 1 метр. Если через такой соленоид пропустить ток



10 А, напряженность поля внутри него будет равна

$$B = \mu_0 nI =$$
$$= 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^3 \text{ витков/м} \cdot 10 \text{ А} \approx$$
$$\approx 1 \cdot 10^{-2} \text{ Тл} = 100 \text{ Гс}.$$

Это довольно сильное магнитное поле. Оно в 200 раз сильнее земного поля и начинает соперничать с полем, создаваемым хорошим постоянным магнитом. Позже увидим, как из такого соленоида можно сделать значительно более сильный магнит без дополнительных затрат энергии.

КОЛИЧЕСТВЕННЫЙ РАСЧЕТ СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩЕЙ НА ТОК В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Мы уже видели, как выглядит картина линий поля, когда провод с током находится во внешнем магнитном поле. Круговые линии создаваемого током магнитного поля усиливают линии внешнего поля по одну сторону тока и ослабляют по другую. В соответствии с нашей моделью, приписывающей линиям поля упругие свойства, провод будет выталкиваться в область более слабого поля. В случае показанных на этом рисунке направлений напряженности магнитного поля и электрического тока провод будет выталкиваться с силой F влево.

Когда мы только начинали изучать силу магнитного взаимодействия двух параллельных токов, было высказано утверждение, что выводимое из эксперимента уравнение имеет вид

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{r}.$$

На данном этапе нашего рассмотрения мы предполагаем ввести модель магнитного поля, создаваемого одним из токов, с которым другой ток мог бы взаимодействовать. Теперь у нас есть формула для напряженности B магнитного поля, создаваемого длинным прямолинейным проводом, по которому идет ток I_1:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{r}.$$

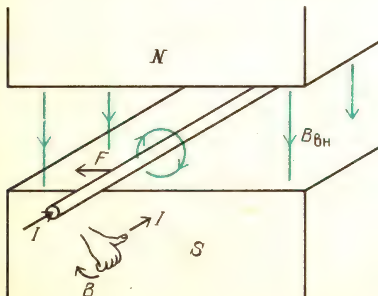
Очевидно, что эта формула как раз представляет собой часть нашей первоначальной формулы для силы взаимодействия двух проводов. Теперь ее можно записать в следующем виде:

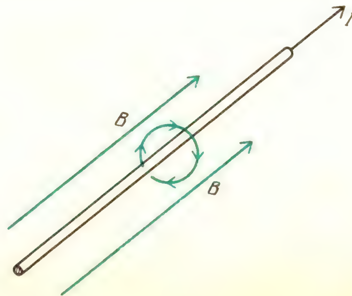
$$\frac{F}{l} = I_2 B.$$

Сила, действующая на направленный *перпендикулярно* к напряженности магнитного поля ток, равна

$$F = IlB.$$

Если ток не перпендикулярен к линиям магнитного поля, эта сила становится меньше. В самом деле, сила обращается в нуль, когда ток параллелен полю. Качественно к этому заключению можно прийти с помощью правила правой руки и нашей модели взаимодействующих полей. На этом рисунке пока-



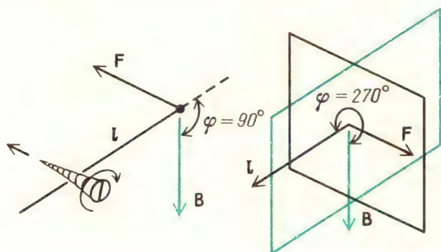


заны линии поля, создаваемого током, который направлен параллельно внешнему полю. Результирующее поле по какую-нибудь одну сторону от провода не сильнее, чем по другую, и поэтому мы не можем ожидать, что к проводу будет приложена какая-то сила.

Количественный способ описания такой геометрической зависимости состоит в использовании векторного произведения. Действующая на ток сила представляет собой вектор, и он пропорционален произведению двух других векторов, **l** и **B**. Окончательная формула для силы, действующей на ток в магнитном поле, имеет вид

$$\mathbf{F} = I(\mathbf{l} \times \mathbf{B}).$$

Взаимное расположение этих векторов показано на рисунке. Сила **F** должна



быть перпендикулярна как напряженности магнитного поля **B**, так и проводу **l**. Направление силы может быть найдено или с помощью правила правого винта для векторного произведения, или обращением к модели линий магнитного поля. Модуль силы равен $F = IlB \sin \varphi$, где φ – угол между линиями поля и проводом. Когда угол $\varphi = 90°$, сила максимальна и имеет направление, которое считается положительным в соответствии с правилом правой руки. Когда $\varphi = 0$, действующая на провод сила равна нулю. Когда $\varphi = 270°$, ток в проводе имеет противоположное по сравнению с первым случаем направление; сила максимальна, но теперь имеет направление, принимаемое за отрицательное.

Посмотрим, какие значения полей и сил создавались вами в опытах с двумя параллельными полосками алюминиевой фольги в «Знакомстве с явлениями». Примем, что замкнутый накоротко сухой элемент обеспечивал ток 5 А и что алюминиевые полоски имели длину 20 см при расстоянии между ними всего 2 мм. Напряженность магнитного поля, создаваемого одной полоской на таком расстоянии от другой, равна

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5 \text{ А}}{2\pi \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}} =$$
$$= 5 \cdot 10^{-4} \text{ Тл} = 5 \text{ Гс}.$$

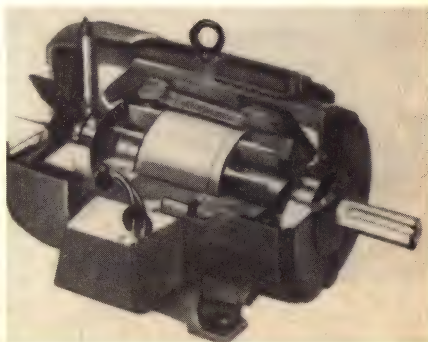
Сила, действующая на второй провод в таком магнитном поле, равна

$$F = IlB \sin \varphi =$$
$$= 5 \text{ А} \cdot 0{,}2 \text{ м} \cdot 5 \cdot 10^{-4} \text{ Тл} \cdot \sin 90° =$$
$$= 5 \cdot 10^{-4} \text{ Н}.$$

Эта сила очень мала; напомним, что масса 1 г имеет вес только $1 \cdot 10^{-2}$ Н. Чтобы обнаружить столь малую силу, нам пришлось воспользоваться легкими и гибкими полосками из алюминиевой фольги.

Реакция алюминиевых полосок при пропускании по ним тока была гораздо сильнее, когда они находились вблизи постоянного магнита. Напряженность магнитного поля вблизи обычного игрушечного магнита может быть между 100 и 1000 Гс. Поэтому при том же токе в 5 А в алюминиевой полоске сила была бы от 20 до 200 раз больше, чем только что рассчитанная сила взаимодействия параллельных полосок.

В электродвигателях используется сила, действующая на токи в магнитном поле. Сами поля обычно создаются электрическими катушками, намотанными на железные сердечники. Результирующие поля составляют обычно от 1 до 1,5 Тл. Здесь показан типичный электродвигатель в разрезе. Поля и обмотки устроены так, чтобы на цен-



тральный ротор действовал по возможности постоянный крутящий момент. Предположим, что в каждом проводе ротора идет ток 6 А. Такой мотор, включенный в сеть напряжением 120 В, развивал бы мощность в 1 л. с.

Вопрос 20-10
Как рассчитать мощность в лошадиных силах, зная ток и напряжение?

Подсчитаем силу, действующую в магнитном поле 1,5 Тл на отдельный провод длиной 20 см, по которому идет ток 6 А. Эта сила равна

$$F = IlB = 6\ \text{А} \cdot 0{,}2\ \text{м} \cdot 1{,}5\ \text{Тл} = 1{,}8\ \text{Н}.$$

Эта сила сама по себе невелика, но двигатель содержит много таких витков.

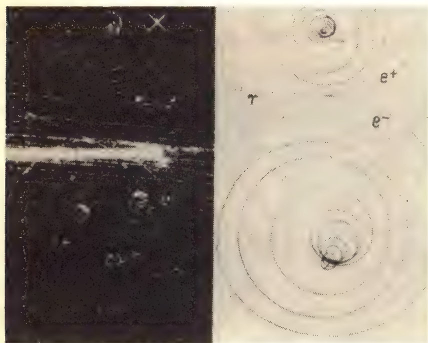
Силу, действующую в магнитном поле на движущийся заряд, можно вывести из формулы для силы, действующей на ток, поскольку ток I равен скорости прохождения заряда $\Delta q/\Delta t$. Так как

$$I\Delta l = (\Delta q/\Delta t)\,\Delta l = \Delta q\,(\Delta l/\Delta t) = qv,$$

то действующая на движущийся заряд магнитная сила равна

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Здесь приведена сделанная в пузырьковой камере фотография позитрона и электрона, движущихся в магнитном поле. Позитрон – это антиэлектрон. Он имеет такую же массу и другие характеристики, как и электрон, но у него положительный заряд. Два электрона – частица и античастица – были порождены гамма-квантом высокой энергии, который пришел слева на этой фотографии. В главе 23 мы узнаем больше о природе этих субатомных частиц. Когда заряженные частицы проносятся сквозь перегретую жидкость, они вызывают ее локальное вскипание, в результате чего образуются треки – следы из пузырьков. Именно эти треки и видны на фотографии. Обратите внимание, что отрицательный электрон двигался по спиральной траектории, которая показывает, что на него действовала сила, направленная вправо. На позитрон в том же самом магнитном поле действовала сила, все время направленная влево. Следовательно, электрон двигался по траектории, закрученной по часовой стрелке, а позитрон – против часовой стрелки.



Рождение пары электрон – позитрон в пузырьковой камере

Поскольку действующая на движущийся заряд магнитная сила всегда перпендикулярна к его скорости, эта сила должна быть центростремительной, стремящейся заставить заряженную частицу двигаться по окружности. Приравняем магнитную силу центростремительной силе, функции которой она выполняет:

$$qvB = mv^2/r.$$

Это уравнение лежит в основе многих различных явлений и приборов в субатомной физике. Например, если сократить скорость в левой и правой частях этого уравнения, найдем, что *импульс* частицы равен

$$mv = qrB.$$

Когда у нас есть возможность увидеть или измерить трек заряженной частицы в магнитном поле, можно определить импульс частицы по измерению радиуса кривизны ее трека. Например, на фотографии электронной пары в пузырьковой камере очевидно, что отрицательный электрон при рождении получил больший импульс, чем позитрон, потому что радиус кривизны его трека больше.

Вопрос 20-11
Однако частицы эти движутся не по окружностям. Они оставляют спиральные треки. Какое заключение можно сделать отсюда относительно импульсов частиц?

Перегруппируем члены в уравнении для центростремительной силы так, чтобы найти из него круговую частоту ω, которая равна v/r:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{q}{m} B.$$

Заряженная частица, движущаяся по окружности в магнитном поле, имеет круговую частоту, которая зависит только от отношения заряда к массе q/m данной частицы и от напряженности B магнитного поля. Эта частота не зависит от энергии частицы или от радиуса ее орбиты. Частота орбитального движения не зависит от скорости частицы или от радиуса кривизны ее траектории, потому что скорость и радиус кривизны пропорциональны друг другу. Когда у частицы большая скорость, радиус кривизны ее траектории тоже будет большим, поэтому время одного оборота по круговой траектории будет таким же, как и в случае малых значений скорости и радиуса орбиты.

Принцип действия ускорителя заряженных частиц, называемого циклотроном, основан на том, что круговая частота заряженной частицы в магнитном поле не зависит от ее скорости или радиуса ее орбиты. «Циклотронная» частота равна

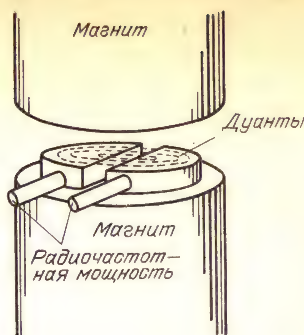
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{q}{m} B.$$

Подсчитаем частоту обращения протона по окружности, когда он находится в магнитном поле 1,5 Тл:

$$f = \frac{1}{2\pi}\frac{1{,}6\cdot 10^{-19}\ \text{Кл}}{1{,}7\cdot 10^{-27}\ \text{кг}}\cdot 1{,}5\ \text{Тл} = $$
$$= 2{,}3\cdot 10^{7}\ \text{Гц}.$$

Эта частота лежит в промежутке между частотами, используемыми в АМ-радиовещании (1 мегацикл в секунду, или $1\cdot 10^6$ Гц) и ЧМ-диапазоном ($90\cdot 10^6$ Гц).

Схема основных рабочих узлов циклотрона показана на рисунке. В зазоре магнита расположена вакуумная камера. Очень небольшое количество газообразного водорода втекает в камеру вблизи ее центра. Этот газ бомбардируется электронами и ионизируется, так что получаются голые протоны наряду



с молекулярными ионами. Тем временем два «дуанта» питаются с циклотронной частотой от устройства, равнозначного радиостанции, находящейся рядом с этом машиной. Образовавшийся положительно заряженный протон притягивается в направлении отрицательного дуанта. В магнитном поле протон будет двигаться по окружности. Пока он находится внутри дуанта, он электростатически экранирован от любых линий электрических полей (но не от линий магнитного поля). Протон просто движется равномерно по полуокружности, пока не попадает в зазор между дуантами. Если к этому моменту другой дуант стал отрицательным, протон в зазоре будет ускоряться, набирая энергию. Радиус его орбиты теперь будет больше. Но когда протон находится внутри дуанта, изменяющееся электрическое поле на него не действует, и он будет двигаться по инерции, описывая полуокружность, пока снова не выйдет в зазор. Если потенциал в зазоре изменяется с циклотронной частотой, протон будет каждый раз прибывать к зазору в нужное время, чтобы перед ним находилась отрицательная область, и поэтому он будет ускоряться. При каждом прохождении зазора его энергия возрастает на величину, равную произведению его заряда и разности потенциалов на зазоре. Вместе с энергией продолжает нарастать радиус его орбиты, пока наконец он не достигает боковых поверхностей вакуумной камеры. Там протон либо попадает в мишень, либо выводится на внешние мишени или детекторы.

В типичном циклотроне каждый протон набирает энергию около 10 000 эВ

за каждый оборот. После тысячи оборотов энергия протона становится равной 10 МэВ. Циклотроны таких размеров были очень распространены в конце 1930-х годов. При строительстве машин этого типа на еще бо́льшие энергии возникает проблема. По мере увеличения скорости протона его эффективная масса возрастает.

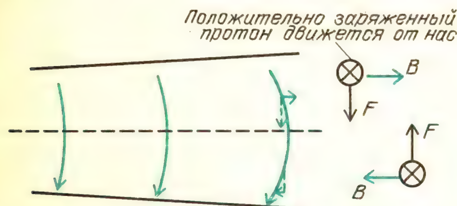
Вопрос 20-12

Почему возрастание массы протона должно сказываться на работе циклотрона?

Дополнительный материал

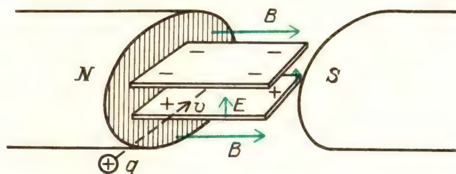
Хотя обычные циклотроны для научных исследований уже больше не строят, одна из проблем их конструирования является общей для всех ускорителей заряженных частиц. На пути заряженных частиц должны быть созданы магнитные или электрические поля, чтобы не дать частицам сойти с расчетной орбиты. В качестве примера проблемы такого рода, эффектного, но в сущности тривиального, примем во внимание, что пучку протонов в некоторых больших машинах требуется около 1 с для разгона. В течение одной секунды протон, как и любое тело, находящееся в земном гравитационном поле, упал бы на 5 м. Ясно, что нужна некоторая фокусирующая сила, которая удерживала бы протоны от падения. В действительности действуют гораздо бо́льшие силы, стремящиеся столкнуть протоны вверх, вниз или в стороны. Фокусирующие силы должны быть достаточно мощными, чтобы удерживать пучок на узкой дорожке.

На рисунке показано, как можно создать эти фокусирующие силы. Существенно, чтобы внешнее магнитное поле не было всюду вертикальным и одинаковым по напряженности. Вместо этого магнитное поле должно слегка ослабляться с увеличением радиуса, так чтобы линии поля немного искривлялись, как это показано на рисунке. Если протон окажется над средней плоскостью, он будет тогда взаимодействовать с небольшой горизонтальной составляющей напряженности внешнего магнитного поля, которая создает действующую на протон силу, направленную вниз. Если протон окажется ниже средней плоскости, эта горизонтальная составляющая напряженности внешнего поля направлена в противоположную сторону и поэтому будет действовать на него с силой, направленной вверх. Во всех типах ускорителей частиц, включая медицинский рентгеновский аппарат и электронный прожектор в вашей телевизионной трубке, электрические и магнитные поля рассчитаны так, чтобы сфокусировать пучок подобно тому, как стеклянные линзы фокусируют пучки света.



Горизонтальная составляющая поля B над средней плоскостью направлена наружу, возникает сила, действующая на протон вниз. Та же составляющая поля B под средней плоскостью направлена внутрь, возникает сила, действующая на протон вверх

Одна полезная комбинация электрического и магнитного полей обеспечивает способ выделения частиц с определенной скоростью. Направьте пучок частиц сквозь скрещенные электрическое и магнитное поля, как показано на рисунке. При такой ориентации полей



Траектория частицы прямолинейна, если действующие на частицу силы уравновешены: $qE = qvB$.

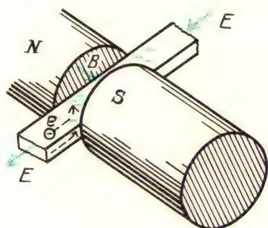
электростатическая сила направлена вверх и магнитная сила – вниз. Если эти две силы в точности равны по модулю, частицы будут продолжать двигаться прямолинейно. Действующие на частицы уравновешенные силы равны

$$qE = qvB.$$

Этому условию удовлетворяют только частицы с некоторой определенной скоростью. Независимо от модуля заряда

или массы частицы будут продолжать прямолинейное движение, если $v = E/B$.

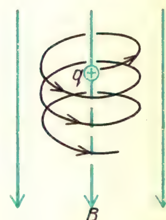
Если скрещенные электрическое и магнитное поля созданы в *проводнике*, носители заряда в общем будут дрейфовать в направлении, определяемом электрическим полем, но на них также будет действовать слабая сила, обусловленная магнитным полем. Она стремится сосредоточить их у одной из поверхностей проводника. Такое расположение для носителей отрицательного заряда показано на рисунке. Избыточная концентрация зарядов у верхней поверхности



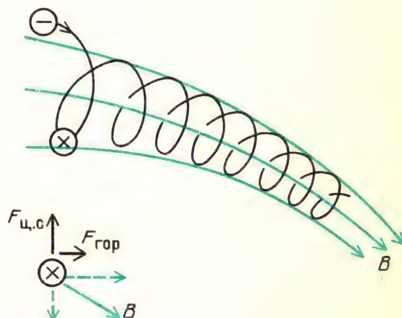
создает небольшую разность потенциалов в толще проводника. Знак этой разности потенциалов зависит от того, отрицательны или положительны носители заряда. Если на носители отрицательного заряда, дрейфующие вправо, действует магнитная сила, заставляющая их поворачивать вверх, так что они концентрируются у верхней поверхности, то на положительные заряды, дрейфующие влево в том же электрическом поле, действовала бы магнитная сила, которая стремилась бы повернуть их тоже вверх. Поэтому если носители заряда отрицательны, как это бывает в металлах, верхняя поверхность образца стала бы *отрицательной* по отношению к нижней поверхности. Если носители заряда положительны, как это бывает в некоторых полупроводниках, верхняя поверхность образца была бы *положительной* по отношению к нижней поверхности. Эта разность потенциалов зависит также от плотности носителей заряда и, следовательно, от числа носителей, поставляемых одним атомом. Эксперименты показывают, что каждый атом меди или лития, или натрия поставляет точно по одному электрону, но у алюминия вклад дают три электрона на атом. Описанное явление (и связанная с ним экспериментальная техника) носит название *эффекта Холла* по имени его первооткрывателя.

Раньше мы говорили, что траектория заряженной частицы, движущейся с постоянной скоростью в однородном магнитном поле, представляет собой окружность. В действительности это имеет место лишь тогда, когда начальная скорость частицы лежит в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю. Если у начальной скорости есть также составляющая вдоль линий магнитного поля, частица будет двигаться по винтовой линии, как показано на первом рисунке.

Частица с зарядом $+q$ имеет направленную вниз составляющую начальной скорости



Удивительная ситуация возникает, когда линии магнитного поля искривлены. Как можно видеть на втором рисунке, изменение направления линий поля означает, что появляется составляющая напряженности магнитного поля, перпендикулярная к ее первоначальному



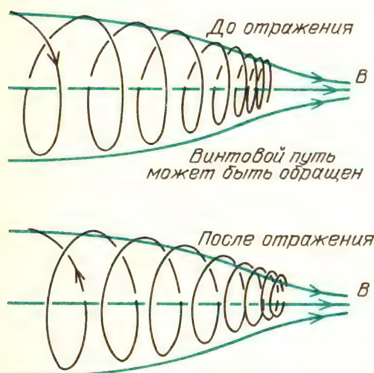
На электрон с показанными здесь положением и направлением движения будет действовать направленная вверх центростремительная сила, обусловленная большой (горизонтальной) составляющей поля B, а также направленная вправо горизонтальная сила, обусловленная малой (вертикальной) составляющей поля B

направлению. Заряженная частица будет реагировать на эту составляющую так,

как показано на рисунке. Результирующие силы изменяют направление оси винтовой траектории так, что она следует за изгибами линий магнитного поля. Именно благодаря этому эффекту протоны и электроны «навиваются» на линии магнитного поля Земли далеко за пределами атмосферы. Такие области называются *радиационными поясами* Ван Аллена.

Если бы не еще один эффект, движущиеся по винтовым линиям частицы входили бы в атмосферу вместе с линиями магнитного поля в областях вблизи северного и южного магнитных полюсов.

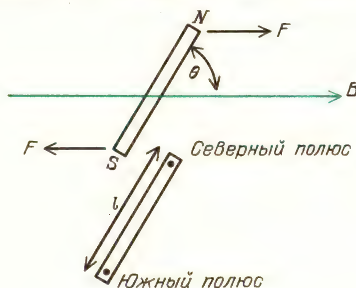
И на самом деле многие частицы входят вдоль этих линий, вызывая полярные сияния, которые можно видеть в северных и южных высоких широтах. Но многие другие частицы имеют импульс в таких диапазонах, что они отражаются от областей более сильных магнитных полей вблизи полюсов, прежде чем войдут в атмосферу. Когда захваченная таким образом частица входит в область более сильного поля вблизи полюсов, наклон ее винтовой траектории уменьшается и затем изменяется на противоположный, так что она начинает двигаться по винтовой



линии в обратную сторону. Частицы на таких орбитах остаются захваченными магнитными полями в течение многих проходов. В конце концов они рассеиваются из-за столкновений с другими частицами. Но их число непрерывно восполняется протонами и электронами, выбрасываемыми из Солнца.

МОМЕНТ СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ЗАМКНУТЫЙ ПРОВОД

В однородном магнитном поле на магнитный диполь, такой как стрелка компаса, не действует никакой результирующей силы. Сила, действующая в одном направлении на ее северный полюс, уравновешивается силой, действующей в противоположном направлении на южный полюс. Однако, как показано на рисунке, на диполь дей-



ствует *вращающий момент* сил. По аналогии с формулой для дипольного момента электрического диполя, *магнитный момент* стрелки компаса можно было бы определить как $p_м = lm$, если бы мы знали «заряд полюса» m и могли измерить расстояние между полюсами l. В действительности это уравнение может служить *определением* «заряда полюса». Мы можем приписать смысл и числовое значение этой величине, измеряя вращающий момент сил, действующих на стержневой магнит в известном магнитном поле. Как видно из рисунка, этот вращающий момент сил равен $M = lmB \sin\theta$. Заметьте, что вращающий момент максимален, когда стрелка перпендикулярна к линиям поля, и обращается в нуль, когда стрелка направлена вдоль них.

Хотя в случае стрелки компаса мы определили магнитный дипольный момент через произведение «заряда полюса» на длину стрелки, в действительности измеряемой на опыте физической величиной является как раз сам магнитный момент. Полюса нельзя уединить, и, как мы видели, они занимают протяженные области, так что расстояние между полюсами нельзя рассматривать как вполне определенную величину. Наиболее общее и точное выражение

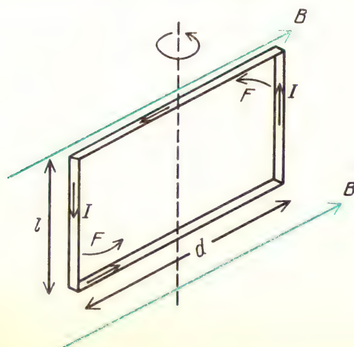
для действующего на магнитный диполь вращающего момента сил имеет вид

$$\mathbf{M} = \mathbf{p}_м \times \mathbf{B}.$$

Вращающий момент сил равен векторному произведению магнитного момента и напряженности магнитного поля. В соответствии с характером векторного произведения модуль вращающего момента сил пропорционален синусу угла между магнитным моментом и напряженностью поля. Более того, направление вращающего момента сил перпендикулярно к оси диполя в духе правила правой руки.

Раз уж мы знаем, что магнитные *полюсы* не существуют, как объяснить существование магнитных *диполей*? Мы уже видели, что напряженность магнитного поля, создаваемая круговым током, в точках на оси контура убывает обратно пропорционально третьей степени расстояния от контура. Напряженность поля на продолжении оси диполя имеет такую же функциональную зависимость от расстояния. Фактически формулы для контура с током и для диполя будут одинаковы, если мы припишем значение IS магнитному моменту контура. Тогда, быть может, все магнитные диполи создаются замкнутыми токами. Однако для большей убедительности изучим и другую сторону этого взаимодействия. Будет ли контур с током в однородном магнитном поле вести себя подобно магнитному диполю?

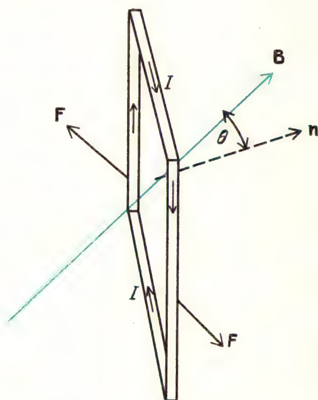
Проще всего рассчитать действие магнитного поля на контур с током, если сделать этот контур прямоугольным, как показано на рисунке. Когда линии магнитного поля лежат в плоскости



прямоугольника, на токи в верхней и нижней его сторонах никакие силы не действуют, поскольку эти токи параллельны или антипараллельны линиям магнитного поля. Действующая на левый провод сила направлена к нам, а на правый провод — от нас, за чертеж, в результате чего создается вращающий момент сил:

$$M = 2 \cdot \text{сила на каждый вертикальный провод} \cdot \text{плечо} = 2BIld/2 = BIS.$$

При повороте прямоугольной рамки отличные от нуля силы будут действовать на ее верхний и нижний провода. Эти силы имеют противоположные направления и стремятся деформировать, а не повернуть рамку. Между тем силы, действующие на токи в боковых проводах, всегда перпендикулярны к токам и к полю. Составляющая силы, перпендикулярная к плечу, пропорциональна $\sin\theta$, как показано на рисунке. Поэтому вращающий момент сил обращается

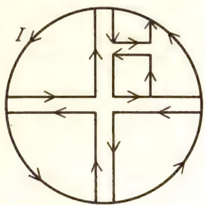


в нуль, когда θ обращается в нуль и рамка встает своей плоскостью перпендикулярно к линиям поля. Если приписать площади контура направление, как мы это делали раньше, то действующий на прямоугольную рамку с током вращающий момент сил можно выразить как векторное произведение:

$$\mathbf{M} = I(\mathbf{S} \times \mathbf{B}).$$

Это выражение для вращающего момента сил, полученное в частном случае прямоугольной геометрии контура с током, можно обобщить, если принять по

определению магнитный момент *любого* плоского замкнутого контура равным произведению тока и площади контура. Такое определение согласуется с тем, что мы уже использовали при описании магнитного поля, *создаваемого* замкнутым контуром с током. На приводимом рисунке показано некоторое оправдание для сделанного обобщения от



случая прямоугольной рамки на любой замкнутый контур с током. Действующий на любой подобный контур вращающий момент сил равен

$$\mathbf{M} = \mathbf{p}_м \times \mathbf{B}, \text{ где } \mathbf{p}_м = I\mathbf{n}S = I\mathbf{S}.$$

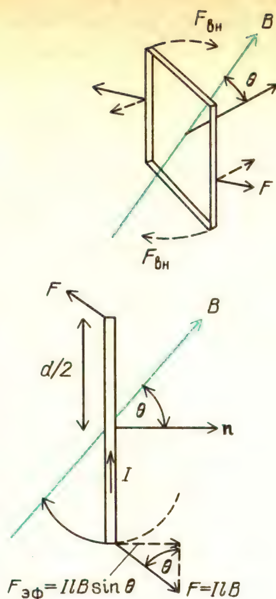
Замкнутый контур с током создает магнитное поле, которое ведет себя как магнитное поле диполя. На контур с током в магнитном поле действует также вращающий момент сил, как если бы это был диполь.

Рассмотрим еще одну черту поведения диполей в полях. Когда стрелка компаса или контур с током ориентируются под действием магнитного поля, их потенциальная энергия в поле минимальна. Какая энергия требуется, чтобы повернуть диполь на 90° в положение, где вращающий момент сил максимален, или на 180°, когда диполь становится антипараллелен полю? Сделаем приближенный расчет.

Работа равна скалярному произведению силы и перемещения. В случае прямоугольной рамки, поворачиваемой вокруг оси, на каждый из ее боковых проводов действует постоянная сила, равная IlB. Если бы эта сила совпадала с направлением движения провода, работа, которую необходимо было бы совершить для передвижения каждого провода на 1/4 длины окружности (90°), была бы равна

$$\text{сила} \cdot \text{перемещение} = IlB(1/4) \cdot 2\pi d/2.$$

Работа, совершаемая при повороте



Здесь показана сила, действующая на прямоугольную рамку с током в магнитном поле. Для поворота рамки должна совершаться работа приложением внешних сил, уравновешивающих F.

всей прямоугольной рамки, была бы равна

$$2IlB(\pi/4)\,d = (\pi/2)\,ISB = (\pi/2)\,p_м B.$$

В действительности работа, которую требуется совершить для поворота прямоугольной рамки на 90°, меньше этой величины, потому что проекция силы на направление движения равна $F_{эф} = F\sin\theta$. В начале движения эффективная сила в направлении движения мала и достигает максимального значения при $\theta = 90°$. Работа, которую требуется совершить для поворота диполя на 90°, равна $p_м B$ (сравните с полученным нами приближенным значением $(\pi/2)\,p_м B$).

Потенциальная энергия диполя в магнитном поле определяется как

$$W_{пот} = -\mathbf{p}_м \cdot \mathbf{B}.$$

В соответствии с этим определением энергия диполя равна нулю, когда ось контура перпендикулярна к магнитному полю. (Можно, конечно, выбрать нуль потенциальной энергии в любой желаемой точке.) В этом перпендикулярном направлении на диполь действует максимальный вращающий момент сил. Когда диполь ориентирован вдоль поля, $\theta = 0°$ и потенциальная энергия отрицательна.

Вопрос 20-13
Какой физический смысл имеет отрицательная потенциальная энергия?

Найдем вращающий момент сил и потенциальную энергию для реальной катушки в магнитном поле. Нельзя ли, например, ток, полученный от сухого элемента, пропустить через катушку и посмотреть, будет ли она вести себя подобно стрелке компаса в земном магнитном поле? Если диаметр катушки 4 см, она имеет площадь порядка 10 см^2. Сделав катушку из 10 витков и подсоединив ее к сухому элементу, получим ток около 5 А. Каждый виток обладает магнитным моментом, равным IS. Поэтому магнитный момент катушки из N витков равен $p_м = NIS =$ $= 10\,витков \cdot 5\,А \cdot 10^{-3}\,м^2 = 5 \cdot 10^{-2}\,А \cdot м^2$. В магнитном поле Земли максимальный вращающий момент, действующий на эту катушку, был бы равен

$$M = p_м B \sin 90^\circ = 5 \cdot 10^{-2}\ А \cdot м^2 \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-4}\ Тл = 1 \cdot 10^{-6}\ Н \cdot м.$$

Это очень слабый вращающий момент.

Вопрос 20-14
Какими по порядку величины должны быть силы, действующие на каждую сторону катушки, чтобы создать такой вращающий момент?

Отклонение такой катушки в земном поле может быть обнаружено только при условии, что она подвешена на очень тонком и гибком проводе. Разность потенциальных энергий между направлением вдоль поля и 90-градусной ориентацией равна

$$\Delta W_{пот} = \mathbf{p}_м \cdot \mathbf{B} = 5 \cdot 10^{-2}\ А \cdot м^2 \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-4}\ Тл = 1 \cdot 10^{-6}\ Дж.$$

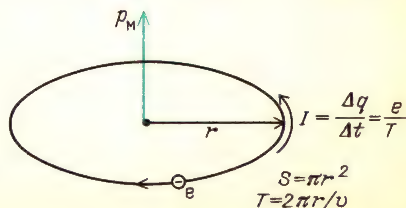
Столько энергии требуется, чтобы поднять массу 0,1 г на 1 мм в гравитационном поле Земли? Существует способ многократного увеличения магнитной эффективности такой катушки. В следующем разделе мы увидим, что можно получить сильные электромагниты, наматывая катушки на железные сердечники.

МАГНИТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ВЕЩЕСТВЕ

На протяжении всей главы мы говорили, что магнитные полюсы не существуют. Замкнутые контуры с током или соленоиды могут дублировать действие постоянных стержневых магнитов как в отношении создаваемых ими полей, так и в отношении действующих на них вращающих моментов. Должны ли мы из этого заключить, что в магнитах из железа имеются вечные электрические токи, циркулирующие таким образом, что получаются катушки или соленоиды без источников энергии? Если это так, то почему такие токи устанавливаются в железе и некоторых других элементах, но не в большинстве материалов? И опять мы должны обратиться к модели микроструктуры вещества, чтобы объяснить это явление природы.

В веществе на самом деле существуют вечные токи. В каждом атоме электроны движутся вокруг центрального ядра. Старая модель, согласно которой электроны движутся по орбитам вокруг ядра подобно планетам вокруг Солнца, имеет ограниченную применимость и в некоторых отношениях совершенно неверна. Тем не менее каждый раз, когда движение электрона характеризуется наличием момента импульса, разумно ожидать, что должен возникать магнитный момент. Рассчитаем соотношение между моментом импульса заряженной частицы и ожидаемым магнитным моментом.

Магнитный момент замкнутого контура с током равен $p_м = IS$. Когда электрон с зарядом e описывает круговую траекторию с периодом T, создаваемый им ток равен e/T. Период обращения ра-



вен длине окружности, деленной на скорость: $T = 2\pi r/v$. Поэтому создаваемый электроном магнитный момент должен быть равен

$$IS = \frac{evS}{2\pi r} = \frac{ev\pi r^2}{2\pi r} = \frac{evr}{2}.$$

Момент импульса электрона относительно оси равен $L = m_e vr$. Если умножить числитель и знаменатель выражения для магнитного момента на массу электрона, то придем к формуле для магнитного момента, содержащей момент импульса электрона:

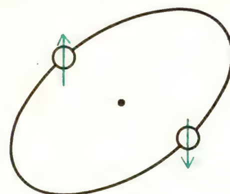
$$p_м = \frac{em_e vr}{2m_e} = \frac{e}{2m_e} L.$$

Электроны в атомах обладают моментом импульса благодаря двум различным движениям: одно соответствует орбитальному движению вокруг центрального ядра, а другое – спину, т. е. кажущемуся вращению электрона вокруг собственной оси. Оба типа момента импульса квантуются: момент импульса может изменяться только на величину, равную целому числу основных единиц момента импульса. Эта ситуация впервые рассматривалась на с. 178 в главе 8. Основная единица момента импульса представляет собой постоянную Планка, числовое значение которой равно $\hbar = 1{,}054 \cdot 10^{-34}$ Дж·с. Хотя некоторые орбитальные движения электрона могут характеризоваться моментом импульса в несколько таких единиц, по *порядку величины* магнитный момент любого электрона, создаваемый либо благодаря его спину, либо благодаря орбитальному движению, будет равен

$$p_м = \frac{e}{2m_e} L = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл}}{2 \cdot 9 \cdot 10^{-31}\ \text{кг}} \cdot 1 \cdot 10^{-34}\ \text{Дж} \cdot \text{с} \approx$$

$$\approx 10^{-23}\ \text{А} \cdot \text{м}^2.$$

Очевидно, что каждый электрон обладает лишь очень малым магнитным моментом, даже если у него будут две или три единицы орбитального момента импульса плюс спиновый момент импульса. И все же, если бы все эти магнитные моменты были ориентированы одинаково у всех электронов, любой кусочек вещества, как мы увидим, был бы очень сильным магнитом. В действительности большинство этих магнитных моментов взаимно компенсируются. Строение атомов подчиняется *принципу запрета* Паули, который, помимо прочего, требует, чтобы большинство электронов находилось в пáрах с противоположными характеристиками. Если два электрона находятся



Магнитные моменты большинства электронных пар скомпенсированы

в одной и той же общей области, спин одного из них будет направлен противоположно спину другого, и поэтому спиновые моменты импульса будут скомпенсированы. На первый взгляд мы могли бы ожидать, что любой атом с четным числом электронов вовсе не имел бы магнитного момента. Однако это не так; у железа 26 электронов. Можно также ожидать, что магнитные свойства атома будут зависеть от того, находятся ли атомы в свободном состоянии в газе или связаны с другими атомами в твердом теле. У свободного атома может быть валентный электрон, спиновый момент импульса которого не скомпенсирован парным электроном. В твердом теле валентный электрон такого атома обычно входит в состояние, осуществляющее химическую связь, где он находится в паре с другим электроном, что приводит к компенсации магнитных моментов каждого. И на самом деле магнитные свойства в сильной степени зависят от того, как атомы соединены друг с другом.

Несмотря на компенсацию большинства атомных моментов импульса, у многих веществ остается магнитный момент на атом, равный рассчитанной нами основной единице: приблизительно 10^{-23} А·м². Предположим, что магнитные моменты одного моля таких атомов ориентированы одинаково.

Моль большинства атомов в твердом состоянии занимает объем размерами с карандаш.

Вопрос 20-15
Моль ($6\cdot10^{23}$) атомов алюминия имеет массу 27 г. Плотность алюминия равна $2{,}7\cdot10^3$ кг/м^3. Будет ли объем одного моля атомов алюминия примерно равен объему толстого карандаша?

Полный магнитный момент моля атомов, каждый из которых обладает магнитным моментом 10^{-23} А·м^2, равен

$$p_м = 6\cdot10^{23}\ \text{атомов}\cdot10^{-23}\ \text{А}\cdot\text{м}^2/\text{атом} = 6\ \text{А}\cdot\text{м}^2.$$

Сравните этот магнитный момент со значением, которое мы рассчитали на с. 245 для катушки из 10 витков с площадью 10 см^2, по которой идет ток 5 А. Магнитный момент твердого стержня был бы более чем в 100 раз больше. В самом деле, величина 6 А·м^2 примерно равна магнитному моменту намагниченного *железного* стержня такого размера. Но только железо, кобальт, никель и некоторые их сплавы ведут себя подобным образом. Почему же магнитные моменты атомов других элементов не выстраиваются в одном направлении?

Атомы в твердом теле непрерывно подвергаются тепловому возбуждению. Сравним выигрыш в потенциальной энергии, который атом может получить, ориентируясь в магнитном поле, со средней энергией его теплового движения, стремящегося нарушить эту ориентацию. Если бы атом, обладающий магнитным моментом в одну единицу, перевернулся на 180° из антипараллельной в параллельную внешнему полю в 1 Тл ориентацию, его потенциальная энергия уменьшилась бы на

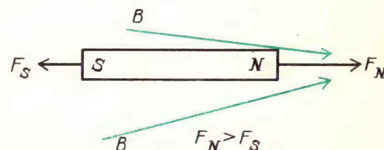
$$\Delta W_м = -2p_м B = -2\cdot10^{-23}\ \text{А}\cdot\text{м}^2\cdot1\ \text{Тл} = -2\cdot10^{-23}\ \text{Дж}.$$

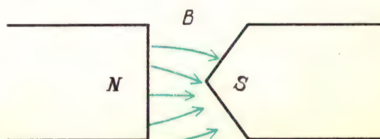
Средняя энергия теплового движения такого атома при комнатной температуре равна

$$W_т = (3/2)kT = (3/2)\cdot1{,}38\cdot10^{-23}\ \text{Дж/К}\cdot300\ \text{К} = 6\cdot10^{-21}\ \text{Дж}.$$

Каждая из этих энергий мала по сравнению с энергией связи валентного электрона в атоме, имеющей порядок величины 1 эВ $= 1{,}6\cdot10^{-19}$ Дж. Но средняя тепловая энергия атома в 300 раз больше максимальной энергии, которую может получить атом, выстраиваясь вдоль магнитного поля даже при напряженности, достигающей 1 Тл. Даже тогда, когда вещество состоит из атомов, обладающих собственными магнитными моментами, хаотическое тепловое возбуждение разрушило бы большую часть выстраивания. Фактически мы теперь должны совсем иначе ставить этот вопрос. Вместо того чтобы спрашивать, почему алюминий не обладает сильным магнетизмом, мы должны выяснить, почему им обладает железо. Однако прежде дадим характеристику очень слабого магнетизма, проявляющегося у большинства веществ.

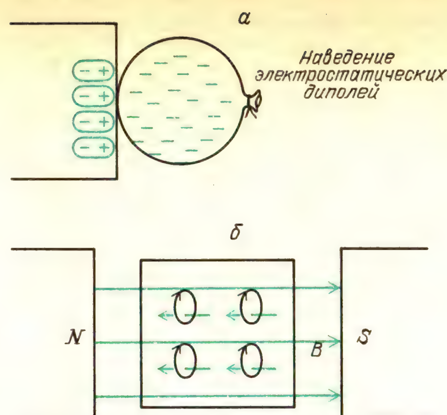
В однородном магнитном поле постоянный магнит будет поворачиваться, пока не установится вдоль поля. Так же будет вести себя и стержень из ненамагниченного железа и из многих других материалов, хотя крутящие моменты будут очень слабыми – за исключением железа, кобальта, никеля и некоторых их сплавов. Еще более интересный магнитный эффект вызывается *неоднородным* магнитным полем, таким, как показано на рисунке. Если в такое поле поместить магнитный диполь, он будет не только поворачиваться, но будет также двигаться вдоль линий поля.





Вопрос 20-16

Почему диполь будет двигаться вдоль линий магнитного поля? Разве сила притяжения, действующая на его северный полюс, не будет уравновешена силой, действующей на южный полюс в противоположном направлении?



Индуцированные электронные токи создают магнитные диполи, направленные противоположно внешнему магнитному полю (*б*)

Если в таком магнитном поле подвесить кусок железа, он сильно отклонится в направлении более сильного поля, независимо от того, будет ли это железо постоянным магнитом или нет. Такой эффект характерен для *ферромагнетизма.* Многие другие вещества, такие как хром, марганец, палладий, тоже будут втягиваться в область сильного поля, но действующая на такие вещества сила будет примерно в 100 раз меньше силы, действующей на железо. Вещества, в которых проявляется этот очень слабый магнитный эффект, называются *парамагнитными.*

Весьма удивительно, что некоторые вещества, такие как мышьяк, ртуть и серебро, в действительности движутся в область более *слабого* поля. Они ведут себя так, как будто атомные диполи предпочитают ориентироваться противоположно внешнему полю. Этот эффект называется *диамагнетизмом.* Диамагнетизм является индукционным эффектом, но в одном отношении он решающим образом отличается от электростатической индукции. Вспомните, каким образом заряженный воздушный шар прилипает к стене из-за электростатической индукции (рис. *а*). Электростатическое поле индуцирует диполи у молекул, входящих в состав стены. Распределение зарядов в молекулах искажается так, что центры положительных и отрицательных зарядов оказываются разделенными. Это искажение пропорционально напряженности внешнего электрического поля.

Подобным же способом при наложении магнитного поля на любое вещество его влиянию подвергаются траектории электронов. Как мы видели, на заряженную частицу, движущуюся в магнитном поле, действует некоторая сила. Возникающая в результате перестройка траекторий электронов приводит к появлению магнитного дипольного момента, пропорционального напряженности внешнего поля. Однако моменты таких индуцированных диполей направлены *навстречу* этому полю (рис. *б*). Диамагнитный эффект имеет место во *всех* веществах, в каком бы состоянии они не находились – газообразном, жидком или твердом. Этот эффект, однако, очень мал и маскируется, если атом обладает постоянным магнитным моментом, обусловленным орбитальным или спиновым движением одного из своих электронов. В главе 21 мы узнаем о том, как электромагнитная индукция приводит к появлению диполей, магнитные моменты которых направлены противоположно создающему их полю.

Ниже приведены значения параметра, известного как *магнитная восприимчивость* χ, различных веществ при комнатной температуре. Произведение магнитной восприимчивости на напряженность внешнего магнитного поля (деленное на μ_0) дает магнитный дипольный момент единицы объема вещества. Значения этого параметра могут служить нам для сравнения реакции различных веществ на воздействие магнитного поля. Обратите внимание, что восприимчивость железа лежит в диапазоне от 1000 до 10 000. По сравнению с ферромагнетизмом диамагнитные и парамагнитные эффекты представляются крайне слабыми.

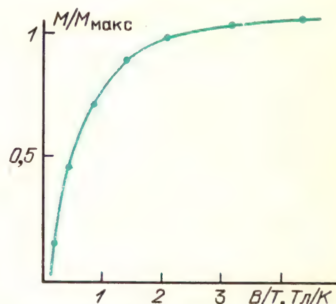
Магнитная восприимчивость различных веществ

	Вещество	χ, 10^{-5}
Парамагнетики	кислород (жидкий при −183 °С)	150
	газообразный кислород (20 °С)	0,2
	алюминий	2
	натрий	0,7
	железо-аммониевые квасцы (используемые для магнитного охлаждения вблизи абсолютного нуля)	4800
	марганец	90
	хром	30
	палладий	80
Диамагнетики	висмут	−17
	ртуть (жидкая)	−3
	серебро	−2,6
	свинец	−1,8
	медь	−1,0
	мышьяк	−2
Ферромагнетики	железо кобальт никель	до 10 000 в зависимости от начальной намагниченности

Диамагнитные свойства подвержены влиянию температуры незначительно, поскольку диполи индуцируются внешним полем и не скреплены жестко с отдельными атомами. Дипольные моменты не зависят от того, что атомы испытывают толчки из-за теплового движения. Движения электронов автоматически подстраиваются так, чтобы противодействовать внешнему полю.

В случае как диамагнетизма, так и парамагнетизма результирующий магнитный момент вещества приблизительно пропорционален напряженности внешнего поля. Для диамагнетизма это верно потому, что дипольные моменты отдельных диполей пропорциональны индуцирующему их полю. В случае парамагнетизма каждый атом обладает собственным магнитным моментом, который не зависит от напряженности внешнего поля. Однако степень, в которой отдельные магнитные моменты выстраиваются по полю, зависит от конкуренции между внешним магнитным полем и тепловым движением.

Здесь показан типичный график зависимости намагниченности от температуры. Этот график известен как кривая Кюри, названная так в честь Пьера Кюри, в 1880-х и 1890-х годах заложившего основы как экспериментальных исследований магнетизма, так и связанной с ними классической теории; это было еще до того, как Кюри стал помогать своей жене в открытии радия. Обратите внимание, что единицы, отложенные по горизонтальной оси, — это тесла на кельвин. При комнатной температуре



Кривая Кюри для парамагнитной соли. Заметьте, что в сильном поле в 1 Тл при комнатной температуре отношение $B/T = 1/300$. В этой точке отношение $M/M_{макс}$ очень мало — лишь малая часть магнитных диполей выстроена

в сильном магнитном поле в 1 Тл горизонтальная координата данных была бы при значении 1/300. Чтобы достичь точки 1 на горизонтальной оси, нам нужно было бы использовать магнитное поле в 1 Тл при температуре 1 К либо в 300 Тл при 300 К. По вертикальной оси отложена намагниченность, создаваемая в веществе, деленная на максимально возможную намагниченность. Максимальная намагниченность имела бы место тогда, когда все дипольные моменты были бы выстроены в одном направлении; поэтому кривая показывает степень выстраивания отдельных атомных диполей.

ФЕРРОМАГНЕТИЗМ

До сих пор мы приводили аргументы, свидетельствующие о том, что вещества не могут обладать сильными магнитными свойствами. Большинство внутренних магнитных диполей в атоме, обусловленных орбитальным или спиновым движением электронов, компен-

сируют друг друга. Даже когда у каждого атома остается небольшой результирующий магнитный момент, выигрыш в энергии, который мог бы получиться при ориентации магнитного момента вдоль внешнего магнитного поля, значительно меньше тепловой энергии, вызывающей хаотические ориентации. Выигрыш во взаимной энергии при выстраивании в одном направлении со своими ближайшими соседями оказывается еще меньше. И тем не менее железо, кобальт, никель и некоторые их сплавы очень восприимчивы к действию внешних магнитных полей и даже впоследствии сохраняют выстраивание атомных диполей, становясь постоянными магнитами. Посмотрим, в чем же заключаются особенности железа, кобальта и никеля – и наиболее детально – железа.

Ниже показано заполнение электронных состояний в атоме железа. Всего в нем имеется 26 электронов, большинство из которых заполняет оболочки в спаренном состоянии. Внутренняя оболочка, обозначенная $n = 1$, сферически симметрична и содержит два электрона. Эти электроны не имеют орбитального момента импульса, а их спины направлены в противоположные стороны, так что спиновые магнитные моменты тоже скомпенсированы. В следующей оболочке, обозначенной $n = 2$, может находиться восемь электронов. Из них два занимают сферическую оболочку большего радиуса, но с нулевым моментом импульса, подобно электронам оболочки с $n = 1$. Имеется еще три других, несферических состояния примерно такого же радиуса и энергии, в каждом из которых содержится по два электрона. Хотя каждый электрон в этих несферических состояниях обладает моментом импульса в 1 единицу, все моменты импульса, включая и спиновые, компенсируются вследствие определенного взаимного расположения и спаривания электронов. В следующей оболочке, обозначенной $n = 3$, может находиться 18 электронов: 2 с нулевым моментом импульса, 6 с моментом импульса в 1 единицу и 10 с моментом импульса в 2 единицы. Поскольку у атома железа только 26 электронов, а на трех заполненных оболочках может содержаться 28, может показаться, что у железа должно быть два свободных места в оболочке с $n = 3$ и тем самым валентность -2. Вместо этого два электрона атома железа располагаются в оболочке с $n = 4$, обеспечивая таким образом положительную валентность. В то же время во внешних областях оболочки с $n = 3$ имеется шесть электронов, которые заэкранированы от химических взаимодействий, осуществляемых наиболее удаленными от ядра электронами. Можно ожидать, что эти шесть электронов окажутся спаренными, так что их магнитные действия будут взаимно уничтожаться. Но вместо этого спины пяти электронов имеют одинаковое направление и спин одного – противоположное. У атома остается направленный в одну сторону магнитный момент в 4 единицы.

Детальные расчеты, показывающие, почему электроны располагаются именно таким образом, очень сложны. В действительности атом оказывается в состоянии с более низкой энергией, если два его электрона переходят наружу, на оболочку с $n = 4$, подальше от сильно заселенной области с $n = 3$, и если спины шести заэкранированных электронов на внешних подоболочках с $n = 3$ в основном выстроены, что требует от этих электронов нахождения далеко друг от друга. Подобные ситуации имеют место в случаях кобальта и никеля. У кобальта 27 электронов, у никеля 28. У кобальта семь электронов распо-

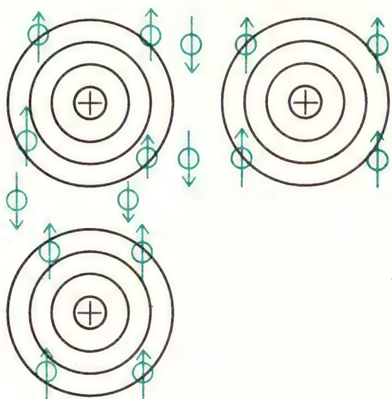
Заполнение электронных оболочек в атоме железа

Номер оболочки n	Орбитальный момент импульса		
	0	1	2
1	↑↓	↑↓	
2	↑↓	↑↓	
		↑↓	
		↑↓	
3	↑↓	↑↓	↑↓
		↑↓	↑
		↑↓	↑
			↑
			↑
4	↑↓		

лагаются на внешних подоболочках с $n = 3$, у никеля – восемь.

Несмотря на эти почти случайные геометрические расположения (обеспечивающие атомам наличие постоянных магнитных моментов), которые не возмущаются химическими связями с другими атомами, все еще нет никаких причин ожидать, что отдельные атомы будут выстраиваться в одном направлении друг с другом. По-прежнему остается в силе аргумент, что магнитная потенциальная энергия мала по сравнению с тепловой энергией.

Однако в случае ферромагнитных веществ имеется еще одно воздействие, способствующее выстраиванию атомов. Это принцип запрета Паули – то самое требование, которое запрещает двум электронам находиться в одной и той же области внутри атома, если только они не имеют противоположные спины. Когда атом железа окружен другими атомами железа, четыре неспаренных электрона на его внешней подоболочке

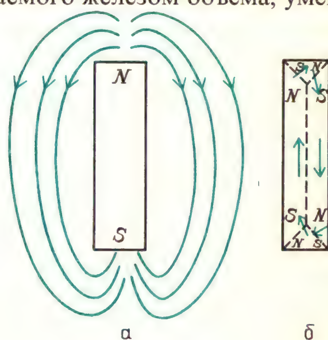


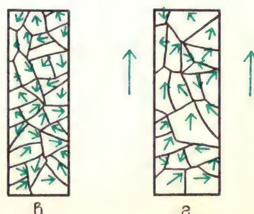
«Валентные» электроны, которые могут свободно скитаться по всему кристаллу железа, имеют противоположный спин по отношению к выстроенным спинам электронов на оболочке с $n = 3$, способствуя тем самым выстраиванию магнитных моментов соседних атомов

с $n = 3$ вынуждают ближайшие блуждающие между атомами электроны иметь противоположный спин; но эти спины должны в свою очередь быть противоположными спинам электронов на внешней подоболочке с $n = 3$ у соседнего атома. Следовательно, магнитные моменты соседних атомов должны быть выстроены, и не благодаря их магнитному воздействию друга на друга, а благодаря сложному применению простого требования, чтобы электроны в одной и той же пространственной области имели противоположные спины.

Магнетизм представляет собой явление, где очевидные следствия каждого нового дополнения к теории срываются еще каким-нибудь неучтенным условием или обстоятельством. Если атомы железа могут перейти в состояние с более низкой энергией, выстраиваясь в одном направлении друг с другом, то почему любой кусок железа не является сильным постоянным магнитом?

На рис. *а* показаны линии поля, создаваемого полностью намагниченным железным стержнем. Такую знакомую картину можно ожидать в случае стержневого магнита, но когда железный стержень затвердевает из расплавленного состояния, магнитные моменты так не выстраиваются. Поле, изображенное на рисунке, обладает большой энергией, локализованной в окружающем пространстве. При затвердевании железа возникло бы состояние с меньшей энергией, если бы магнитные моменты атомов выстроились так, как показано на рис. *б*. Теперь линии поля сосредоточены в пределах занимаемого железом объема, уменьшая





этим энергию поля. Однако оказывается, что для образования границы между двумя областями с разной ориентацией магнитных моментов требуется дополнительная энергия. Более того, при затвердевании расплавленного железа существуют геометрические ограничения на расположения атомов, отличные от простого упорядочения направлений магнитных моментов. Формируются кристаллы различных размеров с границами, подверженными влиянию примесей и дефектов. В пределах кристалла магнитные моменты легче выстраиваются в одном определенном направлении, чем в каком-либо другом. Конечный результат всех этих осложнений показан на рис. *в*. Твердое железо состоит из доменов, имеющих микроскопические размеры.

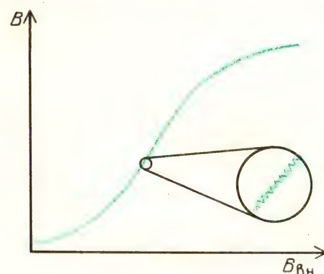
Вопрос 20-17

Если домен представляет собой куб со стороной 10 мкм, сколько атомов он содержит?

Магнитные моменты всех атомов в пределах одного домена ориентированы одинаково; поэтому такая крошечная область представляет собой сильный постоянный магнит. Однако в обычном куске железа, получившемся просто при затвердевании расплава, магнитные моменты доменов ориентированы совершенно хаотически. Железный стержень обычно не имеет результирующего магнитного момента. Когда такой стержень помещен в сильное внешнее магнитное поле, домены, магнитный момент которых направлен по полю, находятся в состоянии с более низкой энергией, чем домены с противоположной полю ориентацией магнитных моментов. Границы между доменами начинают перемещаться так, что объем доменов с ориентацией магнитных моментов по полю растет за счет доменов с противоположной ориентацией. Такое превращение показано на рис. *г*, с. 251.

Рост предпочтительных доменов можно эффектным способом обнаружить на опыте. На железный стержень намотайте из тонкого провода катушку в несколько тысяч витков. Подсоедините катушку к усилителю низкой частоты, на выход которого подключен громкоговоритель. К железному стержню медленно приближайте постоянный магнит. В процессе намагничивания железа медленно возрастающим внешним полем громкоговоритель будет издавать звуки, похожие на помехи при радиоприеме. Границы доменов реагируют на возрастание внешнего поля не плавным перемещением, а задерживаются примесями или дефектами кристаллов. По мере возрастания внешнего поля различие в энергии между каким-либо доменом и его соседом становится достаточным для того, чтобы резко протолкнуть границу мимо дефекта, создавая тем самым внезапное увеличение магнитного момента всего стержня. Это явление называется *эффектом Баркгаузена.* В главе 21 увидим, почему внезапное изменение магнитного поля наводит импульс напряжения в приемной катушке, который в свою очередь вызывает щелчок в громкоговорителе.

На этом рисунке показан график напряженности B магнитного поля в железном стержне, который намагничивается внешним магнитным полем $B_{вн}$.



По мере увеличения внешнего поля магнитное поле внутри железа тоже растет, пока границы доменов смещаются, чтобы произвести все больший и больший результирующий магнитный момент стержня. Однако этот рост происходит не плавно, как видно на увеличенной части графика.

Внешнее магнитное поле, которое требуется для выстраивания доменов, может быть слабым по сравнению с результирующим магнитным полем в железе. Это обстоятельство дает нам способ значительного усиления магнитных полей, создаваемых токами в проводах.

Как мы видели, с помощью настольного соленоида и токов в несколько ампер можно получить магнитные поля только от 10 до 100 Гс. При наличии в соленоиде железного сердечника тот же ток может создать поле от 100 до 1000 раз более сильное.

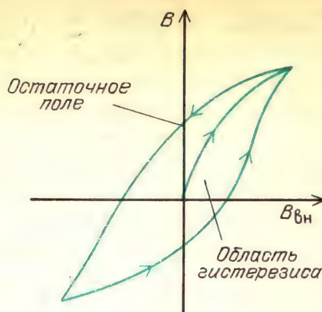
Коэффициент усиления магнитного вещества определяется измерением магнитного поля в кольцевом соленоиде, содержащем сердечник из исследуемого материала. В отсутствие сердечника поле внутри соленоида было бы как раз таким, какое мы рассчитали для идеального соленоида: $B = \mu_0 nI$. Конечно, эта формула была выведена для случая бесконечно длинного *прямого* соленоида, но если размеры кольца велики по сравнению с его поперечным сечением, она и здесь хорошо применима. Более того, при кольцевой геометрии нам не приходится беспокоиться о краевых эффектах.

В принципе, можно было бы измерить истинное поле B внутри сердечника, вырезав в его материале маленький зазор и поместив туда небольшой провод с током. Действующая на провод сила была бы пропорциональна B. На практике вокруг первичной катушки наматывают еще одну «приемную» катушку, как показано на рисунке. Фактическое измерение B связано с включением

Кольцевой соленоид, намотанный на замкнутый сердечник, создает возбуждающее поле $B_{вн}$. Наводимый сигнал в «приемной» катушке пропорционален полю B.

тока в первичной катушке для создания возбуждающего поля $B_{вн}$. Как мы увидим в главе 21, наводимый при этом сигнал в приемной катушке пропорционален B.

На следующем рисунке показана зависимость B от $B_{вн}$ для типичного образца железа. Рассмотрим, что происходит



с ненамагниченным железным сердечником, когда внешнее (возбуждающее) поле $B_{вн}$ возрастает от нулевого значения. Магнитные домены вещества, у которых магнитные моменты совпадают по направлению с возбуждающим полем, растут за счет своих соседей. Результирующий магнитный момент вещества создает сильное внутреннее поле. Однако в конце концов домены вырастают до максимально возможных размеров и большинство атомных магнитных моментов во всем стержне оказывается выстроенным. Материал достиг насыщения; увеличение возбуждающего поля уже не может сопровождаться увеличением внутреннего поля. Если затем напряженность возбуждающего поля уменьшать и, наконец, обратить его направление, поле в веществе будет уменьшаться, но не вдоль той кривой, по которой оно нарастало. В зависимости от материала образца и от способа его изготовления в веществе сохранится большее или меньшее остаточное поле – даже тогда, когда возбуждающее поле равно нулю. Если это остаточное поле велико, материал может быть хорошим постоянным магнитом.

График зависимости B от $B_{вн}$ называется *кривой гистерезиса*. Когда возбуждающее поле совершает полный цикл изменения, в веществе происходят потери энергии, если доменные границы перемещаются не плавно. В веществе с сильным гистерезисом и остаточными полями теряется значительная энергия за полный цикл изменения возбуждающего поля. Площадь, ограниченная петлей гистерезиса, пропорциональна этим потерям энергии. Следовательно, в трансформаторах, где возбуждающее

поле может изменяться с частотой 60 Гц, следует использовать только железо с малыми потерями на гистерезис. В трансформаторах применяется так называемое «мягкое» железо. Такое железо должно содержать мало примесей и состоять из маленьких кристаллов, так чтобы домены могли расти или сжиматься с минимальными потерями энергии.

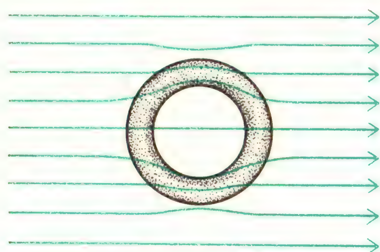
Отношение B к $B_{вн}$ приблизительно равно магнитной восприимчивости χ. Разные сорта железа и сплавов железа имеют значения χ в диапазоне от 100 до 10 000. Большинство сортов железа насыщается при внутренних полях от 1 до 2 Тл.

Существует много специальных сортов ферромагнитных материалов. Один из сплавов, содержащий 51% железа и смесь алюминия, никеля и кобальта, называется алнико. Это хрупкий металл с большим остаточным полем, которое нелегко разрушить, что делает этот сплав очень мощным и долгоживущим постоянным магнитом. Другой сплав железа, называемый μ-металлом, имеет магнитную восприимчивость около 10 000. Он используется для магнитного экранирования во внешних полях до 1 Гс.

Вопрос 20-18
Почему μ-металл не будет эффективен в полях, значительно превышающих 1 Гс?

Рост предпочтительных магнитных доменов с увеличением возбуждающего поля происходит не мгновенно. Если внешнее поле периодическое и изменяет свое направление быстрее, чем с частотой примерно 20 000 Гц, рост доменов не успевает следовать за ним, и значение χ будет падать. Созданы вещества, называемые ферритами, в которых решается эта проблема. Ферриты представляют собой смесь магнитных материалов и керамики. Внедренные в них магнитные вещества измельчены и рассредоточены. Ферриты не проводят электрический ток и сохраняют высокие значения χ вплоть до частот 10^8 Гц, лежащих в телевизионном диапазоне.

Легко экранировать некоторую область от *электростатических* полей, просто заключив ее в металлические стенки. Линии внешнего поля оборвутся на поверхностных зарядах этих стенок. Как мы видели, внутри проводника не может быть статического электрического поля. Труднее, однако, экранировать некоторую область от магнитных полей. Поскольку магнитных полюсов не существует, линии внешнего поля не могут оборваться на стенках экрана. Все, что можно сделать для экранировки некоторой области от внешнего магнитного поля – это окружить ее ферромагнитной стенкой из материала с большим значением χ. Тогда большинство линий внешнего поля сконцентрируется в стенках экрана и продолжится наружу с противоположной стороны, обходя внутреннюю область, как показано на рисунке. Для окончательного экранирования область можно окружить сверхпроводником. В сверхпроводнике устанавливаются противодействующие токи, блокирующие проникновение любого внешнего поля. Мы снова вернемся к этой теме в главе 21.



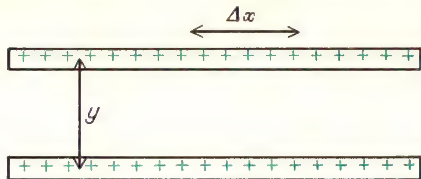
Дополнительный материал

Относительный характер электрического и магнитного полей

При изучении второго раздела электромагнитных явлений мы описали действия электрических зарядов, движущихся мимо нас с постоянной скоростью. Как мы видели в главе 11, когда наблюдатели в двух различных системах отсчета измеряют одно и то же явление, они могут использовать одни и те же законы – при условии, что они правильно выполняют преобразования расстояний и промежутков времени. Попробуем поставить мысленный эксперимент с электрическими зарядами и опишем его резуль-

таты в двух различных системах отсчета, движущихся друг относительно друга с постоянной скоростью.

На этом рисунке показаны две бесконечные линии, разделенные расстоянием y,



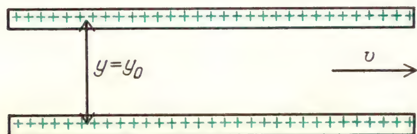
каждая из которых имеет равномерный статический заряд с линейной плотностью λ: $\lambda = \Delta q/\Delta x$. На с. 159 было рассчитано электростатическое поле, создаваемое линейным зарядом. Оно равно

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y}.$$

Действующая на другой провод сила просто равна произведению его полного заряда на электрическое поле, создаваемое первым проводом. Поэтому сила взаимодействия двух проводов в расчете на единицу длины равна

$$\frac{F_y}{\Delta x} = \frac{\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0 y}.$$

До сих пор мы предполагали, что заряды неподвижны не только по отношению друг к другу, но и по отношению к нам, наблюдателям. Теперь посмотрим, что происходит, если эти же заряженные стержни равномерно движутся вправо вдоль оси x со скоростью v. Как мы видели в главе 11, длины движущихся тел сокращаются. Может оказаться, что метровый стержень, скрепленный с движущимися проводами, для нас будет иметь длину только 50 см. Однако не существует никакого релятивистского уменьшения действительного числа зарядов. Заряд образован определенным числом электронов, и это число не зависит от скорости наблюдателя. Однако линейная плотность заряда



В нашей системе отсчета линейная плотность заряда движущегося стержня больше

действительно изменяется, поскольку $\lambda = \Delta q/\Delta x$. Если мы наблюдаем, что отрезок единичной длины сокращается вдвое, то это означает, что плотность заряда возрастает вдвое, поскольку мы бы насчитали то же самое число зарядов на сократившемся отрезке, как и в том случае, когда эти заряды были неподвижны.

Дальше мы будем снабжать нулевым индексом все величины, относящиеся к движущимся телам и *измеренные в движущейся системе отсчета*. Такие значения были бы получены при измерении наблюдателем, «оседлавшим» стержни и движущимся вместе с находящимися на них зарядами. Символы без нулевого индекса относятся к величинам, которые *мы* получаем при измерении, когда ведем наблюдение за проносящимися мимо нас стержнями. Соотношение длин, например, дается формулой

$$\Delta x = \Delta x_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Измеряемая *нами* линейная плотность заряда равна

$$\lambda = \frac{\Delta q}{\Delta x} = \frac{\Delta q}{\Delta x_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Раз уж мы получаем при измерении бо́льшую линейную плотность заряда, чем наблюдатель, оседлавший стержни, давайте сравним силу отталкивания между проводами, как она получается при измерении двумя наблюдателями. Измеряемое нами значение силы на единицу длины равно $F_y/\Delta x$. Значение силы на единицу длины, измеряемое оседлавшим провод наблюдателем, равно

$$\frac{(F_y)_0}{\Delta x_0} = \frac{\lambda_0^2}{2\pi\varepsilon_0 y},$$

тогда

$$\frac{F_y}{\Delta x} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda^2}{y} = $$

$$= \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 y}\frac{\lambda_0^2}{1 - v^2/c^2} = \frac{(F_y)_0}{\Delta x_0}\frac{1}{1 - v^2/c^2}.$$

Очевидно, что мы и движущийся наблюдатель расходимся во мнениях о значении силы отталкивания между проводами. Здесь есть серьезная трудность, ибо этот результат привел бы к разным предсказаниям для одного и того же события. Подсчитаем это расхождение между двумя системами

наблюдателей:

$$\frac{F_y}{\Delta x} - \frac{(F_y)_0}{\Delta x_0} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\lambda^2}{y} - \frac{\lambda_0^2}{y}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda^2}{y}\left[1 - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\right] = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda^2}{y}\frac{v^2}{c^2}.$$

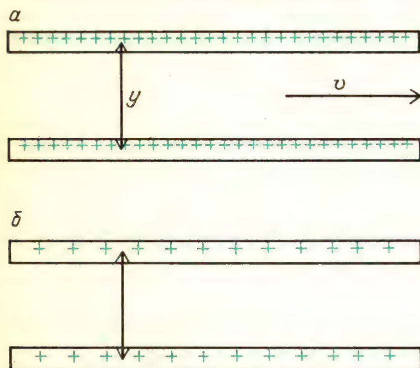
При обычных скоростях отношение v/c очень мало, поэтому может показаться, что разногласия двух наблюдателей не очень велики, хотя и имеется некоторое расхождение. Продолжим это обсуждение. Обратите внимание, что хотя заряды неподвижны по отношению к наблюдателю, связанному с проводом, они движутся по отношению к нам, и поэтому создают электрический ток. Этот ток равен $I = \lambda v$ ($I = \Delta q/\Delta t$, $\lambda = \Delta q/\Delta x$). Поэтому мы можем переписать расхождение наблюдений в виде

$$\frac{F_y}{\Delta x} - \frac{(F_y)_0}{\Delta x_0} = \left(\frac{F}{\Delta x}\right)_{эл} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{I^2}{yc^2}.$$

У нас имеется еще одно расхождение. Когда мы наблюдаем два параллельных *тока*, мы знаем, что между ними существует сила притяжения. Магнитная сила между двумя проводами равна

$$\left(\frac{F}{\Delta x}\right)_{м} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I^2}{y}.$$

Таким образом, имеется два расхождения между результатами наших измерений и измерений наблюдателя, связанного с движущимся проводом. Он видит одну лишь силу электростатического отталкивания. Мы видим бóльшую силу электростатического отталкивания, потому что измеряемая нами линейная плотность заряда больше. Но мы видим также силу *притяжения*, обусловленную магнитным взаимодействием. Что касается движущегося наблюдателя, то для него нет никакого магнитного поля.



Мы видим увеличенную линейную плотность заряда, увеличенное электростатическое отталкивание, электрические токи и, следовательно, магнитное притяжение (*а*). «Оседлавший» стержни наблюдатель видит исходную линейную плотность заряда, прежнее электростатическое отталкивание, для него не существует никаких токов и никакого магнитного поля (*б*)

Если сила, отнесенная к единице длины, измеряемая двумя наблюдателями, имеет разные значения, наблюдатели предсказали бы разные события для одного и того же явления.

Подобное противоречие было бы крушением наших научных методов. Например, чтó если измеряемое нами магнитное поле оказалось бы достаточно сильным, чтобы вызвать сближение проводов? (В действительности для принятого нами расположения сила отталкивания всегда должна быть больше, чем сила притяжения. Однако существует ситуация, называемая «пинч-эффектом», когда движущиеся с большой скоростью пучки и в самом деле сближаются. Но чтобы пинч-эффект происходил, между токами должны также находиться нейтрализующие заряды.)

Можно избежать противоречия между двумя наблюдателями, сказав, что наблюдаемая нами *добавочная сила отталкивания* должна быть как раз равна *добавочной магнитной силе притяжения*. Это условие выполняется, если

$$\left(\frac{F}{\Delta x}\right)_{эл} = \left(\frac{F}{\Delta x}\right)_{м},$$

$$\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{I^2}{yc^2} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi y}.$$

Эти выражения равны друг другу, если

$$\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{c^2}, \quad \mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}.$$

Электрическая (ε_0) и магнитная (μ_0) постоянные представляют собой константы, измеряемые в статических ситуациях. Значение электрической постоянной находится на основе измерения полей и геометрических размеров какого-либо конденсатора; числовое значение магнитной постоянной выбрано в эксперименте, который служит определением ампера. Подставим эти значения

в наше уравнение:

$$c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{11{,}1 \cdot 10^{-18}}} = \frac{1}{3{,}33} \cdot 10^9 = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Это равенство действительно удовлетворяется. Поразительно, но свойства статических электрического и магнитного полей связаны со скоростью света!

Будем ли мы наблюдать электрическое поле или магнитное поле, зависит, очевидно, от нашей скорости по отношению к источникам. Электрическое поле для одного наблюдателя может стать магнитным полем для другого. Оказывается, что магнетизм представляет собой просто релятивистский эффект, значение которого зависит от квадрата отношения относительной скорости к скорости света. Можно ожидать, что это явление будет обнаружено только у субатомных частиц, разогнанных до скоростей, близких к скорости света; но мы уже видели, что магнитные явления могут наблюдаться с обычными проводами, подключенными к сухому элементу. Электроны в таком потоке дрейфуют со скоростью в доли миллиметра в секунду. Почему же нам удается построить мощные электродвигатели, действие которых основано на столь слабом эффекте?

Магнитное поле, создаваемое дрейфом электронов в проводе, и в самом деле чрезвычайно мало́ по сравнению с электрическим полем, создаваемым тем же самым зарядом. Однако электрон в проводе не одинок. Все отрицательные и положительные заряды присутствуют в нем па́рами, так что обеспечивается полная электростатическая нейтральность. Магнитное поле, обусловленное дрейфовой скоростью каждого отдельного электрона, хотя оно и мало, не подвергается компенсации. В расчете на каждый ампер в проводе $6 \cdot 10^{18}$ электронов дрейфуют мимо данной точки за каждую секунду. Поле отдельного электрона мало́, но число таких вкладов огромно. В результате получается воздействие, которое можно обнаружить в мире явлений, относящихся к нашим обычным человеческим масштабам. Всякий раз, когда вы чувствуете магнитную силу, вы наблюдаете на опыте следствия частной теории относительности.

РЕЗЮМЕ

Между электрическими токами действует сила, отличающаяся от кулоновского взаимодействия. Сила взаимодействия на единицу длины между токами в длинных параллельных проводах равна

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{r}.$$

Это сила притяжения, если токи имеют одинаковые направления, и сила отталкивания, если токи антипараллельны.

Мы объяснили и описали это взаимодействие между токами с помощью модели магнитных полей, создаваемых токами. В пространстве линии магнитного поля имеют направление силы, которая действовала бы на единичный пробный магнитный полюс. Мы привели рисунки линий магнитных полей, создаваемых постоянными магнитами разнообразных форм и различными конфигурациями токов.

Магнитные поля можно рассчитывать с помощью двух законов, имеющих различные формы. В соответствии с законом Ампера, если напряженность магнитного поля **B** совпадает по направлению с траекторией l, то для пути вдоль всего замкнутого контура, охватывающего ток I,

$$Bl_{\text{к}} = \mu_0 I.$$

В соответствии с законом Био – Савара вклад $\Delta\mathbf{B}$, создаваемый элементом тока, в магнитное поле в некоторой точке равен

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \Delta l \sin\varphi}{r^2}.$$

Поле, создаваемое электрическим зарядом, движущимся со скоростью v, равно

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{v \sin\varphi}{r^2}.$$

Используя тот или другой из этих законов, мы вывели формулы для магнитных полей при некоторых конфигурациях токов:

Вблизи длинного прямолинейного провода:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}.$$

На оси кругового контура с током радиуса R:

в центре: при $r \gg R$:

$$B=\frac{\mu_0}{2}\frac{I}{R}, \qquad B=\frac{\mu_0}{2}\frac{2}{r^3}\pi R^2 I.$$

В длинном соленоиде:

$B=\mu_0 nI.$

Сила, действующая на ток в магнитном поле, равна

$\mathbf{F}=I(\mathbf{l}\times\mathbf{B}).$

Сила, действующая на движущийся заряд, равна

$\mathbf{F}=q(\mathbf{v}\times\mathbf{B}).$

Такая сила приводит в действие электродвигатели или обеспечивает центростремительную силу, необходимую для удержания заряженных частиц на круговых орбитах. На замкнутый контур с током в магнитном поле действует вращающий момент сил

$\mathbf{M}=\mathbf{p}_{м}\times\mathbf{B},$

где $\mathbf{p}_{м}=I\mathbf{S}$. Потенциальная энергия контура с током равна

$W_{пот}=-\mathbf{p}_{м}\mathbf{B}.$

Магнитные явления в веществах вызываются магнитными моментами, создаваемыми орбитальными и спиновыми движениями электронов. В большинстве веществ, содержащих неспаренные электроны, совокупный эффект называется *парамагнетизмом* и весьма слаб. Тепловое возбуждение препятствует основному выстраиванию отдельных атомных магнитиков. Когда электроны спарены и их магнитные моменты компенсируют друг друга, может наблюдаться еще более слабый эффект, называемый *диамагнетизмом*. Внутренние движения электронов создают индуцированные поля, которые противодействуют внешним полям. У некоторых элементов и сплавов происходит выстраивание индивидуальных атомных магнитных моментов из-за принципа запрета. Эти вещества ферромагнитны.

Магнитное и электрическое поля представляют собой разные аспекты одного и того же явления. Мы показали их связь, применяя частную теорию относительности к определенной конфигурации токов. В результате получили, что скорость света связана с электрической постоянной ε_0 и магнитной постоянной μ_0:

$$c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}.$$

Ответы на вопросы

20-1. Результирующая сила равна 1 Н. Такая же ситуация имеет место при перетягивании каната. Если одна команда тянет с силой 1000 Н и другая команда тоже тянет с силой 1000 Н, канат остается неподвижным и имеет силу натяжения 1000 Н.

20-2. Поскольку мы свободны в выборе значения μ_0, мы выбираем его равным *в точности* $4\pi\cdot10^{-7}$. Приписывая μ_0 это произвольное значение, мы, по существу, задаем размер кулону. Такой размер кулона в свою очередь сказывается на значении ε_0. Как мы увидим в конце этой главы, константы μ_0 и ε_0 связаны еще одним, к тому же поразительным, образом.

20-3. На самом деле перед нами все еще стоит задача определения единого взаимодействия электрического тока с магнитным полем. Построив картину магнитных полей с помощью постоянного магнитного диполя, мы должны показать, как на электрический ток в таком поле действует сила, модуль и направление которой согласуются с тем, что наблюдается на опыте.

20-4. Если бы линии магнитного поля длинного прямого провода выходили из него радиально, они пересекали бы параллельный провод под прямыми углами. Такая модель была бы не способна предсказать, будет ли результирующая сила между двумя проводами силой притяжения или отталкивания.

20-5. Действующая на стрелку небольшая результирующая сила направлена радиально в сторону провода.

20-6. Если бы мы выбрали путь вокруг провода в виде квадратного контура, напряженность магнитного поля не была бы параллельна этому пути, за исключением четырех точек. Более того, у нас не было бы никаких причин ожидать, что напряженность магнитного поля должна быть постоянна по модулю, поскольку углы квадрата находятся дальше от провода, чем се-

редина сторон квадрата. В действительности закон Ампера *всегда* выполняется, если скалярное произведение напряженности магнитного поля и перемещения берется для каждого бесконечно малого участка контура и эти произведения суммируются вдоль всего замкнутого контура. Но на практике мы обычно применяем закон Ампера только в тех случаях, где симметрия убеждает нас в том, что напряженность магнитного поля имеет постоянное значение вдоль выбранного контура. В случае бесконечно длинного провода напряженность магнитного поля на определенном расстоянии должна быть одной и той же независимо от углового положения точки на окружающем провод контуре.

20-7. Напряженность магнитного поля вблизи длинного провода действительно обратно пропорциональна первой степени расстояния от провода. Однако закон Био – Савара относится к точечному источнику. В первой форме закона источник представляет собой малый элемент тока Δl. Во второй форме магнитное поле создается движущимся *точечным* зарядом.

20-8. Чтобы воспользоваться законом Ампера, мы должны знать, что вдоль некоторого замкнутого контура напряженность магнитного поля постоянна. В данном случае *ток* протекает по проводу в форме замкнутого контура, и у нас нет никаких причин ожидать из соображений симметрии, что здесь существует какой-то другой контур, охватывающий проводник, вдоль которого магнитное поле постоянно.

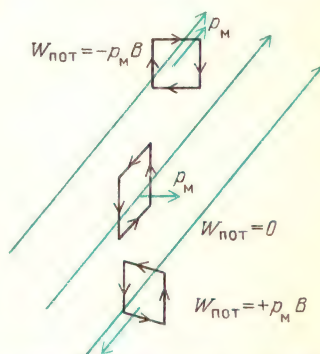
20-9. Напомним, что единственный практический способ применения закона Ампера заключается в том, чтобы подобрать замкнутый путь, который проходит вдоль линии равных значений магнитного поля. Круговой контур, концентрический с соленоидом, не совпадает с линиями магнитного поля, имеющими преимущественно аксиальное направление.

20-10. Сначала рассчитайте мощность в ваттах: $P = IU$. Если двигатель потребляет ток 6 А при напряжении 120 В, то он расходует мощность 720 Вт. В 1 л. с. содержится 746 Вт. (В главе 21 мы изучим, какой будет поправка к этому первому приближению. В случае переменного тока $P = IU \cos\varphi$, где φ – сдвиг фазы между синусоидальным током и напряжением.)

20-11. Очевидно, что импульс каждой частицы непрерывно уменьшался при ее движении сквозь жидкость, заполняющую пузырьковую камеру. Частицы теряли энергию, а следовательно, и импульс, ионизируя вещество на своем пути.

20-12. Напомним, что частота обращения протона в циклотроне пропорциональна отношению его заряда к массе. Когда масса возрастает, резонансная частота должна убывать. Однако принцип действия циклотрона основан на том, что все частицы имеют одинаковую частоту независимо от того, движутся ли они по орбитам малого радиуса, только начиная свой путь, или по орбитам большого радиуса вблизи мишени.

20-13. Когда тело имеет отрицательную потенциальную энергию, говорят, что оно находится в связанном состоянии или захвачено. Потребовалась бы положительная энергия для вывода его из этого положения. В случае магнитного диполя, как показано на рисунке,



потребовалась бы положительная энергия для его поворота из ориентации вдоль поля.

20-14. Поскольку плечо сил примерно равно радиусу катушки, примерная сила, действующая на каждую сторону катушки, равна

$$F = \frac{M/2}{l} = \frac{1 \cdot 10^{-6}\ \text{Н} \cdot \text{м}}{4 \cdot 10^{-2}\ \text{м}} = \frac{1}{4} \cdot 10^{-4}\ \text{Н}.$$

Это очень маленькая сила.
Напомним, что вес 1 грамма равен $1 \cdot 10^{-2}$ Н.

20-15. Если моль атомов алюминия имеет массу 27 г, его объем равен $V = 27 \cdot 10^{-3}$ кг/$(2{,}7 \cdot 10^3$ кг/м$^3) = 10$ см^3. Цилиндрический стержень диаметром

1 см и длиной около 13 см имеет объем около 10 см^3.

20-16. Диполь не будет двигаться вдоль линий поля в *однородном* поле. В неоднородном поле напряженность у северного полюса диполя больше, чем у южного, и поэтому существует результирующая сила, направленная вдоль линии поля в направлении области более сильного поля.

20-17. Диаметр атома порядка $1 \cdot 10^{-10}$ м. Вдоль одной стороны куба, длина которой 10 мкм, может поместиться 10^5 атомов. Поэтому такой домен содержал бы 10^{15} атомов.

20-18. При отношении $B/B_{вн} = 10\,000$ μ-металл достигает насыщения в полях $B_{вн} \approx 1$ Гс.

Задачи

1. В одном из больших ускорителей заряженных частиц медные шины обмотки магнита имеют длину 25 м, находятся на расстоянии 10 см друг от друга (от оси до оси) и проводят импульсный ток, достигающий 7000 А. Какая сила действует между этими проводящими шинами?

2. Рассчитайте, осуществима ли демонстрация магнитной силы, действующей на проводник с током, в магнитном поле Земли. (Выясните, какой ток необходим для получения силы, достаточно большой для приведения в движение провода, достаточно большого, чтобы выдержать этот ток.)

3. В «Знакомстве с явлениями» вы закорачиваете батарейку двумя полосками алюминиевой фольги. Если в каждой полоске шел ток 5 А, а полоски имели длину 10 см и находились на расстоянии 3 мм, какая сила действовала между ними?

4. Объясните на словах, используя рисунок, почему модель магнитного поля оказалась бы неработоспособной, если бы линии поля были радиальными.

5. Сделайте набросок линий поля B в пространстве, окружающем диполь; в области, включающей два одноименных полюса, расположенных близко друг к другу; в пространстве, окружающем прямолинейный провод с током.

6. Объясните на словах с помощью рисунков линий магнитного поля, почему параллельные токи притягивают, а антипараллельные токи отталкивают друг друга.

7. Сделайте набросок линий магнитного поля в области, окружающей провод с током, перпендикулярный к внешнему магнитному полю. Покажите, каким образом линии поля указывают направление силы, действующей на провод.

8. Если по подводящему проводу большого ускорителя, упоминавшегося в задаче 1, идет ток 7000 А, чему равна напряженность магнитного поля на расстоянии 10 см от оси провода? Дайте ответ в теслах и в гауссах.

9. Если бы заряд в 1 Кл можно было сконцентрировать в объеме 1 см^3, какой была бы напряженность магнитного поля на расстоянии 10 см при прохождении мимо нас этого заряда со скоростью $v = 1 \cdot 10^8$ м/с? Выразите ответ в теслах и гауссах. Сравните это значение B со статическим электрическим полем E на том же расстоянии от такого заряда.

10. Чему равна напряженность магнитного поля в центре катушки из 100 витков радиусом 5 см, по которой проходит ток 10 А?

11. Чему равна напряженность магнитного поля катушки, упомянутой в задаче 10, в точке на ее оси на расстоянии 1 м от катушки?

12. Соленоид с многослойной обмоткой имеет $1 \cdot 10^4$ витков на метр длины. Чему равна напряженность магнитного поля внутри соленоида, когда по нему проходит ток 1 А? Выразите ее в теслах и в гауссах.

13. Воспользуйтесь законом Ампера для доказательства того, что напряженность поля на оси длинного соленоида равна напряженности поля вблизи внутренней стороны его обмотки и вдоль внутреннего радиуса.

14. Какая сила действует на проводящую шину длиной 10 м, по которой проходит ток 7000 А, в магнитном поле напряженностью 1,8 Тл?

15. Чему равна циклотронная резонансная частота для электронов в магнитном поле напряженностью 0,01 Тл?

16. Чему равен радиус кривизны траектории протона, движущегося со скоростью $0{,}1c$ в магнитном поле напряженностью 1,5 Тл?

17. Чему равен максимальный вращающий момент сил, действующих на прямоугольную обмотку электродвигателя, содержащую 100 витков провода размером 4×6 см, по которой проходит ток 10 А, в магнитном поле напряженностью 1,2 Тл?

18. Чему равно максимальное изменение потенциальной энергии для обмотки из задачи 17?

19. По мере ускорения протонов в циклотроне их масса возрастает, что приводит к нарушению условия циклотронного резонанса. Одним из способов компенсации этого эффекта было бы увеличение напряженности магнитного поля с возрастанием радиуса. Сделайте набросок формы линий магнитного поля в зависимости от радиуса для

такой машины. Используйте рисунок для анализа и объяснения, к каким последствиям в отношении вертикальной фокусировки пучка это приведет.

20. Оцените, сколько энергии высвободилось, если бы 1 моль атомов (каждый с магнитным моментом $p_{\text{м}} = 1 \cdot 10^{-23}$ А·м^2) выстроился вдоль магнитного поля напряженностью 1 Тл. Куда переходит эта энергия?

21. Используя кривую Кюри, приведенную на с. 249, найдите, при какой температуре половина атомов оказалась бы выстроенной в магнитном поле напряженностью 20 Тл?

22. Опишите и объясните реакцию тонких иголок из пара-, диа- и ферромагнитных материалов, свободно подвешенных в однородном магнитном поле, а также в сильно неоднородном поле.

23. Скорость дрейфа электронов в алюминиевых полосках, использованных в «Знакомстве с явлениями», составляет приблизительно 10^{-12} скорости света. Объясните на основе релятивистского возрастания линейной плотности заряда, почему столь малый эффект можно наблюдать, хотя никакого электростатического эффекта обнаружить не удается.

24. Чтобы прозондировать и измерить магнитное поле, проводник длиной 10 см с током 10 А поворачивают до тех пор, пока действующая на него сила не станет максимальной. Если при этом сила равна 0,1 Н, чему равна напряженность магнитного поля B?

25. Можно ли самодельную катушку из провода и батарейку карманного фонарика использовать в качестве магнитного компаса? Допустим, что вы можете изготовить катушку из 100 витков радиусом 5 см и пропустить через нее ток 5 А. Чему равен максимальный вращающий момент, действующий на катушку, если горизонтальная составляющая магнитного поля Земли равна 0,3 Гс? Какие примерно силы с каждой стороны катушки развиваются этим вращающим моментом? Чему равна максимальная разность потенциальных энергий?

ГЛАВА 21. ПЕРЕМЕННЫЕ ТОКИ И ПОЛЯ

Изучая электромагнитные явления, мы уже рассмотрели две области. В первой из них электрические заряды неподвижны по отношению друг к другу и по отношению к нам, наблюдателям. Во второй области заряды движутся с постоянной скоростью. Теперь мы должны продвинуться в третью область, где токи не постоянны и где электрические и магнитные поля изменяются со временем.

В этой главе нас будут интересовать только относительно медленные изменения тока. Возникающие при этом явления сказываются лишь в самих цепях или в их ближайших окрестностях. В главе 22 мы увидим, что́ происходит, когда заряды ускоряются быстрее и создают электрические и магнитные поля, которые отделяются от своих источников, безвозвратно унося с собой энергию и импульс.

После того как Эрстед открыл, что электрические токи создают магнитные поля, было предпринято много попыток обнаружить обратный эффект. Может ли сильное магнитное поле каким-либо образом вызвать электрический ток? Исследователи разными способами навивали провода в магнитных полях и пытались с помощью чувствительных гальванометров обнаружить слабые токи, которые могли при этом возникать. Тайна была раскрыта Фарадеем. Чтобы вызвать ток, проводники и магнитные поля должны находиться в относительном движении. Не прошло и года после этого открытия, сделанного в 1831 году, как Фарадей и другие исследователи уже изготавливали примитивные генераторы, превращавшие механическую энергию в электрическую.

В этой главе мы, как обычно, будем изучать и сами явления, и их практические приложения. Эти явления затрагивают фундаментальные и глубокие вопросы о взаимодействиях в природе и о способах наблюдения последних. Практическое применение этих явлений лежит в основе нашей технической цивилизации и бытовой техники, создающей комфорт в повседневной жизни.

ЗНАКОМСТВО С ЯВЛЕНИЯМИ

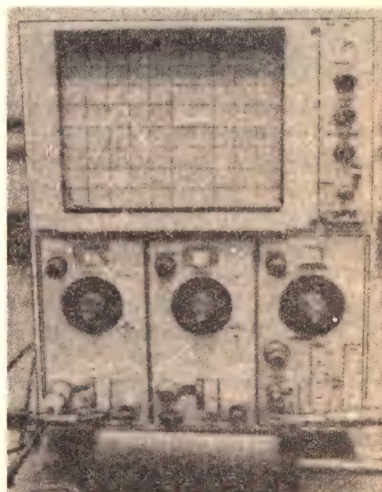
Нас всюду окружают приборы и устройства, действие которых основано на использовании явлений, изучаемых в этой главе. В электромоторах, генераторах и трансформаторах применяются токи и поля, нарастающие и убывающие по синусоидальному закону. Электричество, которое мы можем получить из розетки в стене нашего дома, представляет собой переменный ток. Несмотря на широкое распространение подобных устройств, не так просто изучить их действие в домашних условиях. Переменное напряжение в осветительной сети потенциально таит в себе смертельную опасность. Чтобы иметь дело с чем-либо более сложным, чем настенный выключатель, необходимы определенные навыки, знания и осторожность. Также не просто или не всегда разумно разбирать бытовые электромоторы и трансформаторы, если они еще работают. В большинстве из этих приборов использованы очень сложные

Здесь показаны в разобранном виде два различных типа электромоторчиков, применяемых в бытовой технике. В обоих случаях ток в обмотках создает сильное магнитное поле в пластинчатых железных сердечниках. В моторчике слева аксиальная арматура (вращающаяся) получает ток через контактные кольца (они видны внизу). В моторчике справа ротор удален и лежит на магните сверху. Ток в роторе такого типа возникает в результате электромагнитной индукции без всяких подводящих проводов

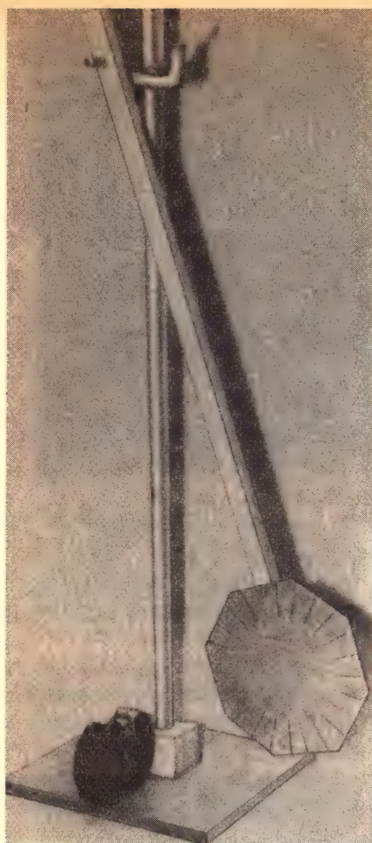
технические детали, маскирующие порой принцип их действия. Но если у вас есть старая электробритва, миксер или электрический фен для сушки волос, которые не жалко принести в жертву, возьмите себе в помощники 12-летнего ребенка и начинайте разборку.

Можно предложить вам выполнить своими руками два качественных опыта, если в вашем учебном заведении найдется необходимое экспериментальное оборудование. В первом опыте вдвигайте и выдвигайте сильный цилиндрический магнит из катушки, содержащей много витков провода. Выводы катушки следует подсоединить к чувствительному гальванометру или еще лучше к входным клеммам осциллографа. На фотографии показано это простое устройство; на экране осциллографа виден след луча, возникающий, когда магнит вдвигается в катушку, а затем выдвигается. Обратите внимание на направление возникающего тока, когда северный полюс магнита входит внутрь и выходит наружу из катушки, а затем южный полюс входит внутрь и выходит. Если вы используете осциллограф, отметьте также, как возникающее напряжение зависит от скорости, с которой вы вдвигаете магнит в катушку.

Для второго качественного опыта требуется устройство, часто используе-



мое в лекционных демонстрациях. Типичный его вариант показан на фотографии на с. 264. Маятник с грузом в виде плоской медной пластины может качаться, проходя сквозь зазор мощного магнита. При первом же колебании маятник остановится. Если, однако, в медной пластине сделаны прорези, как показано на фотографии,

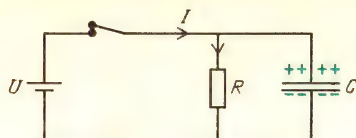


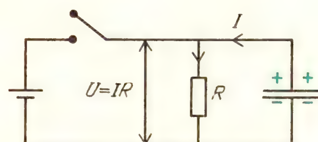
маятник будет качаться, проходя сквозь зазор магнита.

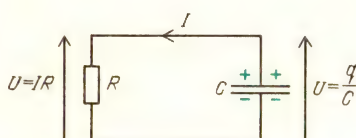
ПРОЦЕСС РАЗРЯДКИ КОНДЕНСАТОРА

Выше при описании конденсатора мы не беспокоились о процессе его зарядки. Теперь мы должны обратиться к тому факту, что требуется конечное время для того, чтобы собрать заряды на конденсаторе, и для того, чтобы они покинули его (стекли) в процессе разрядки. Ни с какими новыми явлениями мы не столкнемся при изучении этого процесса, но некоторые характеристики изменяющегося таким образом тока применимы к ряду более сложных случаев, рассматриваемых ниже.

Для упрощения анализа рассмотрим, что происходит, когда конденсатор разряжается в цепи, схема которой показана на рисунке. Пока ключ замкнут, конденсатор полностью заряжен до разности потенциалов, такой же, как у батареи. В резисторе идет ток, создающий падение напряжения IR, которое равно напряжению на батарее. После размыкания ключа заряды конденсатора будут стекать через резистор. Такой ток





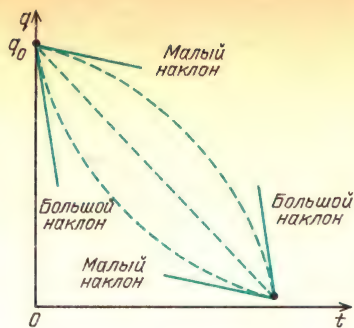


в резисторе будет продолжаться, чтобы обеспечивать «обратное» напряжение, которое противостоит полю, создаваемому запасенными в конденсаторе зарядами. Однако противостоящее поле ослабевает по мере того, как заряды стекают с обкладок конденсатора.

Для анализа этого тока можно воспользоваться вторым правилом Кирхгофа: сумма увеличений и уменьшений напряжения вдоль любого замкнутого контура должна быть равна нулю. В любой момент времени разность потенциалов на конденсаторе равна q/C. Падение напряжения на резисторе равно IR. Следовательно,

$$\frac{q}{C} - IR = 0.$$

Заряд q и скорость прохождения заряда I связаны между собой, но нужна осторожность при описании этой связи. На следующем рисунке показан график заряда конденсатора как функция времени. При $t = 0$ $q = q_0$, где q_0 — начальный заряд конденсатора. Ясно, что через некоторое время почти никакого заряда на конденсаторе не останется. Некоторая функция $q(t)$ соединяет эти две точки на графике. Мы сделали



набросок трех возможных кривых, которые могли бы изображать такую функцию. Обратите внимание, что все они имеют отрицательный наклон. Наклон кривой $q(t)$ определяет ток I. Мы знаем, что в нашей цепи ток создают заряды, вытекающие из конденсатора по резистору в направлении, указанном стрелкой на схеме цепи. Чтобы ток был положителен, когда $\Delta q/\Delta t$ существенно отрицательно, нужно определить ток как

$$I = -\frac{\Delta q}{\Delta t}.$$

При подстановке этого значения I в уравнение Кирхгофа получим

$$\frac{q}{C} - \left(-\frac{\Delta q}{\Delta t}\right)R = 0,$$

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = -\frac{1}{RC}q.$$

Теперь мы подошли к тому, чтобы выбрать среди возможных функций ту, которая описывает стекание заряда конденсатора. В соответствии с нашей формулой наклон кривой $q(t)$, т. е. $\Delta q/\Delta t$, пропорционален самому заряду и отрицателен. Конечно же, наклоны всех трех кривых отрицательны, но верхняя в своем начале, когда q велико, имеет малый наклон и в конце, когда q мало, имеет большой наклон. Такое поведение не соответствует тому, о чем говорит уравнение. Наклон средней кривой постоянен, что тоже не согласуется с нашей формулой. Однако нижняя кривая начинается с большим наклоном при больших q, и затем наклон непрерывно уменьшается по мере убывания q. График математической функции, описывающей стекание заряда конденсатора, должен выглядеть подобно нижней кривой на нашем рисунке. Математическая функция, удовлетворяющая этим условиям, является экспонентой. Окончательная формула имеет вид

$$q = q_0 e^{-(1/RC)t}.$$

Вопрос 21-1

Согласуется ли эта формула с экспериментальными данными, когда $t = 0$ и когда t очень велико?

Поскольку показатель степени экспоненциальной функции должен быть просто числом, не имеющим размерности, величина RC должна иметь размерность времени. На самом деле так оно и есть, в чем вы можете убедиться самостоятельно. Напомним, что $R = U/I$, $C = q/U$ и $I = \Delta q/\Delta t$. Когда R выражено в омах, C – в фарадах, время RC получается в секундах.

В момент размыкания ключа в нашей цепи $t = 0$. В более поздний момент времени, когда $t = RC$,

$$q = q_0 e^{-(1/RC)RC} = q_0 e^{-1} = \frac{q_0}{e} \approx \frac{1}{2{,}7} q_0.$$

Характерное время RC называется постоянной времени τ для данной цепи. Это время, требующееся для того, чтобы в такой цепи заряд уменьшился до величины $1/e = 1/2{,}7$ от его первоначального значения. Время, требующееся для того, чтобы заряд уменьшился до половины его первоначального значения, называется периодом полураспада: $t_{1/2} = 0{,}69\tau = 0{,}69RC$.

Вопрос 21-2

Сколько времени требуется для того, чтобы заряд на конденсаторе уменьшился до половины своего первоначального значения, если конденсатор в нашей цепи имеет емкость 1 мкФ и сопротивление резистора равно 1 МОм? Исчезнет ли когда-нибудь запасенный заряд полностью?

По мере стекания запасенного заряда конденсатор теряет энергию. При стекании небольшой доли заряда теряемая энергия равна произведению этого заряда и разности потенциалов на

конденсаторе в этот момент времени:

$$\Delta U_C = \Delta q (q/C),$$

теряемая мощность равна

$$P = \Delta U_C/\Delta t = (\Delta q/\Delta t)(q/C) = Iq/C.$$

Закон Кирхгофа для данной цепи имеет вид

$$q/C - IR = 0.$$

Поэтому теряемая конденсатором мощность равна

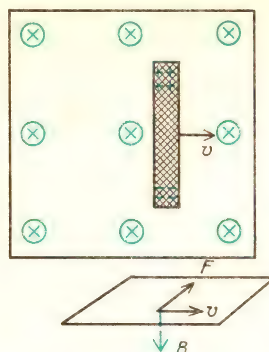
$$P = Iq/C = I(IR) = I^2R.$$

Как мы видим, теряемая конденсатором мощность в процессе его разрядки как раз равна мощности, рассеиваемой в резисторе и превращающейся в тепло.

В главе 19 было сказано, что после замыкания цепи постоянного тока проходит небольшой промежуток времени, в течение которого устанавливается движение зарядов и ток становится постоянным. Теперь мы в состоянии подсчитать порядок этого промежутка времени для типичной цепи. Постоянная времени зависит от емкости и сопротивления рассматриваемой цепи. Провода и другие компоненты электрической цепи обладают емкостью, даже если она и не выглядит как конденсаторы. Емкость зависит от размеров тела и от его близости к земле или к другим компонентам цепи. Типичная цепь, состоящая из батарейки, проводов, электрической лампочки и выключателя, может иметь емкость порядка 10^{-10} Ф. Если сопротивление этой цепи равно 10 Ом, то постоянная времени равна $RC = 10^{-9}$ с. Следовательно, за одну наносекунду (или около этого) заряды распределятся вдоль цепи таким образом, чтобы установился постоянный ток.

ДВИЖЕНИЕ ПРОВОДНИКА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Теперь мы собираемся предложить мысленный эксперимент, который сначала будет выглядеть как простое применение полученных ранее результатов. Но будьте внимательны! Анализируя его, мы экстраполируем наши доводы и придем к заключению, которое совсем не содержится в исходных законах и формулах. Для начала просто рассмотрим, к чему приведет движение металлического стержня в магнитном поле, направленном от нас, за рисунок*). Стержень движется в направлении, перпендикулярном к магнитному полю и



к самому себе. В нейтральном проводящем стержне содержится равное число положительных и отрицательных зарядов. Они вынуждены двигаться вместе со стержнем в магнитном поле так, что действующая на каждый из них сила дается выражением

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

На нашем рисунке сила, действующая на положительные заряды, направлена вверх, а на отрицательные – вниз. Поскольку некоторые электроны могут свободно перемещаться, они будут скапливаться в нижней части стержня, в результате чего верхняя часть будет заряжаться положительно. В результате такого скопления зарядов возникнет электростатическое поле, которое будет препятствовать любому дальнейшему перемещению электронов. Когда электростатическая сила уравновешивает силу, создаваемую движением зарядов в магнитном поле, электрическое и магнитное поля должны быть связаны следующим образом:

$$qE = qvB, \quad E = vB.$$

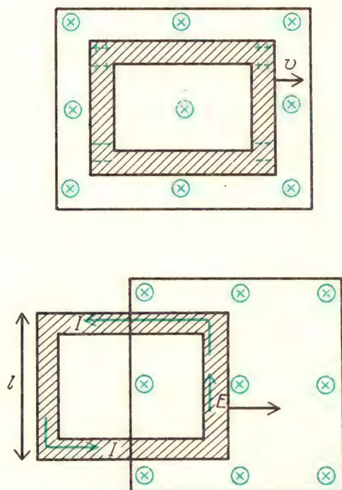
Наблюдатель, движущийся вместе со стержнем, мог бы объяснить такое перемещение зарядов, считая, что в его си-

*) В дальнейшем везде точка на рисунке изображает поле, направленное на нас, крестик – от нас, за рисунок. (*Примеч. ред.*)

стеме отсчета существует направленное вверх электрическое поле.

Вопрос 21-3
После того как это начальное движение зарядов завершится, на находящийся внутри движущегося стержня пробный заряд не будет действовать никакая результирующая сила. Каким образом движущийся вместе со стержнем наблюдатель может выяснить, что на концах стержня существуют скопления зарядов?

До сих пор в нашем мысленном эксперименте нам не удалось получить сколько-нибудь продолжительного тока. Скопления зарядов, возникшие после начального их перемещения, препятствуют любому дальнейшему движению. С подобной ситуацией мы сталкиваемся в электрических батареях. Чтобы создать ток, требуется замкнуть цепь между ее положительным и отрицательным полюсами. На рисунке показано, как можно проложить для зарядов



путь возвращения, образовав замкнутый проводящий контур. К сожалению, в таком устройстве возникают скопления зарядов в обоих вертикальных плечах. И опять никакого тока не возникает. Эту трудность можно обойти, если просто держать путь возвращения зарядов за пределами магнитного поля, как показано в нижней части рисунка. Только в передней части движущегося контура генерируется электрическое поле, которое затем гонит заряды по замкнутому контуру. Разность потенциалов между верхним и нижним концами этой передней стороны контура равна произведению электрического поля и длины данной стрелки. Подобный источник разности потенциалов ранее мы называли электродвижущей силой (или сокращенно э. д. с.) и обозначали символом $\mathscr{E}$:

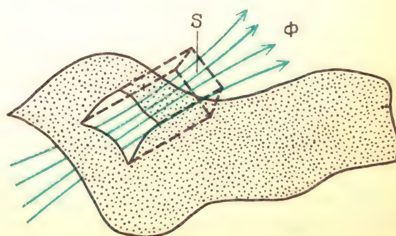
$$-\mathscr{E} = El = (vB)\,l.$$

Знак минус появляется перед $\mathscr{E}$ из-за того, что поле направлено вверх, в направлении движения положительного заряда, но в этом направлении происходит *падение* напряжения. Обратите внимание, что вместо электрического поля E мы подставили его выражение через магнитное поле и скорость движения контура.

Существует еще один способ описать скорость движения контура в магнитном поле. В данном частном случае этот другой способ получается просто в результате геометрической подстановки, но затем мы будем утверждать, что этот результат верен и в общем случае при любой геометрии. Заметьте, что по мере вхождения передней стороны контура в магнитное поле все большее и большее число линий магнитного поля пронизывает контур. Мы можем связать напряженность магнитного поля, размеры и скорость контура с числом линий магнитного поля, входящих в замкнутый контур:

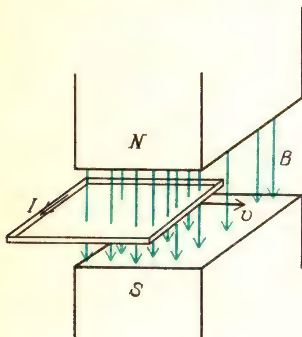
$$-\mathscr{E} = lvB = l\frac{\Delta x}{\Delta t}B = \frac{\Delta S}{\Delta t}B = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t},$$

где $\Phi = BS$ — полное число линий магнитного поля, проходящих через перпендикулярную площадку.



Вопрос 21-4
Почему lv превращается в $\Delta S/\Delta t$? Ведь замкнутый контур не расширяется. Откуда же возникает скорость изменения его площади?

Полное число линий поля называется *потоком* (Ф). Магнитный поток через некоторую площадку равен произведению магнитного поля B и ее площади S в случае, если линии магнитного поля перпендикулярны к площадке. В соответствии с нашим выводом, создаваемая вдвиганием контура в магнитное поле э. д. с. равна $\Delta\Phi/\Delta t$, т. е. скорости



изменения во времени магнитного потока, пронизывающего замкнутый контур. (Напомним, что магнитный поток можно представить себе как полное число линий магнитного поля. Э. д. с. зависит не от *числа* линий поля, пронизывающих замкнутый контур, а от того, насколько *быстро* эти линии выходят из контура или входят в него.)

Чтобы придать некую физическую реальность нашему мысленному эксперименту, припишем некоторые разумные значения магнитному полю, скорости и размерам контура. Если длина передней стороны контура равна 1 м и он движется со скоростью 1 м/с в магнитном поле, создаваемом большим магнитом с $B = 1$ Тл, какие применяются для научных исследований, то создаваемая э. д. с. равна

$$\mathscr{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -lvB =$$

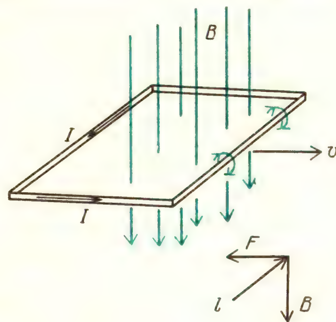
$$= -1 \text{ м} \cdot 1 \text{ м/с} \cdot 1 \text{ Тл} = -1 \text{ В}.$$

Оказывается, что в данном случае для создания циркулирующего тока достижима э. д. с. в 1 В. Ток направлен против часовой стрелки в соответствии с нашим обычным соглашением, касающимся отрицательного знака для э. д. с.

ДЕЙСТВИЕ ИНДУКЦИОННОГО ТОКА – ЗАКОН ЛЕНЦА

Движение *проводящего* замкнутого контура в магнитном поле приводит к возникновению тока в этом контуре. Такой ток называют «индукционным». Примем теперь во внимание тот факт, что индукционный ток должен взаимодействовать с магнитным полем, которое и вызвало его появление. На провод с током, перпендикулярный к магнитному полю, действует сила $\mathbf{F} = I(\mathbf{l} \times \mathbf{B})$. Найдем направление этой силы в случае контура, которым мы пользовались в нашем мысленном эксперименте.

Как показано на рисунке, правило правой руки для векторного произведения предсказывает, что результирующая



сила будет направлена влево в направлении, противоположном скорости. К такому же результату мы придем, если воспользуемся соображениями о сложении магнитных полей. Как показано на рисунке, индукционный ток создает магнитное поле, которое усиливает исходное магнитное поле перед передним краем и уменьшает поле позади него. Поэтому в соответствии с нашей моделью действующая на проводник результирующая сила направлена влево, в направлении, противоположном его скорости.

Существует еще один способ, позволяющий предсказать направление индукционного тока. Обратите внимание, что создаваемое индукционным током

магнитное поле стремится скомпенсировать новые линии магнитного поля, которые оказываются охваченными движущимся контуром. Обобщение, связанное с направлением индукционного тока, носит название закона Ленца. Русский ученый Эмилий Христианович Ленц (1804–1865) предположил, что индукционный ток всегда имеет такое направление, чтобы противодействовать изменению магнитного поля, в результате которого этот ток первоначально появился. На вдвигающийся в магнитное поле замкнутый контур действует сила сопротивления. Более того, индукционный ток создает магнитное поле, которое стремится поддержать неизменным магнитный поток через замкнутый контур.

Рассмотрите, что было бы в противоположном случае! Если бы индукционный ток создавал такое поле, что на контур действовала бы сила в направлении его движения, то движение контура в этом направлении происходило бы с ускорением. Увеличение скорости приводило бы к возрастанию индукционного тока. Этот ток в свою очередь приводил бы к увеличению силы, которая обеспечивала бы дальнейший рост скорости. Мы получили бы вечный двигатель, но на самом деле так, конечно же, не бывает. (Позже в этой главе мы увидим, как можно сделать индукционный двигатель, действие которого напоминает только что описанный эффект. Однако необходимая для этого энергия поставляется непрерывно изменяющимися магнитными полями.)

Раз закон Ленца требует, чтобы индукционный ток создавал силу сопротивления, действующую на движущийся замкнутый контур, то нам придется обеспечить равную по модулю силу, направленную вперед, чтобы поддержать движение контура с неизменной скоростью v. Эта сила равна

$$F = IlB.$$

Индукционный ток удовлетворяет закону Ома для цепи, образованной этим контуром:

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{Blv}{R}.$$

Поэтому сила, которую мы должны приложить, равна

$$F = \frac{Blv}{R} lB = \frac{B^2 l^2 v}{R}.$$

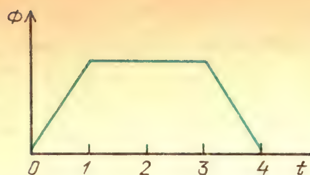
Мощность, которую мы должны обеспечить для того, чтобы эта постоянная сила действовала на тело, движущееся со скоростью v, равна

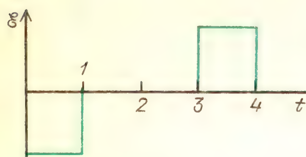
$$P = Fv = \frac{B^2 l^2 v^2}{R}.$$

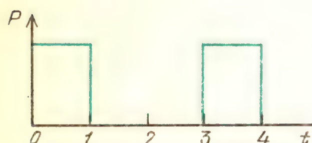
Вопрос 21-5

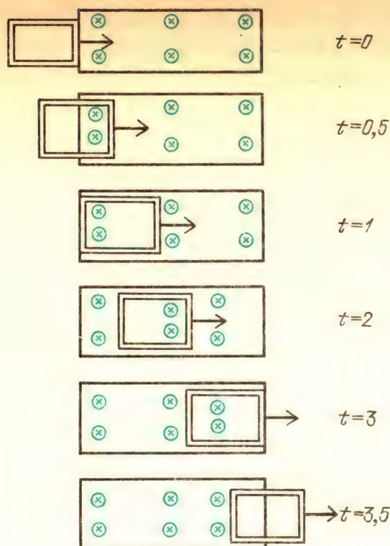
Чтобы поддержать движение контура с постоянной скоростью, нужно подводить к нему энергию. Однако эта энергия не превращается в кинетическую энергию контура, поскольку его скорость остается постоянной. Куда же идет подводимая энергия?

На следующем рисунке показано, как изменяются со временем три различные физические величины, когда контур пересекает магнитное поле. Здесь изображены графики магнитного потока Φ (через поверхность, ограниченную контуром), возникающей в контуре э. д. с. $\mathscr{E}$ и требуемой мощности P. До сих пор мы рассматривали лишь то, что происходит, когда контур входит в магнитное поле. Как только контур целиком войдет в магнитное поле, вдоль его задней стороны будет действовать индукционное электрическое поле, имеющее такое же направление, как и поле вдоль передней стороны. Полная э. д. с. в замкнутом контуре равна нулю и тока в нем нет. Когда передняя сторона контура выходит из магнитного поля, магнитный поток в контуре уменьшается и э. д. с. создается в его задней стороне, в то время как передняя сторона замыкает цепь для возвращения зарядов. Э. д. с. и ток направлены теперь по часовой стрелке. Обратите внимание, что направление э. д. с. и изменение магнитного потока согласуется с формулой $\mathscr{E} = -\Delta\Phi/\Delta t$. Э. д. с. противоположна по знаку тангенсу угла наклона кривой магнитного потока как функции времени. Когда тангенс угла наклона $\Phi(t)$ положителен, э. д. с. отрицательна, и наоборот. Мощность, потребная для под-









держания постоянной скорости контура и равная, конечно же, рассеиваемой в нем мощности, положительна и не зависит от полярности э. д. с. и направления электрического тока.

ЗАКОН ФАРАДЕЯ – НЕОЧЕВИДНОЕ ОБОБЩЕНИЕ

Для частного случая, когда проводящий контур имеет прямоугольную геометрическую форму и входит в однородное магнитное поле, выше было показано, что индуцируемая э. д. с. может быть выражена следующим образом:

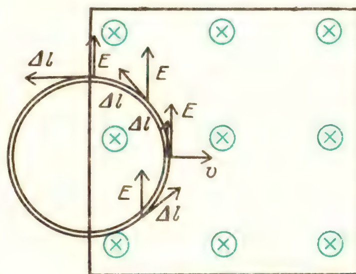
$$\mathscr{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

В этом случае э. д. с. была просто равна произведению индуцированного электрического поля и протяженности участка контура, в пределах которого это поле существовало: $\mathscr{E} = -El$. Когда электрические поля индуцируются в других участках контура, произведения этих полей и соответствующих расстояний складываются в полную э. д. с. для всего контура. Теперь мы высказываем утверждение, что независимо от геометрической формы замкнутого контура полная действующая в нем э. д. с. равна скорости изменения во времени магнитного потока через ограниченную этим контуром поверхность. Это обобщение называется законом Фарадея:

$$\mathscr{E} = \sum E\Delta l = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Применим закон Фарадея к ряду частных случаев; каждый из них будет лишь немного отличаться расположением или образом действий от предыдущего примера.

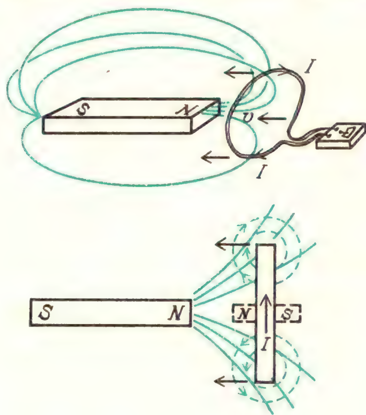
1. На этом рисунке показан проводник с током в форме кольца, входящий



в область однородного магнитного поля с некоторой скоростью v. Единственное отличие этой ситуации от случая прямоугольного контура заключается в том, что здесь индуцированное электрическое поле не везде совпадает по направлению с траекторией движения зарядов. Э. д. с. на каждом коротком отрезке равна скалярному произведению напряженности электрического поля и элементарного перемещения: $\Delta\mathscr{E} =$

$= -\mathbf{E}\cdot\Delta\mathbf{l}$. Для сложения э. д. с. на всех отрезках пришлось бы воспользоваться интегрированием, хотя в данном случае это была бы простая процедура. Но на самом деле нет необходимости складывать произведения напряженности электрического поля и отрезков траектории. Полная э. д. с. во всем замкнутом контуре пропорциональна скорости изменения во времени магнитного потока через ограниченную контуром поверхность. Это изменение потока пропорционально изменению площади поверхности, находящейся в магнитном поле.

2. На следующем рисунке показан проводник с током в форме петли (виток), движущийся к концу постоянного стержневого магнита, расположенного вдоль оси симметрии петли. Чем ближе

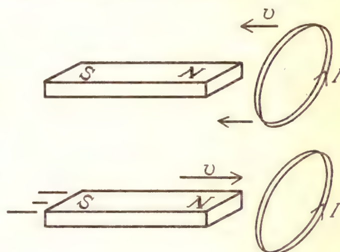


к концу магнита придвигается петля, тем большее число линий магнитной индукции проходит сквозь нее. При изменении магнитного потока сквозь петлю в ней возникает э. д. с. в соответствии с тем, как этого требует закон Фарадея. Направление индукционного тока в контуре будет таким, чтобы создаваемое им магнитное поле препятствовало движению, вызвавшему его появление. Поскольку петля с током действует подобно магнитному диполю, благодаря индукционному току она будет вести себя как небольшой стержневой магнит, северный полюс которого обращен в сторону северного полюса магнита, к которому она приближается. Индукционный ток, таким образом, вызывает отталкивание.

Вопрос 21-6

Что происходит с индукционным током, когда петля проходит вдоль всего стержневого магнита и удаляется от него с противоположной стороны?

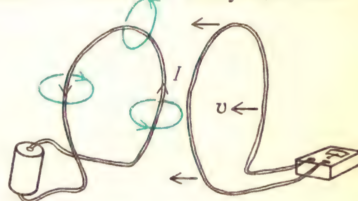
Обратите внимание, что до сих пор мы говорили только о контурах, вдвигаемых в магнитные поля или движущихся в полях. Следующий шаг обобщения очевидным образом справедлив для случая петли, проходящей вдоль



Индукционный ток зависит от относительной скорости

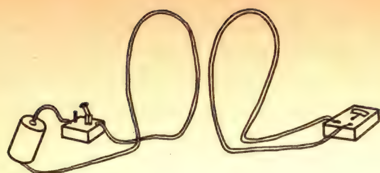
стержневого магнита: нет никакой разницы, движется ли петля, охватывающая магнит, или же магнит движется сквозь петлю в противоположном направлении. Здесь важна только *относительная* скорость.

3. Следующий случай можно рассматривать как простое продолжение предыдущего. Вместо постоянного стержневого магнита здесь у нас эквивалентный магнитный диполь, создаваемый петлей с током. Естественно ожидать таких же индукционных токов



в первичном витке, какие были в случае постоянного магнита. Как и раньше, важна только относительная скорость двух витков.

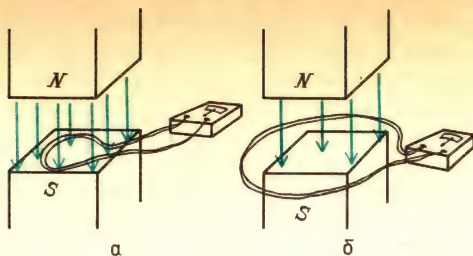
4. Еще раз рассмотрим два витка, расположенные друг перед другом, но теперь не будем требовать относительного движения этих витков. Вместо этого первичный виток снабдим ключом,



чтобы ток в нем можно было включать или выключать. Когда этот ток выключен, первичный виток не создает магнитного поля, которое пронизывало бы вторичный виток. Однако как только ключ замыкается, первичный виток создает магнитное поле, линии которого сцеплены со вторичным витком. Это означает, что магнитный поток через вторичный виток возрастал со временем и при этом во вторичном витке существовала э. д. с., создающая индукционный ток.

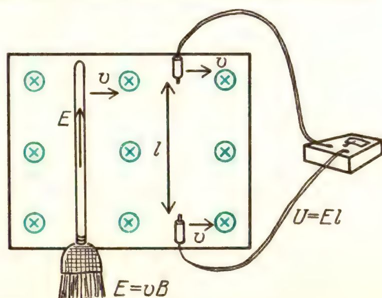
5. Каждый из этих случаев электромагнитной индукции лишь слегка отличается от предыдущего, и все же заметьте, как далеко продвинулись мы от исходной ситуации с прямоугольным контуром, вдвигаемым в магнитное поле. В том первоначальном случае мы могли объяснить появление э. д. с. индукции действием силы Лоренца на движущийся в магнитном поле заряд. В примере 4 не было вообще никакого механического движения и тем не менее индукционный ток возникал. Мы можем, однако, пытаться объяснить этот эффект хотя бы тем, что свободные электроны вторичного витка находятся в области изменяющегося магнитного поля, которое каким-то образом действует на них с некоторой силой.

На следующем рисунке показаны два разных расположения витка в магнитном поле. В обоих случаях магнитное поле можно включать, увеличивая его напряженность от нуля до некоторого максимального значения. Ситуация, изображенная на рис. *а*, по существу, такая же, как в рассмотренном выше случае, и мы можем ожидать возникновения э. д. с. индукции. Однако в случае, показанном на рис. *б*, есть одна специфическая черта. Здесь существует изменяющийся магнитный поток, проходящий по центру витка, но нигде *в самом проводнике магнитного поля нет.* И тем не менее в соответствии с законом Фарадея в этом контуре существует э. д. с. индукции, равная по модулю скорости изменения магнитного потока, пронизывающего контур.



Теперь мы видим, почему закон Фарадея нельзя рассматривать как очевидное продолжение нашей прежней формулы, выражающей силу, действующую на движущийся в магнитном поле заряд. В самом деле, рассмотренные случаи описываются двумя различными физическими законами, любой из которых можно использовать и получить один и тот же результат при некотором геометрическом расположении, но в других определенных случаях эти законы применимы каждый сам по себе.

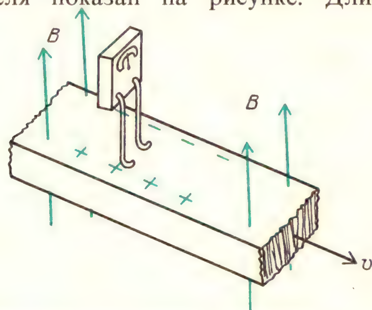
Рассмотрим, например, наше первоначальное геометрическое расположение, когда проводящий стержень двигался перпендикулярно к магнитному полю. Мы утверждали, что сила Лоренца, действующая на движущиеся вместе со стержнем в магнитном поле заряды, заставляет их двигаться по стержню так, как если бы на них действовало электрическое поле $E = vB$. Однако в этом месте наших рассуждений мы никак не использовали проводимость стержня. Фактически точно такое же



электрическое поле возникло бы и в метле, если бы ее двигали поперек магнитного поля. Собственно, и в метле нет никакой нужды. При определенном

расположении вольтметра и соединительных проводов можно зарегистрировать ту же самую э. д. с., создаваемую тем же самым электрическим полем, действующим на расстоянии l, даже тогда, когда зонды вольтметра движутся без какого бы то ни было стержня между ними*). Как мы видели раньше, магнитное поле в одной системе отсчета может превратиться в электрическое поле в другой системе отсчета, движущейся с постоянной скоростью относительно исходной.

Пример зависимости электрического и магнитного полей от скорости наблюдателя показан на рисунке. Длинная



проводящая полоса движется вдоль всей своей длины перпендикулярно к магнитному полю. Если амперметр снабжен скользящими контактами, как показано на рисунке, он зарегистрирует постоянный ток при движении проводящей полосы. В одном из следующих разделов мы увидим, как Фарадей с помощью подобного геометрического расположения получил несовершенный генератор тока. Получающийся в данном случае эффект можно рассматривать как разновидность эффекта Холла, описанного на с. 241. На свободные электроны в проводящей полосе действует сила, перпендикулярная к скорости пластины и к магнитному полю. Эта сила направлена поперек полосы и поддерживает движение электронов через амперметр, создавая непрерывный электрический ток. Если, однако, амперметр и вся система обнаружения тока движется в магнитном поле вместе с проводящей полосой, то никакого тока не будет. В этом случае в верхней части контура, включающей амперметр, тоже возникает э. д. с., компенсирующая эффект, создаваемый движением полосы.

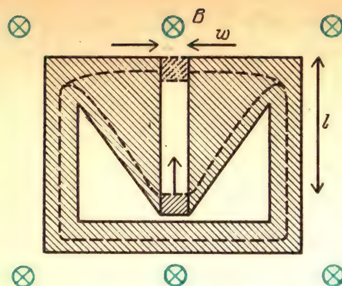
Вопрос 21-7

Предположим, что самолет летит на север сквозь магнитное поле Земли, имеющее сильную вертикальную составляющую напряженности поля. Возникает ли разность потенциалов от конца одного крыла до конца другого?

В случае движущейся проводящей полосы не существует никакого замкнутого контура, в котором был бы изменяющийся магнитный поток. И тем не менее получаем в полосе индуцированное электрическое поле вследствие относительного движения. Возможен также и противоположный случай, когда магнитный поток через некоторый замкнутый контур изменяется и все же никакой э. д. с. индукции нет. Такая ситуация показана на рис. на с. 274. Магнитное поле здесь остается постоянным, но охватываемая проводящим контуром площадь сильно изменяется, когда крошечный контакт скользит вдоль зазора. Если бы в данной ситуации был применим закон Фарадея, мы могли бы получать большие значения э. д. с. и индукционного тока, совершая ничтожную работу по передвижению маленького контакта. Очевидно, что закон Фарадея нельзя применять к электрической цепи, у которой траектория движения зарядов в веществе изменяется.

Подведем краткие итоги. Два совершенно различных физических закона ответственны за возникновение э. д. с. индукции. Первый из них, носящий имя Г. А. Лоренца (1853 – 1928), описывает действие электрического и магнитного полей на электрический заряд. Он подразумевает также, что движение в магнитном поле эквивалентно некоторому

*) Это утверждение не следует понимать буквально. В движущейся системе отсчета действительно существует электрическое поле, но обнаружить его обычным вольтметром невозможно. Оба зонда вольтметра при помещении в электрическое поле все равно будут иметь одинаковый потенциал (а не потенциалы тех точек поля, в которые они помещены), так как зонды соединены друг с другом через вольтметр, а все точки проводника, по которому не идет ток, имеют одинаковый потенциал. (*Примеч. пер.*)



Поверхность медного листа перпендикулярна магнитному полю. При вытягивании контакта изменяется возможная траектория тока, увеличивая площадь контура в магнитном поле. Поскольку здесь есть ΔS, то, очевидно, есть и $\Delta\Phi$. Если, однако, здесь была бы э. д. с. $\mathscr{E} = -(\Delta\Phi/\Delta t)$, то возник бы ток, сопровождающийся выделением джоулева тепла. Работа, совершаемая при вытягивании контакта, равна $A = lBIw$, где l – его перемещение, I – ток, B – напряженность магнитного поля и w – ширина зазора. Поскольку w может быть сделано сколь угодно малым, совершаемая работа должна стремиться к нулю. Поэтому здесь не может быть никакой э. д. с. $\mathscr{E}$.

электрическому полю в связанной с движущимся телом системе отсчета:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

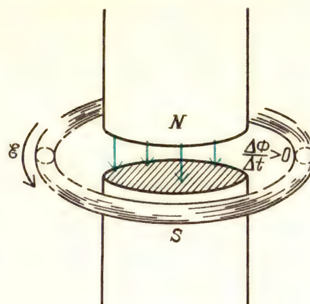
Другой закон электромагнитной индукции – закон Фарадея:

$$\mathscr{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ НЕПОТЕНЦИАЛЬНО

Когда мы впервые ввели по определению потенциал электрического поля, то имели дело с некоторым свойством электрических полей вокруг неподвижных зарядов. Если в таком поле переместить пробный заряд вдоль любого замкнутого пути, полная работа поля будет равна нулю. В противном случае, как было указано в главе 18, не сохранялась бы энергия. Если бы можно было переместить пробный заряд по замкнутому контуру и получить при этом какой-либо выигрыш в энергии, можно было бы построить вечный двигатель.

Теперь мы выяснили, что можно получить э. д. с. в замкнутом контуре, если изменяется пронизывающее его магнитное поле. В системе, показанной на рисунке, существует постоянное электрическое поле, направленное вдоль кругового пути, окружающего непрерывно возрастающее магнитное поле в центре.

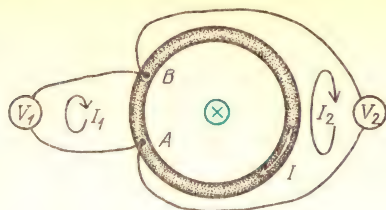


(Конечно, это магнитное поле может расти лишь в течение ограниченного времени.) Если дать возможность электрическому заряду двигаться вдоль такого пути, на него будет все время действовать сила и он будет набирать энергию. Эта энергия в джоулях в расчете на 1 кулон заряда, набираемая за 1 оборот вдоль контура, как раз равна значению э. д. с. в вольтах. Чтобы заряд набрал эту добавочную энергию, ему не обязательно двигаться по окружности. В соответствии с законом Фарадея точно такая же полная э. д. с. существует вдоль любого замкнутого пути, охватывающего изменяющийся магнитный поток.

Нарушает ли это явление закон сохранения энергии? Вовсе нет. В случае статических полей не существует источника, который снабжал бы энергией заряженную частицу, перемещающуюся вдоль замкнутого пути и возвращающуюся в исходную точку. В случае изменяющегося магнитного потока энергия, сообщаемая пробному заряду, черпается из источника, который обеспечивает изменение магнитного поля. Когда мы будем описывать работу трансформатора, то увидим, каков здесь механизм передачи энергии.

Хотя э. д. с. индукции измеряется в вольтах, нередко возникает путаница, когда начинают думать о разности потенциалов между двумя точками в из-

меняющемся магнитном поле. Предположим, например, что круговое кольцо на этом рисунке имеет сопротивление



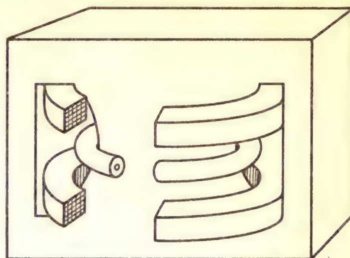
$\mathscr{E} = 1$ В, $R = 1$ Ом,
$U_1 = (1/6)$ В, $U_2 = (5/6)$ В, $I = 1$ А,
$I_1 \ll I$, $I_2 \ll I$

1 Ом и пронизывается изменяющимся магнитным потоком, который создает в таком контуре э. д. с. 1 В. Пока поле изменяется с такой скоростью, в кольце будет идти ток 1 А. Чему равна при этом разность потенциалов между точками A и B? Поскольку это концы дуги, составляющей 1/6 длины окружности кольца, и вдоль всего кольца э. д. с. равна 1 В, можно утверждать, что между точками A и B будет разность потенциалов (1/6) В. Но с другой стороны, точки A и B являются также концами дуги, составляющей 5/6 длины окружности. Поэтому разность потенциалов между A и B должна бы составлять (5/6) В. Фактически из двух вольтметров, присоединенных к кольцу так, как показано на рисунке, показание вольтметра V_1 будет равно (1/6) В, а показание V_2 будет равно (5/6) В. И это несмотря на то, что оба вольтметра присоединены в одних и тех же точках.

Вопрос 21-8
Применимы ли по-прежнему в подобной ситуации правила Кирхгофа? Попытайтесь сложить э. д. с. и падение напряжения IR вдоль нескольких замкнутых контуров, показанных на предыдущем рисунке.

Дополнительный материал

В ускорителе электронов, изобретенном Дональдом Керстом в 1941 году, используются замкнутые линии напряженности электрического поля, окружающие изменяющийся магнитный поток. Такой ускоритель был назван бетатроном. Схематический вид этой машины в разрезе показан на рисунке. Тороидальная вакуумная камера окружает сердцевину магнитных полей. Магнитный



поток через середину камеры возрастает и убывает по синусоидальному закону обычно с частотой 60 Гц. Если электрон удается удерживать на круговой линии напряженности электрического поля, за каждый оборот он будет набирать энергию. Приобретаемая за 1 оборот энергия равна $\Delta W = q\mathscr{E} = q(\Delta\Phi/\Delta t)$. В некоторых машинах, построенных для ускорения электронов до энергий порядка 100 МэВ, изменяющийся магнитный поток рассчитывался так, чтобы электрон набирал около 10 000 эВ за каждый оборот.

Электрон, ускоряемый постоянной силой, не оставался бы на круговой траектории, если бы не было удерживающей его центростремительной силы. Следовательно, вакуумная камера должна находиться в магнитном поле, напряженность которого тоже должна изменяться синхронно с изменением импульса ускоряемых электронов пучка. Уловка, благодаря которой такая машина оказывается работоспособной, заключается в том, чтобы синхронизовать магнитные поля в сердцевине и на траектории пучка. Оказывается, что связь этих двух полей должна удовлетворять простому условию. Обозначим $B_{ср}$ среднее магнитное поле в сердцевине. Усреднение производится от $r = 0$ вплоть до радиуса электронной орбиты r. Э. д. с. на этой круговой траектории равна просто произведению одинаковой вдоль всей траектории напряженности электрического поля на длину траектории, т. е. на длину окружности:

$$\mathscr{E} = \sum \mathbf{E}\cdot\Delta\mathbf{l} = -\Delta\Phi_{ср}/\Delta t,$$

$$2\pi r E = \pi r^2 (\Delta B_{ср}/\Delta t),$$

$$E = (r/2)(\Delta B_{ср}/\Delta t).$$

Скорость изменения импульса электрона равна силе, действующей на электрон:

$$\Delta p/\Delta t = F = qE = q(r/2)(\Delta B_{ср}/\Delta t).$$

Таким образом, приращение импульса электрона, обеспечиваемое изменением магнитного поля в сердцевине, равно

$$\Delta p = (qr/2)\,\Delta B_{ср}.$$

Одновременно на электрон действует центростремительная сила, обусловленная его движением перпендикулярно к магнитному полю на орбите $B_{орб}$:

$$qvB_{орб} = mv^2/r,\ B_{орб} = mv/(qr).$$

Это соотношение остается справедливым даже при релятивистских скоростях, если понимать mv как релятивистский импульс p:

$$B_{орб} = p/(qr),\ p = qrB_{орб}.$$

По мере возрастания импульса электрона должно пропорционально увеличиваться и магнитное поле на орбите. Приращения импульса и магнитного поля связаны соотношением

$$\Delta p = qr\Delta B_{орб}.$$

Мы получили два условия, которые должны выполняться, когда растет импульс электрона. Приращение импульса, вызываемое э. д. с. индукции, пропорционально изменению среднего по площади орбиты магнитного поля сердцевины. Чтобы поддержать круговую орбиту, это изменение импульса должно сопровождаться изменением магнитного поля на орбите. Поэтому

$$(qr/2)\,\Delta B_{ср} = qr\Delta B_{орб}.$$

Упомянутое простое соотношение между средним магнитным полем сердцевины и магнитным полем на радиусе орбиты имеет вид

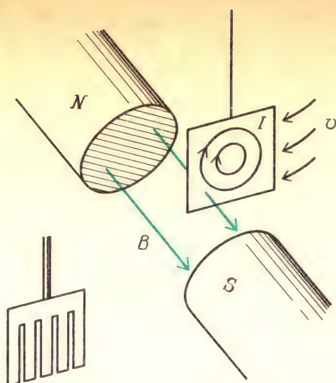
$$\Delta B_{ср} = 2\Delta B_{орб}.$$

Бетатроны с максимальной энергией в несколько сотен мегаэлектрон-вольт были построены для исследований субатомных частиц высоких энергий, а также для генерации рентгеновского излучения в технике и в медицине. Однако практически энергия, которую можно получить с помощью машины такого рода, ограничена из-за добавочных энергетических потерь, о которых мы до сих пор не упоминали. Как мы увидим в главе 22, движущаяся с ускорением заряженная частица излучает электромагнитную энергию в форме радиоволн, света или рентгеновского излучения. Электроны, движущиеся по окружности в бетатроне, подвержены сильному центростремительному ускорению и поэтому излучают энергию, которую нужно непрерывно дополнительно подводить в процессе ускорения. При очень высоких энергиях радиационные потери становятся очень большими, и не удается удовлетворить специальным условиям для магнитного поля в бетатроне. Для ускорения электронов до энергий свыше нескольких сот мегаэлектрон-вольт можно использовать либо линейные ускорители, либо циклические машины другого типа, называемые синхротронами, в которых обеспечивается подвод дополнительной энергии, необходимой для компенсации радиационных потерь.

ВИХРЕВЫЕ ТОКИ

Магнит не оказывает почти никакого действия на кусок меди, если последний неподвижен. Если, однако, магнит и медь движутся друг относительно друга или если магнитное поле в меди возрастает или убывает со временем, то возникает взаимодействие. Изменяющееся магнитное поле или движение проводника через поле приводит к возникновению э. д. с., создающей ток. Индукционные токи взаимодействуют с магнитным полем, в результате чего на проводник действует сила. Часто эти токи закручиваются в проводнике вдоль передней и задней границ области движущегося магнитного поля. Из-за их сходства с водоворотами, возникающими вокруг движущегося в воде тела, эти индукционные токи называют вихревыми токами. В некоторых электрических машинах они только мешают, в других они положены в основу принципа действия этих машин.

В «Знакомстве с явлениями» была приведена иллюстрация прибора, используемого для демонстрации эффекта вихревых токов. Медная пластина качается на маятнике в зазоре сильного магнита. Электромагнитное взаимодействие быстро приводит маятник в состояние покоя. На рисунке показаны направления вихревых токов. Эти индук-



ционные токи при взаимодействии с магнитным полем дают эффект торможения. Эффект можно ослабить, если сделать прорези в медной пластине, как показано на рисунке слева. Движение пластины с прорезями в магнитном поле создает такую же э. д. с., но теперь уже невозможны непрерывные траектории для токовых петель.

Вызываемая вихревыми токами тормозящая сила пропорциональна относительной скорости проводника и магнитного поля. В некоторых электрических машинах этот эффект преднамеренно используется в качестве тормоза. Например, радиальные пилы обычно снабжаются подковообразным магнитом, который при отключении привода пилы опускается над ее лезвием. Возникающие вихревые токи быстро останавливают пилу.

Вопрос 21-9

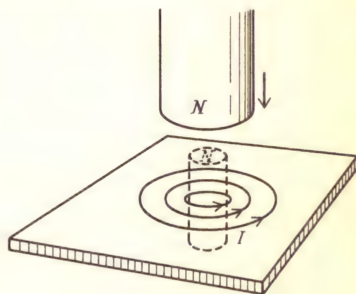
Вращающийся диск пилы обладает кинетической энергией. Куда уходит эта энергия, когда вихревые токи останавливают диск?

Вихревые токи должны быть сведены к минимуму в тех частях электрических машин, которые вращаются в магнитных полях, и в сердечниках трансформаторов, где магнитные поля непрерывно изменяются по модулю и направлению. Вихревые токи в роторах электродвигателей или генераторов вызывали бы торможение. В сердечниках трансформаторов вихревые токи приводили бы к джоулевым потерям. Чтобы избежать возникновения вихревых токов, роторы или сердечники изготавливаются из тонких железных листов, разделенных еще более тонкими слоями изоляционного материала, такого, как эмаль или слюда. Такие

Сердечник этого трансформатора набран из тонких железных листов

слоистые куски железа обеспечивают хорошие траектории для магнитных полей, но не допускают возникновения электрических токов проводимости в перпендикулярном направлении. Жужжащий звук, издаваемый некоторыми мощными трансформаторами, вызывается периодическими сжатиями слоистых сердечников.

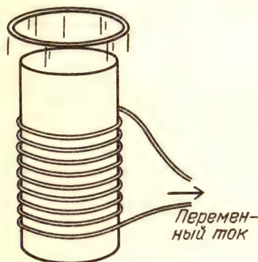
Если стержневой магнит движется в направлении медной пластины, как показано на рисунке, возникающие в пластине вихревые токи будут препятствовать проникновению в пластину надвигающегося магнитного поля. Петли индукционных токов образуют магнитный диполь, поле которого противодействует придвигаемому диполю. Из-за сопротивления медной пластины



электрические токи в ней затухают и направленная вверх сила, действующая на магнит, исчезает. Если бы, однако, вместо медной пластины был сверхпроводник, такой как свинцовая чаша при температуре, близкой к абсолютному нулю,

то вихревые токи не затухали бы. Эти индукционные токи достаточно сильны для того, чтобы полностью предотвратить проникновение любого магнитного поля в толщу сверхпроводника. Противодействующая приближающемуся магниту сила не прекращается и ее модуль достаточен для того, чтобы поддержать магнит плавающим в воздухе.

Вихревые токи могут генерироваться непрерывно с помощью переменного магнитного поля, возбуждаемого переменным током. На рисунке показано



подобное устройство, часто используемое в лекционных демонстрациях. Магнитное поле в сердечнике изменяется по модулю и направлению с частотой 60 Гц. В надетом на сердечник проводящем кольце по всей его окружности генерируется э. д. с., вызывающая в нем токи. Эти индукционные вихревые токи тоже изменяют направление с частотой 60 Гц, но в течение более половины каждого цикла ток имеет такое направление, что создаваемое им магнитное поле противодействует исходному полю. Получается эффектный результат. Действующие на кольцо силы отталкивают его от сердечника, и кольцо выстреливает в воздух.

ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛИ

Электродвигатели стали столь обыденны в нашей цивилизации, что трудно себе представить, насколько недавно они появились. Хотя Фарадей изготовил электродвигатель 150 лет тому назад, лишь в очень немногих американских домах можно было найти какую-либо вещь с электродвигателем вплоть до 1920-х годов. До той поры двигатели автомобилей запускали с помощью заводной рукоятки; половики чистили метелкой; будильники приводились в действие пружинами.

Существует много различных типов электродвигателей, и в конструкции большинства из них использована очень сложная инженерная техника. Например, эффективность преобразования энергии должна быть очень высокой. Если бы значительная доля потребляемой электрической энергии оставалась в самом двигателе, то развивающиеся в нем высокие температуры разрушили бы двигатель. На рисунке показана схема простого электродвигателя постоянного тока, иллюстрирующая основные

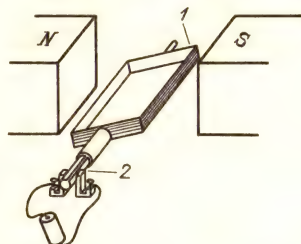


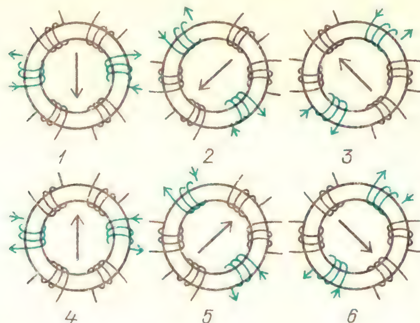
Схема простого электродвигателя постоянного тока: *1* – многовитковая обмотка, *2* – разрезные коммутационные контактные кольца для обращения направления тока и тем самым полярности магнитного поля обмотки через каждые 180°

используемые принципы электромагнетизма, но дающая лишь смутное представление о том, какие при этом требуются технические решения.

Принцип действия электродвигателя достаточно прост. На провод с током в магнитном поле действует сила $\mathbf{F} = I(\mathbf{l} \times \mathbf{B})$. Если провода намотаны на ротор, находящийся в постоянном магнитном поле, то ток в обмотке должен изменять направление через каждые пол-оборота, чтобы сила всегда действовала на ротор в одном направлении. При неподвижных северном и южном полюсах на обмотку ротора будет действовать переменный момент сил. Этот вращающий момент можно сгладить, навивая на ротор несколько обмоток и разделяя постоянные магнитные поля на несколько сегментов.

Возможны многие другие разновидности электродвигателей. Ток, питающий обмотки ротора, может и не менять направления, если внешние маг-

нитные поля изменяют свои направления. Большинство крупных электродвигателей питается так называемым трехфазным переменным током. Такой способ энергоснабжения позволяет без всяких движущихся механических частей

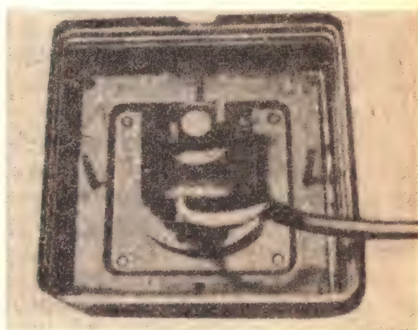


Когда обмотки питаются в определенной последовательности, как показано на рисунке, магнитное поле в центре тороидального железного кольца вращается. Трехфазный переменный ток при подключении каждой фазы к нужной паре катушек обеспечивает плавное питание обмоток в требуемой последовательности

получить в неподвижной части двигателя магнитное поле, которое непрерывно вращается. Обмотки ротора просто следуют за направлением магнитного поля, вращаясь с той же частотой.

Необязательно даже питать током обмотки ротора, по крайней мере с помощью проводов. Если окружающее ротор магнитное поле вращается, в короткозамкнутой обмотке ротора возникает индукционный ток. Результирующий эффект в сущности такой же, как и торможение, создаваемое вихревыми токами при движении проводника в магнитном поле. В данном случае вращающееся магнитное поле тянет за собой обмотки ротора. Они, однако, не могут вращаться с той же самой частотой. Если бы было так, то не было бы никакого относительного движения и, следовательно, не возникали бы индукционные токи. Поэтому все время должно происходить проскальзывание. Если неподвижные обмотки создают магнитное поле, вращающееся с частотой 60 Гц, ротор может следовать за ним с частотой, например, 58 Гц, когда двигатель не развивает большой мощности. При увеличении внешней нагрузки на двигатель индукционный ток в обмотке ротора должен возрасти. Это произойдет, если возрастет относительная скорость между обмоткой ротора и вращающимся магнитным полем; ротор будет проскальзывать немного больше и его частота уменьшится, например, до 56 Гц.

Некоторые двигатели, вроде тех, что используются в часах, должны быть привязаны к определенной частоте, определяемой частотой переменного тока, вырабатываемого электростанцией. Здесь приведена фотография такого

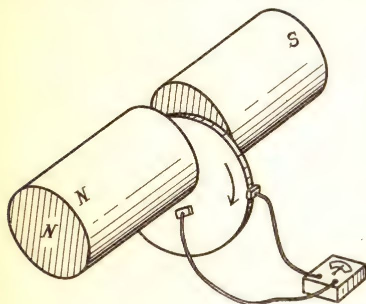

Двигатель с затененным полюсом для привода часов. Обратите внимание на проводящие витки, расположенные асимметрично на полюсах магнита, окружающих ротор

двигателя. Его ротор представляет собой стальной диск, который под действием вихревых токов ведет себя почти как постоянный магнит. Примитивное вращающееся магнитное поле создается обычным переменным током в результате попеременного «затенения» полюсов постоянного магнита. В проводящем кольце вокруг одного из полюсов электромагнита, питаемого переменным током (или в некоторых конструкциях в алюминиевой пластинке, помещенной над полюсом), возбуждаются индукционные токи, задерживающие изменение магнитного поля в этой области. В результате магнитное поле вблизи первого полюса отстает по фазе от поля вблизи второго полюса. Вращающийся магнит ротора притягивается к незатененному полюсу, а когда эта сила ослабевает, ротор продолжает движение под действием задержанного притяжения к затененному полюсу.

ЭЛЕКТРОГЕНЕРАТОРЫ

Когда Франклин занимался изучением электричества, для разделения и накопления зарядов ему приходилось использовать электростатические устройства. Экспериментаторы той эпохи умели получать высокое напряжение, но токи были либо малы, либо кратковременны. Открытие *электрохимических* элементов в начале 1800-х годов привело к быстрому развитию электромагнитов и электрохимии, которые требуют больших токов. Тем временем Фарадей открыл, что можно превращать механическую энергию в электрическую с помощью эффекта электромагнитной индукции. Потребовалось еще около 50 лет для широкого развития и внедрения больших электрогенераторов.

Одной из первых разновидностей генераторов Фарадея был так называемый униполярный генератор, схематически показанный на рисунке. В этом



Униполярный генератор Фарадея

устройстве использован принцип индукции, который был рассмотрен выше. Радиус вращающегося диска проходит сквозь магнитное поле, и поэтому вдоль радиуса генерируется э. д. с. Электрические заряды одного знака скапливаются на периферии, а заряды противоположного знака – на оси диска. Если замкнуть цепь с помощью скользящих контактов, то возникнет постоянный ток от оси вдоль радиуса и через внешнюю цепь назад к оси. Подобный генератор работает неплохо, но в нем не особенно эффективно использованы конструкционные материалы и занимаемое пространство. С немалыми трудностями связано также снятие больших токов с помощью скользящих контактов.

Генераторы и электродвигатели в основе своей устроены одинаково. Если обмотки ротора питаются током, ротор будет вращаться, поставляя механическую энергию. С другой стороны, если ротор приводится во вращение с помощью какого-нибудь внешнего источника механической энергии, с обмоток ротора можно снимать индукционный электрический ток и использовать его в другом месте. Некоторые электрические машины конструируются так, чтобы их можно было использовать любым из этих способов. Например, электродвигатели для поездов метро устроены так, что при торможении поезда вращение передается от колес двигателям, работающим в режиме генераторов и посылающим электроэнергию назад в энергосистему. Возникающее при этом сопротивление движению обеспечивает основную часть необходимой для торможения мощности.

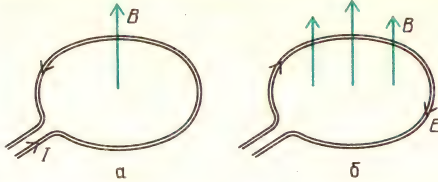
В очень больших генераторах, таких как на электростанциях, ротор питается сравнительно небольшим током, который затем создает вращающееся магнитное поле. Сильный индуцированный ток снимается с окружающих ротор неподвижных обмоток, чем устраняются некоторые трудности, возникающие при необходимости пропускать сильные токи через скользящие контакты.

Вопрос 21-10
В бытовой технике, применяемой вами повседневно, используется много электродвигателей и обычно по меньшей мере один генератор. Что это за генератор?

ИНДУКТИВНОСТЬ

Электрический ток в катушке создает направленное вдоль ее оси магнитное поле. Если этот ток меняется, меняется и магнитное поле. С другой стороны, если магнитное поле, пронизывающее катушку, изменяется, в катушке должна возникать э. д. с. Индуцируемый при этом ток будет создавать магнитное поле, направленное так, чтобы препятствовать изменению этого магнитного поля, которое вызвало первоначальный эффект. Рассмотрим следствия

этого сложного кругового взаимодействия. Если попытаться изменить ток в катушке и таким образом изменить пронизывающее ее магнитное поле, в катушке будет индуцирован дополнительный ток, препятствующий тому, что вы собираетесь сделать. Если вы замыкаете ключ, чтобы наложить на катушку



В витке начинает течь ток I, который создает магнитное поле B (*а*); растущее магнитное поле B создает электрическое поле E, препятствующее нарастанию исходного тока (*б*)

разность потенциалов, возникнет индукционная противо-э. д. с., стремящаяся замедлить рост электрического тока и магнитного поля. С другой стороны, если в катушке уже существуют ток и магнитное поле и вы пытаетесь выключить их, то будет генерироваться э. д. с., стремящаяся поддержать ток.

Независимо от того, создается ли магнитное поле током в самой катушке или наложено на нее извне, э. д. с. в катушке равна

$$\mathscr{E} = -\frac{\Delta (N\Phi)}{\Delta t}.$$

Здесь N – число витков катушки. Поскольку эти витки соединены друг с другом последовательно, полная э. д. с. равна просто произведению числа витков N и э. д. с. $\Delta\Phi/\Delta t$, индуцируемой в одном витке.

Если магнитное поле в катушке создается самой катушкой, оно пропорционально току в катушке: $B \sim I$. Полный магнитный поток, пронизывающий катушку, равен произведению площади ее поперечного сечения и среднего магнитного поля в плоскости сечения: $\Phi = B_{ср}S \sim IS$. В любом случае магнитный поток зависит от геометрических факторов и пропорционален току. Можно выделить эти геометрические факторы и выразить э. д. с. самоиндукции следующим образом:

$$\mathscr{E} = -\frac{\Delta (N\Phi)}{\Delta t} = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

Введенная здесь постоянная L, характеризующая геометрические факторы катушки, называется *индуктивностью*. Единицей индуктивности служит генри (Гн); она названа так в честь Джозефа Генри (1797–1878). Американец Генри был современником Фарадея и независимо от последнего открыл некоторые из электромагнитных эффектов; Генри был особенно сведущ в изготовлении электромагнитов.

Рассчитаем индуктивность соленоида. Поскольку по определению $N\Phi = LI$, сама индуктивность равна

$$L = N\Phi/I = NBS/I.$$

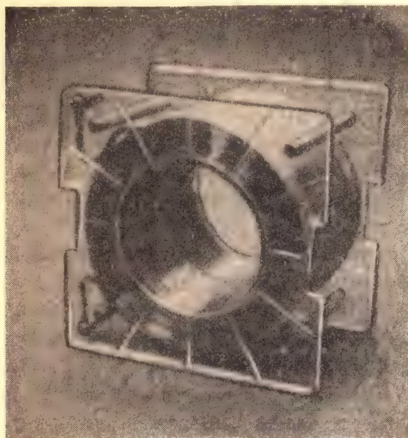
Полагая Φ равным BS, принимаем, что магнитное поле B в соленоиде однородно по всему его поперечному сечению S. Это приближенно выполняется для соленоида, длина которого значительно больше, чем диаметр сердечника. Магнитное поле в таком соленоиде равно $B = \mu_0 nI$. Поэтому индуктивность равна

$$L = (NS/I)\mu_0 nI = N\mu_0 nS = \mu_0 (N/l) nSl = \mu_0 n^2 V.$$

В процессе этого вывода мы сначала получили, что индуктивность соленоида пропорциональна полному числу витков N, а также числу витков на единицу длины n. Чтобы избежать наличия N и n в одной формуле, мы разделили полное число витков N на длину соленоида l и для компенсации умножили на l площадь поперечного сечения S. Окончательный результат говорит о том, что индуктивность соленоида пропорциональна квадрату числа витков на единицу длины и объему, охватываемому соленоидом.

Вопрос 21-11
Индуктивность пропорциональна магнитному потоку, создаваемому рассматриваемой системой. Почему же тогда индуктивность соленоида пропорциональна *квадрату* числа витков на единицу длины?

На фотографии показан стандартный лабораторный соленоид. Его длина равна 10 см, а площадь поперечного сечения его сердцевины около



75 см². Он содержит 3400 витков, намотанных в несколько слоев. Используем выведенную выше формулу для расчета его индуктивности, хотя эта формула даст здесь лишь грубое приближение:

$$L = \mu_0 n^2 V =$$
$$= (4\pi \cdot 10^{-7})\ (34\,000\ \text{витков/м})^2 \times$$
$$\times\ 0{,}1 \cdot 75 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^3 \approx 1{,}1\ \text{Гн}.$$

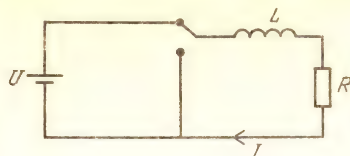
Вопрос 21-12
Почему этот расчет дает лишь приближенное значение?

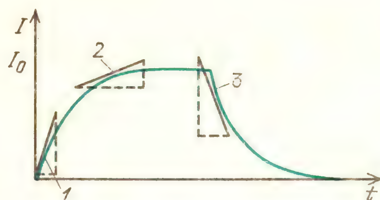
Катушка, предназначенная для введения индуктивности в электрическую цепь, называется *катушкой индуктивности.* Индуктивность катушки можно значительно увеличить, если ее сердцевину заполнить железом вместо воздуха. В таком случае магнитное поле возрастет в χ раз (χ – магнитная восприимчивость железа) и результирующая индуктивность может стать больше в 100 – 1000 раз. В технике электрических цепей такие устройства называются дросселями.

ВКЛЮЧЕНИЕ ТОКА В ЦЕПИ С ИНДУКТИВНОСТЬЮ

Требуется время, чтобы ток в катушке индуктивности возрос или упал. Показанная здесь цепь дает возможность подсоединить к катушке последовательно батарею через сопротивление, а затем отключить батарею и дать возможность току в цепи затухнуть.

На графике показан ток как функ-





ция времени после включения и отключения источника. После подключения батареи ток возрастает до конечного значения $I_0 = U/R$. При переключении ключа на землю ток постепенно спадает до нуля.

Рассмотрим сначала, что происходит, когда ключ подсоединяется к батарее. Ток в катушке индуктивности внезапно начинает расти, но это означает, что $\Delta I/\Delta t$ велико (*1*). Возникающая в катушке противо-э. д. с. равна $L(\Delta I/\Delta t)$. Разность потенциалов на резисторе дается разностью между напряжением батареи и противо-э. д. с. в катушке индуктивности: $I = [U - L(\Delta I/\Delta t)]/R$. Ток заперт неполностью, и по мере его роста *наклон* кривой $I(t)$ уменьшается (*2*). Поэтому противо-э. д. с. уменьшается, допуская все больший ток в цепи. После отключения источника происходит такое же явление. Внезапно напряжение батареи становится равным $U = 0$. Ток начинает быстро уменьшаться, но теперь наклон кривой $I(t)$ отрицателен (*3*). Э. д. с. имеет противоположный знак по сравнению с предыдущим случаем и стремится поддержать ток в *прежнем направлении.*

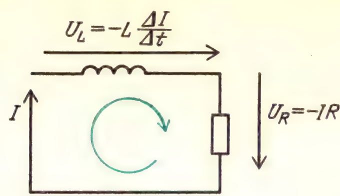
Проанализируем эту цепь во время процесса затухания тока, когда батарея отключена.

В соответствии с правилом Кирхгофа разности потенциалов удовлетво-

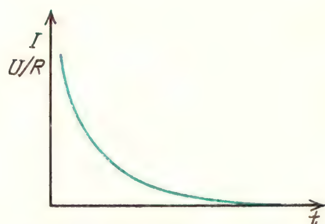
ряют уравнению

$$-L\frac{\Delta I}{\Delta t}-IR=0,\quad \frac{\Delta I}{\Delta t}=-\frac{R}{L}I.$$

Согласно последней формуле тангенс



Величина U_L – положительна, так как отношение $\Delta I/\Delta t$ при уменьшении тока отрицательно



угла наклона кривой пропорционален току в каждый момент и отрицателен. То же самое уравнение и тот же график встречались нам при описании процесса разрядки конденсатора. Такая кривая изображает экспоненциальную функцию

$$I=I_0e^{-(R/L)t},\ \text{где}\ I_0=U/R.$$

При $t=0$ (когда ключ перебрасывается на заземленный контакт) это уравнение дает

$$I=I_0e^0=I_0.$$

Для очень больших значений времени, когда $t\to\infty$, ток стремится к нулю:

$$I=I_0e^{-(R/L)t}=\frac{I_0}{e^{(R/L)t}}\to\frac{I_0}{\infty}\to 0.$$

В тот момент времени, когда $t=L/R$, ток равен

$$I=I_0e^{-(R/L)(L/R)}=I_0e^{-1}=I_0/e.$$

Вопрос 21-13

Очевидно, что постоянная времени для цепи с индуктивностью и сопротивлением равна L/R. За это время ток уменьшается до значения $1/e$ от своей начальной величины. Но имеет ли величина L/R размерность времени?

Найдем постоянную времени для соленоида, описанного на с. 282.

Его индуктивность равна $L=1{,}1$ Гн, сопротивление $R=50$ Ом. Поэтому постоянная времени равна $\tau=L/R=1{,}1$ Гн/50 Ом $=0{,}022$ с. Время, в течение которого ток уменьшится до половины своего начального значения, немного меньше: $t_{1/2}=0{,}69\tau=15$ мс.

Противо-э. д. с., возникающая при попытке выключить ток в большой катушке индуктивности, может быть велика и опасна. Индуктивность большого магнита для исследований будет составлять, например, 10 Гн. Ток в катушке может достигать 100 А. Если попытаться прервать ток с помощью большого выключателя или если возникает случайный разрыв в цепи, противо-э. д. с., которая будет приложена к выключателю или к разрыву, будет равна $\mathscr{E}=-L(\Delta I/\Delta t)=-10$ Гн$\cdot$100 А/Δt. Даже если Δt было бы равно 1 с, э. д. с. все еще была бы 1000 В. В действительности разрыв цепи или срабатывание выключателя занимает время гораздо менее 1 с, и поэтому противо-э. д. с. была бы значительно больше. Эта большая разность потенциалов была бы сосредоточена на выключателе или разрыве и привела бы к возникновению дугового разряда, расплавляющего электроды. Необходимы специальные меры предосторожности при обращении с сильными токами в больших катушках индуктивности даже в тех случаях, когда первоначальные создающие ток напряжения невелики.

ЭНЕРГИЯ В КАТУШКЕ ИНДУКТИВНОСТИ

При внезапном прерывании тока в цепи, содержащей индуктивность, на открытых электродах может возникнуть электрическая дуга, расплавляющая или испаряющая контакты. Откуда берется необходимая для этого энергия? В катушке индуктивности можно сосредоточить магнитное поле. Для создания поля нужна энергия, и эту энергию снова

можно освободить при уменьшении магнитного поля.

Мощность, которая требуется при создании магнитного поля в катушке индуктивности, равна среднему значению произведения тока и разности потенциалов на катушке:

$$P = I\,[L(\Delta I/\Delta t)] = \Delta W/\Delta t.$$

Здесь W – запасенная в катушке индуктивности энергия (энергия магнитного поля). Окончательный запас энергии при достижении равновесного значения тока I равен

$$W_{\text{м}} = \frac{1}{2} LI^2.$$

Множитель 1/2 возникает в результате усреднения, поскольку противо-э. д. с. велика вначале и обращается в нуль при достижении равновесного значения тока. Сравните это выражение для запасенной в магнитном поле энергии с подобным выражением для энергии электрического поля, запасенной в конденсаторе:

$$W_{\text{эл}} = \frac{1}{2} CU^2.$$

Найдем, сколько энергии можно при подходящих условиях сосредоточить в соленоиде типа показанного на с. 282. Индуктивность такого соленоида равна 1,1 Гн, а его сопротивление 50 Ом. При использовании 6-вольтовой батареи установившийся ток равен $I = 6\ \text{В}/50\ \text{Ом} = 0{,}12\ \text{А}$. Запасенная энергия магнитного поля равна

$$W_{\text{м}} = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2}\cdot 1{,}1\ \text{Гн}\cdot(0{,}12\ \text{А})^2 = 7{,}9\cdot 10^{-3}\ \text{Дж}.$$

Вопрос 21-14

Этот соленоид имеет массу около 2 кг. На какую высоту пришлось бы его поднять, чтобы сообщить ему потенциальную энергию в поле тяжести, равную только что подсчитанной энергии?

Может показаться, что абсолютно безопасно иметь дело с энергией, которую мы только что подсчитали. Заметьте, однако, что запасенная энергия квадратично зависит от тока. Найдем способ расчета *плотности* энергии магнитного поля. Тогда у нас будет более удобный путь вычисления энергии, запасаемой в большом магните, применяемом для научных исследований.

В соленоиде плотность энергии магнитного поля равна запасенной энергии, деленной на объем соленоида:

$$u_{\text{м}} = \frac{W_{\text{м}}}{V} = \frac{(1/2)\,LI^2}{V} = \frac{(1/2)\,\mu_0 n^2 V I^2}{V} = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2.$$

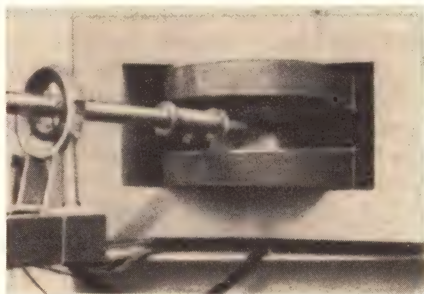
Напряженность магнитного поля в соленоиде равна $B = \mu_0 n I$. Поэтому плотность энергии можно выразить через напряженность магнитного поля:

$$u_{\text{м}} = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2 = \frac{1}{2}\,\frac{B^2}{\mu_0}.$$

Вопрос 21-15

Выше шла речь о запасенной в соленоиде магнитной энергии, а затем была рассчитана плотность энергии. Где все же находится эта запасенная энергия?

Теперь рассчитаем энергию применяемого для исследований большого магнита, подобного показанному на фотографии. При максимальном токе магнитное поле в магните, а следовательно,



Ионный пучок в вакуумной трубке изменяет направление при прохождении сквозь этот большой магнит для исследований

и в зазоре равно примерно 1,5 Тл. Объем железной части магнита гораздо больше, чем объем зазора, но плотность энергии обратно пропорциональна маг-

нитной проницаемости μ. В железе проницаемость возрастает приблизительно в χ раз: $\mu \approx \chi\mu_0$. Отсюда значение μ для железа от 100 до 1000 раз больше, чем μ_0. Поэтому в магните большая часть энергии локализована в зазоре между полюсными наконечниками. Если объем зазора составляет около (1/5) м^3, запасенная в нем энергия равна

$$W = \frac{1}{2}\frac{B^2 V}{\mu_0} =$$

$$= \frac{1}{2}(1{,}5\ \text{Тл})^2 \cdot (0{,}2\ \text{м}^3)/(4\pi \cdot 10^{-7}) =$$

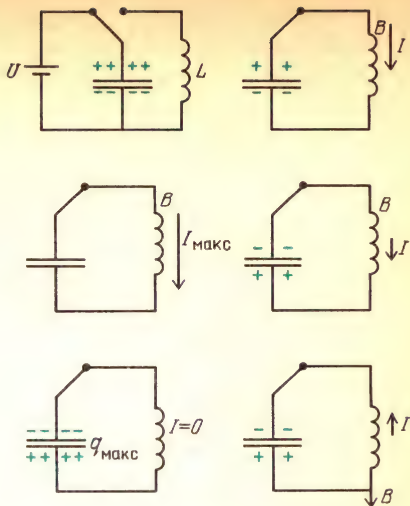
$$= 1{,}8 \cdot 10^5\ \text{Дж}.$$

Если вы попытаетесь избавиться от этой немалой энергии за долю секунды без специальных мер предосторожности, что-нибудь непременно расплавится. Так, при $\Delta t = 0{,}1$ с мгновенная мощность составит $P = 1{,}8$ МВт.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЕ ИНДУКТИВНОСТИ И ЕМКОСТИ

Как мы видели, требуется некоторое время для того, чтобы заряды стекли с конденсатора через сопротивление. Время необходимо также и для того, чтобы ток в катушке индуктивности достиг своего полного значения после того, как к последовательно соединенным индуктивности и сопротивлению приложено напряжение. В первом случае электростатическая энергия, которая была запасена в конденсаторе, должна рассеяться на сопротивлении. Во втором случае энергия магнитного поля должна сосредоточиться в катушке по мере увеличения тока.

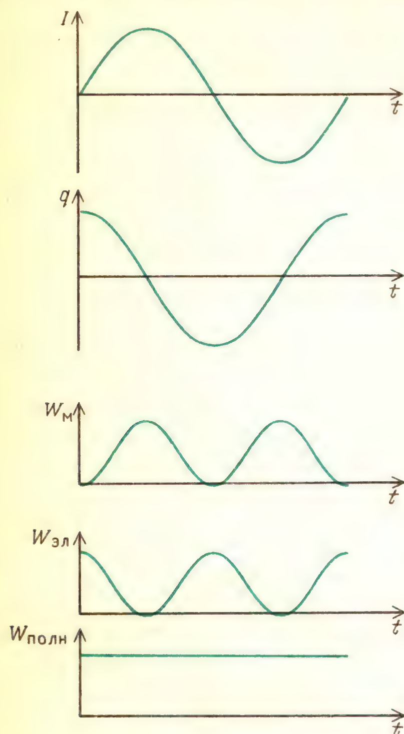
Скомбинируем эти два действия. На рисунке показана цепь, которая позволяет заряжать конденсатор от батареи и затем разряжать его через катушку индуктивности. Хотя реальные провода и катушки обладают сопротивлением (если только они не сверхпроводящие), для начала этим сопротивлением будем пренебрегать. Как только ключ перекидывается вправо, заряд конденсатора начинает стекать через катушку индуктивности. Возникающее при этом изме-



нение тока в катушке создает противо-э. д. с., которая замедлит процесс разрядки конденсатора. Тем временем запасенная в конденсаторе электростатическая энергия уменьшается, а магнитная энергия катушки индуктивности начинает возрастать. В конце концов вся электростатическая энергия превратится в магнитную. В этот момент на конденсаторе не будет никакого заряда и, следовательно, никакой разности потенциалов. Однако в этот же момент ток в катушке достигает максимального значения. В отсутствие разности потенциалов, которая поддерживала бы ток в катушке, этот ток и магнитное поле начинают уменьшаться, но ток будет продолжать течь в том же направлении, создавая скопление положительных зарядов на нижней пластине конденсатора. Разность потенциалов на конденсаторе снова увеличивается, но с противоположной полярностью. Вскоре конденсатор опять оказывается полностью заряженным (зарядом противоположного знака), а ток в катушке обращается в нуль. Энергия системы снова принимает электростатическую форму. Дальше весь процесс повторяется, но на этот раз положительные заряды текут в противоположном направлении, заставляя ток и магнитное поле в катушке возрастать; последние имеют при этом противоположное направление по сравнению с исходным случаем. Энергия качается взад и вперед между конденсато-

ром и катушкой индуктивности. Если бы не было рассеяния энергии на сопротивлении, такое действие продолжалось бы неопределенно долго.

На следующем рисунке построены временны́е зависимости тока, заряда конденсатора, энергии магнитного поля,



энергии электростатического поля и полной энергии системы. Ток и заряд изменяются синусоидально, но сдвинуты друг относительно друга по фазе на 90°. Разность потенциалов изменяется в фазе с зарядом конденсатора, поскольку $U = q/C$.

Вопрос 21-16
На этих кривых изменение заряда следует закону косинуса. По определению $I = \Delta q/\Delta t$. Наклон кривой $q(t)$ тоже равен $\Delta q/\Delta t$. Должно ли поэтому изменение тока происходить по закону синуса?

Уравнение кривой, представляющей изменение заряда, имеет вид

$$q = q_0 \cos \omega t = q_0 \cos 2\pi \nu t.$$

Начальный заряд конденсатора равен q_0. Частота колебаний равна ω; частота колебаний в циклах в секунду, или герцах, равна ν. Формула для частоты колебаний выведена в разделе дополнительного материала на с. 292. Она имеет вид

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

Если используется катушка с индуктивностью 1,1 Гн и конденсатор с емкостью 1 мкФ, частота колебаний будет равна

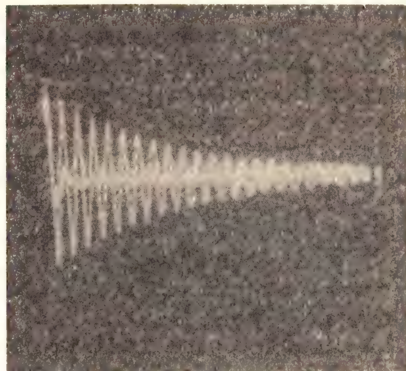
$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{1{,}1\ \text{Гн}\cdot 1\cdot 10^{-6}\ \text{Ф}}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{0{,}9\cdot 10^{6}} = \frac{950}{2\pi} = 151\ \text{Гц}.$$

Период колебаний равен

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{151} = 6{,}6\ \text{мс}.$$

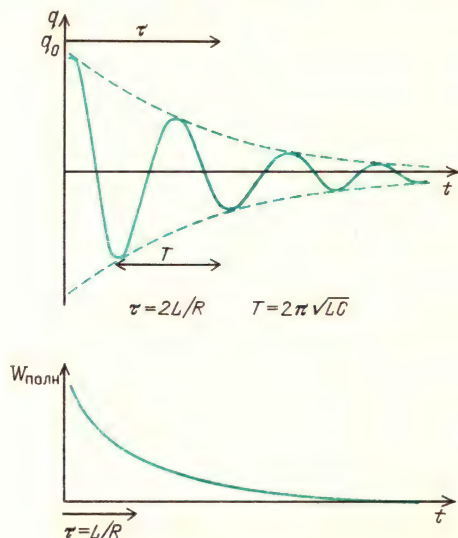
Если на самом деле собрать цепь и наблюдать разность потенциалов на катушке с помощью осциллографа, вы не увидите непрерывной синусоидальной волны с постоянной амплитудой. Вместо этого получится кривая вроде той, что показана на фотографии.



Затухающая синусоида, снятая с экрана осциллографа при $L = 1{,}1$ Гн, $C = 1$ мкФ и $R = 50$ Ом. (Жирная горизонтальная средняя линия вызвана цепью выключателя.)

Вопрос 21-17
Какие заключения об электростатической и магнитной энергиях можно сделать на основании этой фотографии?

В большинстве случаев реальные цепи обладают сопротивлением. Например, катушка индуктивности, которая была использована в нашей цепи, имеет сопротивление 50 Ом на постоянном токе из-за того, что для намотки большого числа витков требуется очень длинный провод. При прохождении осциллирующего тока через сопротивление происходят потери из-за выделения джоулева тепла. Огибающая затухающей синусоидальной волны характеризуется постоянной времени $\tau = 2L/R$. За это время максимальный заряд конденсатора (или ток в катушке) уменьшается до $1/e$ от начального значения. Уравнение, описывающее изменение заряда, принимает вид



$$q = q_0 e^{-(R/2L)t} \cos\left(1/\sqrt{LC}\right) t.$$

Косинусоидальный член имеет переменную амплитуду, которая затухает экспоненциально.

Энергия всей системы пропорциональна квадрату максимального заряда (квадрату амплитуды заряда) при каждом данном колебании, или квадрату максимального тока: $W = (1/2)q^2/C$. Поскольку максимальный заряд равен $q_{\text{макс}} = q_0 e^{-(R/2L)t}$, то $q^2_{\text{макс}} = q_0^2 e^{-(R/L)t}$. Рассеяние энергии в системе происходит с постоянной времени $\tau = L/R$. Временная зависимость полной электромагнитной энергии тоже показана на рисунке.

Сколько времени нужно, чтобы в цепи, которую мы уже анализировали, максимальный заряд уменьшился до $1/e$ от своего начального значения? Ясно, что

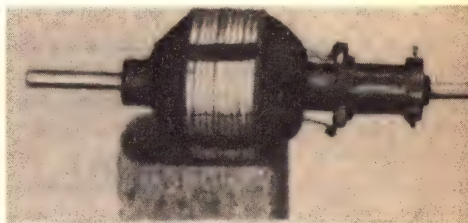
$$\tau_q = \frac{2L}{R} = 2\frac{1{,}1\ \text{Гн}}{50\ \text{Ом}} = 44\ \text{мс}.$$

Проверьте по осциллограмме, должное ли число осцилляций укладывается в пределах постоянной времени.

Вопрос 21-18
Сколько электромагнитной энергии остается в системе к этому моменту?

ПЕРЕМЕННЫЙ ТОК

Томас Эдисон считал, что электроснабжение жилых домов должно осуществляться на постоянном токе. Электрический ток, получаемый во вращающемся роторе генератора, будет всегда иметь одно и то же направление, если он снимается с таких коллекторных колец, как показанные на фотографии.



Коллекторные кольца находятся на валу справа. Каждая обмотка соединена с определенным сегментом коллектора. При вращении ротора обмотки и сегменты коммутатора вращаются, но прижатая к коммутатору щетка каждый раз образует электрический контакт с той обмоткой, которая обращена в ее сторону

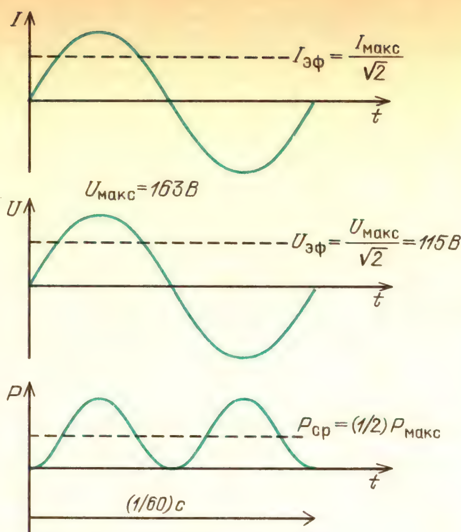
В зависимости от числа обмоток результирующий ток в большей или меньшей степени флуктуирует по величине, но по крайней мере всегда одинаков по направлению. Джордж Вестингауз и другие отстаивали преимущества переменного тока. В стандартной форме переменного тока напряжение и ток имеют синусоидальную зависимость от времени. В наше время стандартная частота обычного переменного тока равна

60 циклам в секунду, или 60 Гц*). В первые годы нашего столетия многие общественные предприятия производили переменный ток частотой 25 Гц. Как и опасался Эдисон, столь низкая частота приводила к небольшим флуктуациям интенсивности света обычных ламп накаливания, что раздражало некоторых людей.

Вопрос 21-19

В кино и телевидении движущееся изображение создается последовательностью неподвижных кадров, сменяющих друг друга достаточно быстро, чтобы глаз воспринимал все действие как непрерывное. Какова частота смены кадров? Почему же свет от ламп накаливания, питаемых током частоты 25 Гц, вызывает раздражение?

В использовании переменного тока Эдисона беспокоило также и более высокое пиковое напряжение, требуемое для передачи мощности, эквивалентной той, что создается данным напряжением постоянного тока. Мощность в цепи постоянного тока дается выражением IU или I^2R. Эти формулы остаются в силе и для переменного тока, но передаваемая мощность изменяется от момента к моменту при изменении тока и напряжения. На этих графиках показана временная зависимость тока, напряжения и мощности переменного тока в резисторе. Хотя ток и напряжение бывают как положительными, так и отрицательными, мощность, равная их произведению, всегда положительна. Однако она пульсирует, изменяясь от нуля до максимального значения с удвоенной частотой переменного тока. Ясно, что средняя передаваемая мощность меньше максимальной; фактически она равна в точности половине максимальной мощности. (Среднее значение $\sin^2\theta$ или $\cos^2\theta$ за целый период равно как раз 1/2. Так и должно быть, поскольку для любого угла $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, а за полный цикл среднее значение $\sin^2\theta$ должно быть равно среднему значению $\cos^2\theta$.) Для синусоидального переменного тока в резисторе средняя мощность равна



$$P_{ср} = (1/2)\, I_{макс} U_{макс}.$$

Введем *эффективный* ток и *эффективное* напряжение для переменного тока по следующему определению:

$$I_{эф} = I_{макс}/\sqrt{2}, \quad U_{эф} = U_{макс}/\sqrt{2}.$$

Тогда средняя мощность, выделяющаяся на резисторе в цепи переменного тока, равна

$$P_{ср} = (1/2)\, I_{макс} U_{макс} = (I_{макс}/\sqrt{2})(U_{макс}/\sqrt{2}) = I_{эф} U_{эф} = I^2_{эф} R.$$

Теперь подсчитаем пиковое напряжение, которое беспокоило Эдисона. Стандартное *эффективное* напряжение в осветительной сети жилых домов равно 115 В. Как, однако, видно из графиков, максимальное положительное и отрицательное напряжение в электрической розетке на стене в $\sqrt{2}$ раз больше, чем 115 В, что делает этот источник энергии более опасным. Максимальное напряжение равно 163 В.

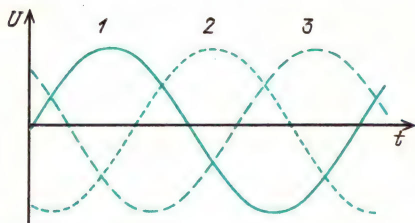
В главе 19 была рассчитана скорость дрейфа электронов в проводах типичной цепи. Эта скорость составляет доли

---

*) В европейских странах принят стандарт частоты промышленного переменного тока 50 Гц. (*Примеч. ред.*)

миллиметра в секунду. В случае переменного тока у носителей заряда вообще нет никакого шанса дрейфовать куда бы то ни было. Их тянет в одном направлении в течение 1/120 с, а затем в течение следующей 1/120 с их толкает в обратную сторону. Однако в это время они сообщают проводнику тепловую энергию, точно так же как и постоянный ток, а также создают магнитные поля и сами испытывают действие магнитных полей.

Переменный ток обычно генерируют и передают с помощью четырехпроводной трехфазной системы. Напряжение между любой парой проводов изменяется синусоидально, но фазы синусоид в трех «горячих» проводах различны, как это показано на рисунке. Каждая



Временная зависимость напряжения на каждом проводе относительно нейтрального провода. Все дома поблизости от местного трансформатора разделены на три группы и каждая группа питается линией от одной фазы

фаза возбуждается в определенной паре обмоток генератора. Индукционные (асинхронные) двигатели наиболее эффективно приводятся в действие трехфазным переменным током, с помощью которого можно получить в двигателе вращающееся магнитное поле. Хотя трехфазный переменный ток передается по любой близлежащей сети, в каждый жилой дом обычно проводится лишь одна фаза.

В случае переменного тока конденсаторы и катушки индуктивности могут стать важными компонентами электрической цепи.

Вопрос 21-20

Как действуют конденсаторы и катушки индуктивности в цепях постоянного тока?

Рассмотрим, что происходит с током и напряжением на катушке индуктивности и конденсаторе в последовательной цепи переменного тока. В каждый данный момент времени ток во всех ее компонентах будет одинаков. Любой заряд, накапливающийся на конденсаторе, должен проходить сквозь катушку индуктивности. Переменный ток описывается выражением

$$I = I_{\text{макс}} \sin \omega t = I_{\text{макс}} \sin 2\pi \nu t.$$

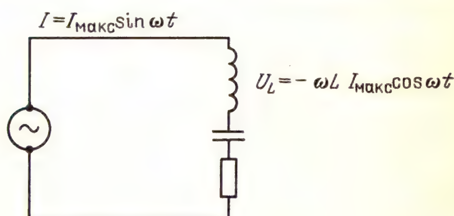
Стандартная частота равна $\nu = 60$ Гц. Круговая частота равна $\omega = 2\pi\nu = 377$ с$^{-1}$.

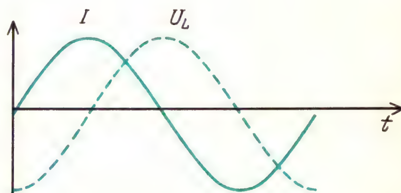
Напряжение на катушке индуктивности равно $U_L = -L(\Delta I/\Delta t)$. Наклон кривой $I(t)$ равен $\Delta I/\Delta t = \omega I_{\text{макс}} \cos \omega t$. Отметьте, что значения наклонов кривой синуса образуют кривую косинуса. Этот наклон пропорционален также ω. Чем выше частота синуса, тем больше наклон.

В результате этих рассуждений получаем, что напряжение на катушке индуктивности равно

$$U_L = -L(\Delta I/\Delta t) = -(\omega L) I_{\text{макс}} \cos \omega t.$$

Напряжение на катушке, как и ток, изменяется синусоидально, но отстает от тока по фазе на 90°, как показано на рисунке. Амплитуда напряжения может





быть связана с амплитудой тока соотношением, напоминающим закон Ома:

$$(U_L)_{\text{макс}} = \omega L I_{\text{макс}}.$$

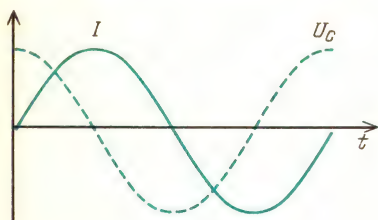
Величина ωL называется *индуктивным*

сопротивлением и обозначается символом X_L:

$$X_L = \omega L.$$

Она аналогична сопротивлению в цепи переменного тока и измеряется в омах. Отметьте, однако, что индуктивное сопротивление зависит от частоты. При данном значении тока в катушке индуктивности напряжение пропорционально частоте, потому что чем выше частота, тем быстрее изменяется ток и тем больше наклон кривой $\Delta I/\Delta t$.

Теперь подсчитаем разность потенциалов на включенном последовательно конденсаторе, когда ток изменяется синусоидально. В любой момент напряжение на конденсаторе равно q/C. Как мы видели ранее, на с. 285, когда синусоидальный ток через конденсатор достигает максимума, заряд конденсатора обращается в нуль. Когда заряд максимален, ток равен нулю. Если ток описывается синусоидальной зависимостью, заряд и, следовательно, напряжение должны быть пропорциональны функции косинуса, как показано на графике.



В данном случае напряжение на конденсаторе *опережает* ток по фазе на 90°. Чем быстрее изменяется ток, тем меньшим временем располагают заряды для накапливания в конденсаторе и поэтому меньше накапливаемый заряд:

$$q = (1/\omega)\, I_{\text{макс}} \cos \omega t.$$

Напряжение на конденсаторе равно

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{(1/\omega)\, I_{\text{макс}} \cos \omega t}{C} = \frac{1}{\omega C} I_{\text{макс}} \cos \omega t.$$

Максимальное напряжение на конденсаторе связано с максимальным током соотношением типа закона Ома: $(V_C)_{\text{макс}} = (1/\omega C)\, I_{\text{макс}}$. Величина $1/(\omega C)$ играет роль, подобную роли сопротивления. Она называется *емкостным сопротивлением* X_C:

$$X_C = 1/(\omega C).$$

Обратите внимание, что его частотная зависимость прямо противоположна зависимости индуктивного сопротивления. С увеличением частоты емкостное сопротивление уменьшается. Напротив, когда частота ω стремится к нулю, емкостное сопротивление стремится к бесконечности.

Вопрос 21-21

Что подразумевается под переменным током нулевой частоты и под бесконечным емкостным сопротивлением?

Закон Ома в применении к отдельным компонентам цепи переменного тока дан ниже.

Компоненты цепи переменного тока

индуктивная	емкостная	активная
$I_{\text{макс}} = \frac{(U_L)_{\text{макс}}}{\omega L}$	$I_{\text{макс}} = \frac{(U_C)_{\text{макс}}}{1/(\omega C)}$	$I_{\text{макс}} = \frac{(U_R)_{\text{макс}}}{R}$
$X_L = \omega L$	$X_C = 1/(\omega C)$	$X_R = R$

Подсчитаем некоторые типичные значения реактивных сопротивлений. Например, чему равно индуктивное сопротивление катушки с индуктивностью 1 Гн на частоте 60 Гц?

$$X_L = 2\pi \cdot 60 \text{ Гц} \cdot 1 \text{ Гн} = 377 \text{ Ом}.$$

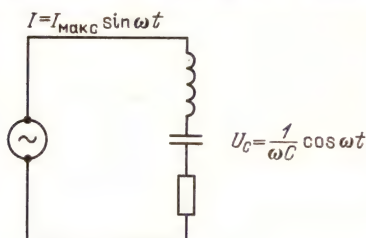
На радиочастоте 600 кГц ($6 \cdot 10^5$ Гц) индуктивное сопротивление катушки в 1 Гн было бы равно $3{,}77 \cdot 10^6$ Ом, т. е. больше в 10^4 раз.

Конденсатор емкостью в 1 мкФ на частоте 60 Гц имеет емкостное сопротивление, равное

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \nu C} = \frac{1}{2\pi \cdot 60 \text{ Гц} \cdot 1 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}} = 2{,}65 \cdot 10^3 \text{ Ом}.$$

На частоте 600 кГц его емкостное сопротивление было бы только 0,265 Ом.

При последовательном включении резисторов в цепь постоянного тока эффективное сопротивление равно просто сумме сопротивлений отдельных резисторов. Однако вывод этой формулы основан на том факте, что полная разность потенциалов в последовательной цепи равна сумме разностей потенциалов на отдельных резисторах. В случае переменного тока мы встречаемся с более сложной ситуацией. В последовательной цепи, состоящей из катушки индуктивности, конденсатора и резистора,

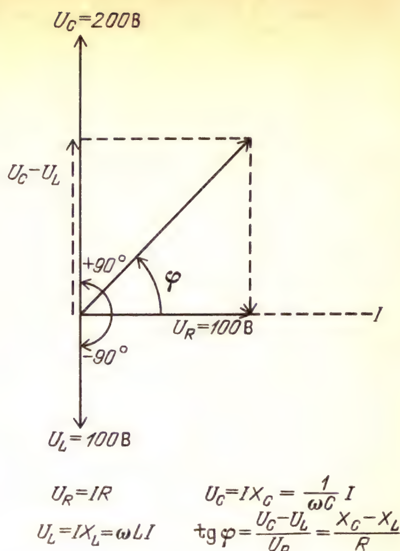


ток во всех компонентах имеет одно и то же значение в любой данный момент времени. Ток всюду имеет одинаковую фазу, но напряжения — нет. Напряжение на конденсаторе опережает ток на 90° и, следовательно, опережает на 90° напряжение на резисторе, соединенном последовательно с конденсатором. В то же время напряжение на катушке индуктивности отстает по фазе от тока на 90° и, следовательно, отстает на 180° от напряжения на конденсаторе.

Дополнительный материал

Здесь дана диаграмма напряжений и фазовых соотношений в цепи переменного тока. Каждое напряжение представлено «фазовым вектором» на диаграмме того типа, что была использована для изображения вещественной и мнимой частей комплексного числа. Любое напряжение, изменяющееся в фазе с током, лежит на вещественной (горизонтальной) оси. Напряжение, опережающее ток по фазе на 90°, откладывается в положительном направлении мнимой (вертикальной) оси. Напряжение, отстающее от тока по фазе на 90°, откладывается в отрицательном направлении мнимой оси.

В показанном случае индуктивное сопротивление равно $X_L = 100$ Ом, емкостное — $X_C = 200$ Ом и активное — $R = 100$ Ом.



$U_R = IR$ $\quad U_C = IX_C = \frac{1}{\omega C} I$

$U_L = IX_L = \omega L I$ $\quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{U_C - U_L}{U_R} = \frac{X_C - X_L}{R}$

Если максимальное значение тока в этой последовательной цепи равно 1 А, то максимальное напряжение на катушке индуктивности равно 100 В, максимальное напряжение на конденсаторе равно 200 В и максимальное напряжение на резисторе равно 100 В. Поскольку разности потенциалов на катушке индуктивности и конденсаторе находятся в противофазе, разность потенциалов на обоих компонентах цепи равна просто разности напряжений на них. В данном случае эта разность равна 100 В и опережает по фазе на 90° напряжение на резисторе. Полная разность потенциалов во всей цепи равна сумме этих двух синусоидально изменяющихся напряжений. Такое напряжение тоже синусоидально, и его амплитуда равна векторной сумме амплитуд напряжений на резисторе и реактивных компонентах цепи. В данном случае эта векторная сумма $U_{\text{макс}} = \sqrt{(100\ \text{В})^2 + (100\ \text{В})^2} = 141$ В. Сравните это полное напряжение во всей последовательной цепи с напряжениями на отдельных ее компонентах.

Приведем простой способ эффективного сложения реактивных и активных сопротивлений в последовательной цепи. Такая их комбинация называется импедансом Z:

$$Z = \sqrt{(X_C - X_L)^2 + R^2}.$$

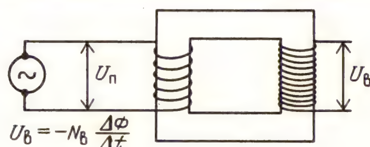
Обратите внимание на векторную природу этого уравнения. Индуктивное сопротивление вычитается из емкостного, потому что напряжения на них изменяются в противофазе.

чивать большой ток при стандартном напряжении, и все же произведение $I_{эф}U_{эф}\cos\varphi$ может оказаться значительно меньше, чем просто произведение $I_{эф}U_{эф}$. Хотя потребляемая в здании мощность меньше из-за того, что ток и напряжение не находятся в фазе, энергетической компании все же приходится поставлять большой ток, что требует дополнительного расхода энергии из-за потерь в линиях передач.

ТРАНСФОРМАТОРЫ

Главное преимущество переменного тока над постоянным – простота и эффективность, с которыми переменное напряжение можно повышать и понижать. Когда электроэнергию производят на центральной станции и затем передают на большие расстояния, в линиях передачи происходят потери из-за выделения джоулева тепла. При заданной передаваемой мощности эти потери можно уменьшить, повышая напряжение и уменьшая ток. Линии передачи между городами работают обычно под напряжениями свыше 100 000 В. В пределах городов стандартное напряжение равно 2300 В. Для линий, подводимых к отдельным жилым домам, это напряжение поблизости понижается до 230 В или 115 В. Преобразование напряжений вверх и вниз производится пассивными устройствами, называемыми трансформаторами. Их коэффициент полезного действия приближается к 99%.

Основной тип трансформатора состоит из двух обмоток, первичной и вторичной, навитых на общий железный сердечник, как показано на рисунке. Синусоидальный ток первичной



обмотки создает синусоидально изменяющееся магнитное поле в сердечнике. Сердечник обычно изготовлен из железных пластинок, разделенных тонкими листами изолирующего материала для уменьшения потерь энергии вследствие вихревых токов. Когда ток со вторичной обмотки не снимается, первичная обмотка ведет себя очень похоже на катушку индуктивности. В идеальном трансформаторе, где нет потерь, $I_п$ и $U_п$ (ток и напряжение, индуцируемое в первичной обмотке) сдвинуты по фазе на 90° по отношению друг к другу и поэтому энергия не поглощается. В таких условиях ток обычно очень мал. Индуктивность типичного небольшого бытового трансформатора составляет около 1 Гн. При 60 Гц его индуктивное сопротивление равно $X_L = 2\pi \times 60$ Гц · 1 Гн = 377 Ом. При $U_{эф} = 115$ В ток $I_{эф} \approx (1/3)$ А.

Первичная обмотка возбуждается от генератора с синусоидальной э. д. с. Правило Кирхгофа требует, чтобы $\mathscr{E} + U_п = 0$, где $U_п = -N_п(\Delta\Phi/\Delta t)$. Здесь $N_п$ – число витков первичной обмотки, Φ – магнитный поток в сердечнике.

Вопрос 21-23

Согласно этому уравнению, индуцируемое в первичной обмотке напряжение полностью компенсирует э. д. с. генератора. Тогда откуда же в трансформаторе берется ток, создающий магнитный поток?

Поскольку один и тот же магнитный поток пронизывает как первичную, так и вторичную обмотки, индуцируемое во вторичной обмотке напряжение равно

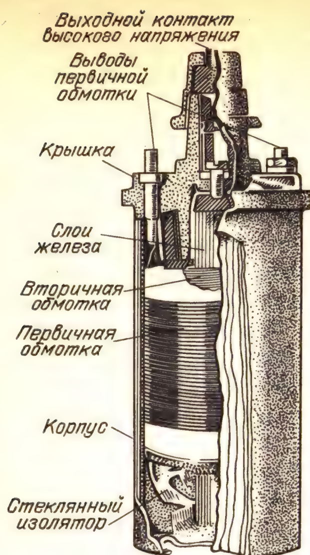
$$U_в = -N_в(\Delta\Phi/\Delta t).$$

Поэтому отношение напряжения во вторичной обмотке к напряжению в первичной равно

$$U_в/U_п = N_в/N_п,$$

$$U_в = (N_в/N_п)\,U_п.$$

В повышающем трансформаторе $N_в/N_п > 1$. Пример такого трансформатора – обычная катушка зажигания, необходимая в каждом автомобиле. Она используется для преобразования 12-вольтного напряжения аккумуляторной батареи до 20 000 В, необходимых для получения искры, воспламеняющей рабочую смесь в цилиндрах двигателя. Чтобы получить нужный переменный ток, постоянный ток от батареи прерывается в решающий момент с помощью контактов прерывателя.



Когда со вторичной обмотки снимается ток, он стремится вызвать изменение магнитного потока в сердечнике. Однако значение этого потока задается вынуждающей э. д. с. генератора и должно, по существу, оставаться неизменным. Чтобы противостоять влиянию вторичного тока, первичная обмотка должна потреблять ток от источника, который сдвинут по фазе на 180° относительно тока во вторичной обмотке. Каждый из токов создает дополнительный магнитный поток, пропорциональный числу витков соответствующей обмотки и току, но эти магнитные потоки должны компенсировать друг друга. Следовательно, первичный и вторичный токи связаны соотношением

$$N_п I_п = -N_в I_в,\quad I_п = -(N_в/N_п)\, I_в.$$

Знак минус показывает, что первичный и вторичный токи изменяются в противофазе друг с другом.

Вопрос 21-24
В повышающем трансформаторе вторичная обмотка содержит больше витков, чем первичная: $N_в/N_п > 1$. Каково соотношение между токами первичной и вторичной обмоток в таком трансформаторе?

Если вторичная обмотка нагружена активным сопротивлением, то ток в ней изменяется в одинаковой фазе со вторичной э. д. с. Добавочный ток, потребляемый первичной обмоткой, также находится в фазе с внешней э. д. с., питающей первичную обмотку. В идеальном трансформаторе, где потери энергии не происходит, потребляемая первичной обмоткой мощность должна быть равна мощности, снимаемой со вторичной обмотки:

$$I_п U_п = I_в U_в.$$

Трансформатор преобразует не только напряжения и токи, но также и эффективное сопротивление, или импеданс, цепи. Пусть в случае активной нагрузки $R_в$ во вторичной цепи первичная обмотка питается током $I_п$ при напряжении $U_п$. Поэтому эффективное сопротивление первичной обмотки равно

$$R_п = U_п/I_п = \frac{(N_п/N_в)\, U_в}{(N_в/N_п)\, I_в} = \frac{1}{(N_в/N_п)^2} R_в.$$

Как видно, повышающий трансформатор заменяет сопротивление нагрузки вторичной цепи на меньшее эффективное сопротивление первичной обмотки.

В случаях индуктивной или емкостной нагрузки во вторичной цепи требуется более тщательный анализ фазовых соотношений между токами и напряжениями в первичной и вторичной обмотках. Поскольку токи в первичной и вторичной цепях должны быть в противофазе, эффективный импеданс при преобразовании также изменяет знак. Конденсатор во вторичной цепи выглядит из первичной цепи как катушка индуктивности; и наоборот, катушка индуктивности выглядит как конденсатор. Такое преобразование импедансов как по модулю, так и по знаку составляет жизненно важную функцию трансформаторов в цепях, служащих для передачи сигналов. Как мы видели при изучении волнового движения, сигнал передается из одной среды в другую без отражения, если импедансы обеих сред равны. Для эффективной передачи мощности из одной цепи в другую «выходной импеданс» должен быть равен «входному импедансу». Например, выходное сопротивление ламп усилителя низкой частоты, питающего громкого-

ворители акустической системы, обычно больше, чем сопротивление катушек громкоговорителя. Поэтому оконечный каскад усилителя подключается к громкоговорителям не непосредственно, а через понижающий трансформатор.

РЕЗЮМЕ

В этой главе мы имели дело с токами, изменяющимися со временем. Когда на конденсаторе заряд накапливается или распадается, это происходит по экспоненциальному закону: $q = q_0 e^{-(1/RC)t}$. Время, в течение которого заряд уменьшается до $1/e$ от начального значения, равно $\tau = RC$. Период полураспада заряда конденсатора равен $t_{1/2} = 0{,}69\tau$.

Когда проводник движется в магнитном поле, на входящие в его состав заряды действует сила Лоренца: $\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Если для зарядов возможен возвратный путь за пределами магнитного поля, в замкнутом контуре будет генерироваться электрический ток. Электродвижущая сила в таком контуре равна скорости изменения пронизывающего контур магнитного потока: $-\mathscr{E} = -\sum \mathbf{E}\cdot\Delta\mathbf{l} = \Delta\Phi/\Delta t$. Знак минус указывает направления э. д. с. и вызываемого ею тока. Согласно закону Ленца, выполнение которого необходимо для сохранения энергии, индукционный ток направлен так, чтобы создаваемое им магнитное поле противодействовало любым изменениям исходного поля. Поэтому для того чтобы перемещать замкнутый контур в магнитном поле и генерировать в нем ток, требуется совершать внешнюю работу; индукционный ток создает магнитное поле, противодействующее движению контура.

Часто, но не всегда, оба закона электромагнитной индукции взаимозаменяемы или могут быть выведены друг из друга:

закон Лоренца:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

закон Фарадея:

$$\mathscr{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Э. д. с. электромагнитной индукции не является консервативным потенциалом. При перемещении вдоль замкнутой траектории, охватывающей изменяющийся магнитный поток, электрический заряд получает энергию.

В электродвигателях используется сила, действующая на проводник с током в магнитном поле: $\mathbf{F} = I(\mathbf{l} \times \mathbf{B})$. Ток может подводиться к вращающемуся проводнику с помощью скользящих контактов (коллекторных колец со щетками) или может быть индуцирован вращающимся магнитным полем. Электродвигатель можно превратить в электрогенератор, если приложить к ротору внешнюю силу для приведения его во вращение, и снимать с него индукционный ток.

Требуется конечное время, чтобы в катушке после подключения источника возникло магнитное поле, поскольку э. д. с. индукции противодействует напряжению источника. Э. д. с. индукции пропорциональна скорости изменения тока: $\mathscr{E} = -L(\Delta I/\Delta t)$, где индуктивность L зависит от геометрии катушки. Для соленоида с n витками на единицу длины и объемом V индуктивность равна $L = \mu_0 n^2 V$.

Ток в катушке индуктивности нарастает или спадает по экспоненциальному закону: $I = I_0 e^{-(R/L)t}$. Постоянная времени, т. е. промежуток времени, в течение которого ток уменьшается до $1/e$ своего начального значения, равна $\tau = L/R$.

Для создания магнитного поля в катушке индуктивности нужна энергия $W = (1/2)LI^2$. *Плотность* энергии магнитного поля в длинном соленоиде равна $u_м = (1/2)\mu_0 n^2 I^2 = B^2/(2\mu_0)$. Это плотность магнитной энергии в вакууме.

В цепи, содержащей последовательно соединенные катушку индуктивности и конденсатор, заряд будет осциллировать взад и вперед по цепи с частотой $\nu = (1/2\pi)\sqrt{1/(LC)}$. Электростатическая энергия конденсатора превращается в магнитную энергию катушки индуктивности, а затем происходит обратное превращение. Если в цепи есть активное сопротивление, эта энергия будет постепенно превращаться в тепло. Потери из-за выделения джоулева тепла характеризуются постоянной времени: $\tau = L/R$.

Электроэнергия чаще всего используется в виде переменного тока. Законы для цепей постоянного тока будут в силе и в этом случае, если в них сделать следующее преобразование: $I_{эф} = I_{макс}/\sqrt{2}$, $U_{эф} = U_{макс}/\sqrt{2}$. Индуктивное сопротивление равно $X_L = \omega L$. Емкостное сопротивление равно $X_C = 1/(\omega C)$. Импеданс последовательной комбинации из L, C и R равен $Z = \sqrt{(X_C - X_L)^2 + R^2}$. Фазовый угол между током и напряжением дается выражением $\operatorname{tg}\varphi = (X_C - X_L)/R$. Когда в цепи ток и напряжение изменяются не в фазе, потребляемая мощность равна $P = I_{эф} U_{эф} \cos\varphi$.

Трансформаторы преобразуют с высоким коэффициентом полезного действия напряжение переменного тока. Если число витков первичной обмотки $N_п$ и вторичной $N_в$, то $U_в/U_п = N_в/N_п$, $N_п I_п = -N_в I_в$ и $R_п = [1/(N_в/N_п)^2]\, R_в$.

Ответы на вопросы

21-1. При $t = 0$ экспоненциальная функция принимает значение, равное единице: $e^0 = 1$. Поэтому при $t = 0$ заряд равен $q = q_0$, что соответствует начальной ситуации в цепи с конденсатором. Напомним, что

$$q = q_0 e^{-(1/RC)\,t} = \frac{q_0}{e^{(1/RC)\,t}}.$$

Когда t очень велико, экспонента принимает очень большие значения. Поскольку экспонента стоит в знаменателе, q очень мало. При стремлении t к бесконечности q стремится к нулю. Такое математическое поведение согласуется с тем, что мы ожидаем в данной физической ситуации. Если подождать достаточно долго, весь заряд конденсатора стечет и его значение будет равно нулю.

21-2. Постоянная времени данной цепи равна $\tau = RC = 1 \cdot 10^6$ Ом $\cdot\, 1 \cdot 10^{-6}$ Ф $= 1$ с. Период полураспада равен $t_{1/2} = 0{,}69\tau = 0{,}69$ с.

Строго говоря, экспонента обращается в нуль лишь тогда, когда ее отрицательный аргумент стремится к бесконечности. Однако это математическое выражение дает лишь модель физической ситуации. Число электрических зарядов не бесконечно велико, т. е. заряд нельзя дробить до бесконечности. Когда число избыточных электронов на обкладке конденсатора становится мало, эта математическая функция уже не может служить хорошей моделью рассматриваемого процесса. С практической точки зрения заряд конденсатора стекает за конечное время. Спустя пять периодов полураспада заряд уменьшится до 1/32 части своего начального значения. После десяти периодов полураспада остается лишь около 1/1000 части начального заряда.

21-3. У хорошего электроскопа, соединенного с одним из концов стержня, листочки бы разошлись, указывая на сосредоточение зарядов.

21-4. Площадь самого контура не изменяется, но происходит изменение площади той части контура, которая пронизывается магнитным полем.

21-5. При движении контура в магнитном поле в этом контуре возникает электрический ток. Поэтому будут и потери на джоулево тепло, мощность которых равна I^2R. Генерируемая в контуре тепловая мощность равна

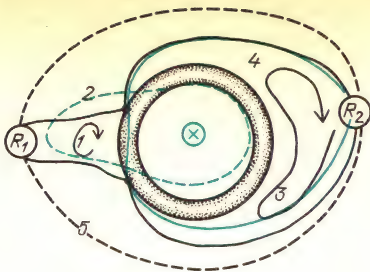
$$P = I^2 R = \frac{B^2 l^2 v^2}{R^2} R = \frac{B^2 l^2 v^2}{R}.$$

21-6. Когда петля охватывает среднюю часть магнита, число проходящих сквозь нее линий магнитного поля максимально. Однако при перемещении петли от одного конца магнита до другого магнитный поток изменяется очень незначительно. Поэтому индукционный ток будет небольшим. По мере продвижения петли за середину магнита число пронизывающих петлю линий магнитного поля уменьшается сначала медленно, затем быстро, индуцируя сильный ток противоположного направления.

21-7. Существует разность потенциалов или нет, зависит от того, как выполняется измерение. Если пилот просто поместит вольтметр в середине самолета и протянет проводники от него к противоположным концам крыльев, показание вольтметра будет равно нулю. Если бы с концов крыльев можно было спустить свисающие до земли провода (малоправдоподобная ситуация), по крыльям мог бы идти ток и вольтметр показал бы разность потенциалов.

21-8. Для контура 1: $-I_1 R_1 + I\left(\frac{1}{6}\ \text{Ом}\right) = 0$,

$$I_1 R_1 = U_1 = \frac{1}{6}\ \text{В}\quad (I = 1\ \text{А}).$$



Для контура 2: $-I_1R_1 - I\left(\frac{5}{6}\ \text{Ом}\right) +$ $+ 1\ \text{В} = 0$, $I_1R_1 = U_1 = \frac{1}{6}$ В (что согласуется с результатом при использовании контура 1).

Для контура 3: $+I\left(\frac{5}{6}\ \text{Ом}\right) - I_2R_2 =$ $= 0$, $I_2R_2 = U_2 = \frac{5}{6}$ В.

Для контура 4: $-I\left(\frac{1}{6}\ \text{Ом}\right) - I_2R_2 +$ $+ 1\ \text{В} = 0$, $I_2R_2 = U_2 = \frac{5}{6}$ В (что согласуется с результатом при использовании контура 3).

Для контура 5: $-I_1R_1 - I_2R_2 + 1\ \text{В} = 0$, $-\frac{1}{6}\ \text{В} - \frac{5}{6}\ \text{В} + 1\ \text{В} = 0$ (проверка).

21-9. Вихревые токи приводят к выделению джоулева тепла. Диск пилы нагревается.

21-10. Генератор имеется в каждом автомобиле. Он подзаряжает аккумуляторную батарею.

21-11. Индуктивность соленоида пропорциональна числу витков соленоида, а также пронизывающему соленоид магнитному потоку, но магнитный поток пропорционален числу витков на единицу длины. Поэтому индуктивность соленоида пропорциональна квадрату числа витков на единицу длины.

21-12. При выводе формулы для индуктивности соленоида мы полагали, что магнитное поле одинаково во всем соленоиде. Такое предположение дает хорошее приближение, когда длина соленоида много больше, чем диаметр его сердцевины. Легко видеть, что соленоид, показанный на с. 282, не удовлетворяет этому требованию.

21-13. Поскольку $L(\Delta I/\Delta t) = -U$, $L = -U(\Delta t/\Delta I)$. Поэтому

$$\frac{L}{R} = -\frac{U}{R}\,\frac{\Delta t}{\Delta I} = -I\left(\frac{\Delta t}{\Delta I}\right).$$

Следовательно, величина L/R имеет размерность времени.

21-14. $W_{\text{пот}}$ = вес · высота = 2 кг · 9,8 м/с^2 × × высота = $7{,}9 \cdot 10^{-3}$ Дж. Соленоид пришлось бы поднять на высоту 0,4 мм.

21-15. Поскольку запасенная энергия определяется всей системой, совсем не очевидно, что эта энергия сосредоточена в каком-то определенном месте. Однако в дальнейшем найдем удобным и вполне согласованным считать, что запасенная магнитная энергия локализована в той части пространства, где есть линии магнитного поля. В соответствии с такой моделью энергия соленоида сосредоточена главным образом в его сердцевине.

21-16. Действительно, наклоны синусоиды порождают косинусоиду и наклоны косинусоиды порождают синусоиду. Правдоподобность этого утверждения была показана на с. 7.

21-17. Раз амплитуда колебаний напряжения затухает, электростатическая и магнитная энергии в данной цепи должны убывать. Если бы электрическая и магнитная энергии целиком превращались друг в друга, амплитуда колебаний напряжения оставалась бы постоянной. В показанном на с. 286 случае энергия должна превращаться в какую-нибудь другую форму.

21-18. Поскольку запасенная энергия пропорциональна квадрату амплитуды заряда, то при уменьшении амплитуды заряда до $1/e$ от ее первоначального значения запасенная энергия уменьшается до $(1/e)^2$, т. е. до 14% от своего начального значения. Отметьте, что постоянная времени для рассеяния энергии равна половине постоянной времени стекания заряда.

21-19. В кино стандартная частота смены кадров равна 24 кадрам в секунду. Для телевидения в Соединенных Штатах (где стандартная частота переменного тока 60 Гц) принята частота 30 кадров в секунду. В действительности глаз чувствителен к мерцаниям *интенсивности* света вплоть до частот около 50 Гц, если свет переходит от полной темноты до средней яркости. Чтобы избежать проблемы мерцаний в кино, каждый кадр в действительности затемняется заслонкой в середине его демонстрации, в результате чего частота мерцаний увеличивается до 48 Гц. Подобный же, но более искусный прием используется и в телевидении. Каждый кадр состоит из

двух наборов перемежающихся горизонтальных строк. Один такой набор прочерчивается за 1/60 секунды, а затем в течение следующей 1/60 секунды прочерчиваются строки второго полукадра, ложащиеся в промежутки между строками первого полукадра.

21-20. В цепи постоянного тока конденсатор представляет собой просто открытый промежуток (разрыв цепи) с очень большим сопротивлением. Катушка индуктивности действует просто как сопротивление, значение которого определяется проводом, из которого она намотана.

21-21. Переменный ток нулевой частоты — это просто постоянный ток. Бесконечное емкостное сопротивление означает просто разомкнутый контакт.

21-22. Поскольку емкостное и индуктивное сопротивления соединены последовательно и имеют одинаковое значение, они компенсируют друг друга, и полный импеданс остается равным активному сопротивлению: $Z = 10$ Ом. Поэтому максимальное напряжение в такой последовательной цепи равно $U = IZ = 1$ А $\cdot$ 10 Ом $=$ 10 В. Однако максимальное напряжение на катушке индуктивности или конденсаторе будет равно $U = IX = 1$ А $\cdot$ 100 Ом $=$ 100 В.

В резонансной цепи, подобной этой, большие размахи напряжения на конденсаторе и катушке индуктивности иногда приводят к таким проблемам, как пробой изоляции. С другой стороны, как мы увидим в главе 22, резонансные цепи играют жизненно важную роль для радиоприема. Фактически они усиливают резонансный сигнал.

21-23. Ток и напряжение в трансформаторе сдвинуты по фазе на 90°. Индуцируемое напряжение и в самом деле препятствует тому, чтобы э. д. с. генератора создавала еще какой-то ток. Но ток в первичной обмотке, возникший во время включения, остается. В реальных трансформаторе или катушке индуктивности некоторые потери энергии происходят из-за активного сопротивления и поэтому генератор должен непрерывно поставлять какую-то энергию. Это возможно, если ток в первичной цепи сдвинут по фазе относительно э. д. с. не точно на 90°.

21-24. Нельзя получить что-то из ничего. В повышающем трансформаторе вторичное напряжение больше, чем первичное, в $N_в/N_п$ раз. В обмен на это увеличение напряжения первичная обмотка должна потреблять больший ток. Отношение тока во вторичной обмотке к току в первичной равно $N_п/N_в$. Поскольку мощность равна IU, потребляемая первичной обмоткой мощность равна мощности, снимаемой со вторичной обмотки.

Задачи

1. Покажите, что произведение RC имеет размерность времени.

2. Когда две небольшие сферы (такие, как воздушные шарики) подвешены на нитях, закрепленных в одной точке, и заряжены одинаковыми зарядами, они будут отталкиваться и в сухую погоду остаются отделенными друг от друга в течение многих минут. Чему равно по порядку величины сопротивление путей утечки зарядов (через воздух и нити), если емкость каждой сферы равна 10^{-11} Ф и постоянная времени равна 10^2 с?

3. Конденсатор емкости 0,1 мкФ разряжается через резистор сопротивлением $1 \cdot 10^6$ Ом. Если начальное напряжение на конденсаторе равно 10 В, сколько примерно времени нужно, чтобы оно упало до 1 В?

4. Емкость тонкого провода, свободно лежащего на лабораторной скамье, равна примерно 10^{-10} Ф/м. Вы используете около метра этого провода для соединения батарейки карманного фонаря через ключ с резистором в 10 Ом. Сколько времени требуется для установления тока после замыкания ключа?

5. Допустим, что у вас есть петля диаметром 10 см, состоящая из 10 витков провода, которая лежит своей плоскостью в зазоре большого магнита, создающего поле 1,5 Тл. Чему равна э. д. с. в петле, если вы выдергиваете ее из зазора за 0,1 с? Чему равна э. д. с., если вы переворачиваете петлю в зазоре за 0,1 с?

6. Можно ли обнаружить магнитное поле Земли, переворачивая большую катушку? Какая э. д. с. будет генерироваться при переворачивании рамки из 10 витков провода размером 1×1 м?

7. Предположим, что плоский контур расположен в зазоре большого магнита. Северный полюс магнита расположен наверху; южный — внизу. Если контур быстро вытащить наружу, будет ли индукционный ток направлен по часовой стрелке или против часовой стрелки, если смотреть сверху? Сделайте набросок расположения контура и ли-

ний магнитного поля для обоснования вашего ответа.

8. Первый генератор Фарадея состоял из медного диска, вращающегося в магнитном поле. Контактные щетки, соединенные с центром диска и его краем, служили электродами, с которых снималась генерируемая мощность. Какая э. д. с. развивается на электродах, если диск диаметром 1 м вращается в магнитном поле 1,5 Тл с частотой 10 Гц?

9. Тороидальная (в форме бублика) вакуумная камера расположена по периферии магнита диаметром 1 м. Чему равна напряженность электрического поля в камере, если магнитное поле возрастает за 0,01 с от 0 до 1 Тл? Если бы в камере находился электрон, какую энергию набирал бы он за каждый оборот?

10. Один из способов измерения напряженности магнитного поля состоит в том, чтобы, выдергивая из этого поля катушку, пропустить индукционный ток через устройство для измерения заряда. Если катушка из 50 витков с поперечным сечением 1 $см^2$ включена в цепь с общим сопротивлением 10 Ом и выдергивается из магнитного поля 1 Тл, сколько кулонов заряда проходит по цепи? (Заметьте, что ответ в этой задаче не зависит от времени выдергивания!)

11. Катушка из 50 витков радиусом 10 см находится на расстоянии 1 м от другой такой же катушки. Они имеют общую ось. Чему равна э. д. с. индукции во второй катушке, когда первая, несущая ток 10 А, выключается за 0,01 с?

12. Дайте описание и сделайте набросок для случая, когда закон Лоренца предсказывает появление э. д. с. индукции, но закон Фарадея неприменим. Приведите описание и набросок для противоположной ситуации.

13. Большой магнит для исследований с полем 1,5 Тл и площадью поперечного сечения 0,1 $м^2$ имеет обмотку из 100 витков. Чему равно среднее напряжение на ее выводах, если размыкается выключатель и цепь разрывается за 0,01 с?

14. Если поле в бетатроне возрастает до максимального значения за 0,01 с, чему должно быть равно $B_{\text{макс}}$ при $r = 1$ м, чтобы электроны набирали энергию 10000 эВ за каждый оборот?

15. Сделайте набросок простого генератора, состоящего из одиночного прямоугольного витка, вращающегося между двумя полюсными наконечниками. Изобразите соединение витка с внешней цепью через коммутационные кольца коллектора.

16. Чему равна индуктивность тороидального соленоида (в виде бублика) с $2 \cdot 10^3$ витков на метр, радиус поперечного сечения которого равен 2 см, а диаметр тора (его осевой линии) равен 20 см?

17. Чему равна постоянная времени τ и период полураспада $t_{1/2}$ для цепи с индуктивностью $L = 1 \cdot 10^{-3}$ Гн и активным сопротивлением $R = 500$ Ом?

18. По катушке индуктивностью $L = 1$ Гн течет ток 10 А. Чему будет равно напряжение на разрыве, если цепь катушки разомкнуть за $1 \cdot 10^{-3}$ с?

19. Сколько энергии запасено в тороидальном соленоиде с $2 \cdot 10^3$ витков на метр, радиус поперечного сечения которого равен 2 см, а диаметр осевой линии тора равен 20 см, если по нему течет ток 10 А?

20. Чему равна плотность энергии магнитного поля Земли, если принять, что оно равно $B = 0{,}5$ Гс? Сколько магнитной энергии запасено вблизи поверхности Земли в области площадью 1 $км^2$, простирающейся в высоту на 10 км? Сравните ее с запасом энергии в галлоне бензина.

21. Допустим, нам нужно, чтобы цепь имела резонанс на частоте в середине диапазона радиоволн – $1 \cdot 10^6$ Гц. Какая потребуется емкость при использовании катушки индуктивностью $L = 1 \cdot 10^{-4}$ Гн?

22. Чему должна быть равна постоянная времени τ, чтобы ток I упал до $1/e$ от своего начального значения в катушке индуктивностью $L = 1 \cdot 10^{-4}$ Гн и $R = 1$ Ом? Чему равно τ для энергии W?

23. Во многих схемах усилителей каскады связаны через конденсаторы с резистором, идущим от входа к земле. Конденсатор блокирует постоянный ток, но пропускает переменный ток. Если входное сопротивление равно $1 \cdot 10^6$ Ом, какое значение емкости C необходимо, чтобы напряжение частоты 60 Гц на входе второй ступени ослаблялось только вдвое?

24. Чему равны реактивные сопротивления X_L и X_C для индуктивности $L = 1 \cdot 10^{-4}$ Гн и емкости $C = 1 \cdot 10^{-8}$ Ф при частотах 60 Гц и 1 МГц?

25. Последовательная LRC-цепь имеет резонанс при частоте 500 Гц. Индуктивность цепи равна $L = 0{,}1$ Гн и активное сопротивление равно $R = 50$ Ом. Чему равны амплитуды напряжения на резисторе, конденсаторе и катушке индуктивности при подключении такой цепи к источнику частотой 500 Гц с амплитудой напряжения 100 В?

26. Трансформатор для игрушечной железной дороги превращает 120 В в 6 В. Если сопротивление цепи поезда равно 10 Ом, чему равно эффективное сопротивление в первичной обмотке трансформатора?

ГЛАВА 22. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

В главе 21 мы видели, что происходит *в электрических цепях* при изменении тока. Изменяющийся ток создает изменяющееся магнитное поле, которое в свою очередь приводит к появлению э. д. с. Все изученные нами эффекты были локализованы в пределах цепи или ее непосредственной окрестности. Теперь необходимо рассмотреть совсем новое явление, которое возникает при ускоренном движении электрических зарядов. При этом создаются электрические и магнитные поля, которые испускаются источником и уносят с собой энергию, импульс и момент импульса. Радио, телевидение, видимый свет и рентгеновские лучи – все это электромагнитное излучение.

Мы начинаем исследование электромагнитного излучения с обзора изученных до сих пор основных законов электричества. В том виде, как они рассматривались ранее, эти законы не полны. Если добавить еще один член, можно увидеть, что эти уравнения предсказывают явление излучения. Это предсказание дает даже скорость распространения излучения, которая оказывается равной скорости света.

Увидев, как электромагнитное излучение вытекает из основных законов, исследуем различные диапазоны электромагнитного излучения. Хотя радиоволны и рентгеновское излучение в своей основе представляют собой одно и то же явление, их проявления совершенно различны.

ЗНАКОМСТВО С ЯВЛЕНИЯМИ

1. Вы можете осуществить передачу и прием радио- и телевизионных сигналов, не имея настоящего передатчика. Все, что вам потребуется – это источник тока, который можно быстро включать и выключать. Электродвигатели с коллектором (но не индукционные) являются хорошими генераторами радиосигналов. Такими моторчиками снабжаются обычно электробритвы, бытовые миксеры или швейные машины. Телевизор или АМ-радиоприемник может служить хорошим детектором местных радиопомех. Передача *звука* в телевидении осуществляется с помощью частотной модуляции, которая мало подвержена влиянию помех. Однако передача телевизионного изображения производится на амплитудной модуляции и подвержена местным помехам от токов, которые резко включаются или выключаются.

Включайте моторчик на разных расстояниях от радиоприемника или телевизора. Чем ближе к детектору происходит прерывание тока, тем сильнее эффект. Другой способ создания помех – на мгновение замыкать накоротко батарейку с помощью куска провода. Чтобы увидеть или услышать этот эффект, вам придется поднести батарейку вплотную к приемнику.

Обратите внимание, что эффект помех на экране телевизора зависит до некоторой степени от ориентации мотор-

чика, а также от небольших боковых перемещений перед телевизором. Моторчик в данном случае служит одновременно генератором и антенной, и поэтому передача электромагнитного излучения зависит от его положения и ориентации относительно приемника.

2. Рассмотрите внимательно антенны, используемые для радиовещания, телевидения и радиолокации. Радиостанция для обычных передач с амплитудной модуляцией должна иметь для своей антенны высокую вертикальную башню. Ниже увидим, как высота антенны зависит от частоты или длины волны, на которой ведется передача. Многие радиоприемники не имеют наружной антенны, а если имеют, то это тоже вертикальный стержень, такой, как в автомобильных приемниках. Конечно, по практическим соображениям приемная антенна не столь высока, как передающая антенна радиостанции. Однако чем выше приемная антенна, тем лучше прием, по крайней мере до тех пор, пока высота не станет такой же, как у передающей антенны. Если у вас есть телескопическая автомобильная антенна, можно наблюдать этот эффект, настроившись на слабую станцию и поднимая или снижая антенну.

Портативные АМ-радиоприемники обычно имеют антенны, чувствительные к магнитному полю излучения. Если у вас есть такой приемник, настройте его на волну находящейся в некотором отдалении станции, направление на которую известно, и наблюдайте условия приема при повороте приемника сначала вокруг вертикальной оси, а затем вокруг горизонтальной оси, направленной к станции. Обычно качество приема зависит от того, будет ли приемник обращен к удаленному передатчику лицевой стороной или боком. Если у вашего приемника есть телескопическая антенна, реагирующая на электрическое поле сигнала, наблюдайте, что происходит, если придать антенне горизонтальное положение вместо обычного вертикального.

Телевизионные антенны очень сильно отличаются от используемых для АМ-радиоприемников. Передающие и приемные телевизионные антенны име-

ют почти одинаковые размеры и могут даже иметь одинаковую форму. Формы телевизионных антенн на крышах домов могут различаться, но отметьте, что все они примерно одинаковых размеров. Более того, в данной местности они все, возможно, направлены в одну сторону. Заметьте, что их длинные поперечные стержни перпендикулярны к направлению на телецентр.

Антенны радаров могут быть значительно меньше телевизионных. Например, в радаре автоинспекции излучение и прием осуществляются напоминающим телескоп устройством, диаметр которого может быть лишь 10 см или около того.

По форме антенны радаров похожи на рефлекторы оптических телескопов или прожекторов.

3. Если вы испытали чувствительность портативного АМ-радиоприемника к различным ориентациям относительно направления на станцию, вы уже встретились с эффектом *поляризации*

Вы видите блестящую крышку стола сквозь две пары солнцезащитных очков с поляроидами. Левая пара, ослабляющая блеск, имеет нормальную ориентацию. Обратите внимание, что свет совсем не проходит там, где очки перекрываются

электромагнитного излучения. Можно познакомиться с некоторыми из этих эффектов в видимом свете, если достать солнцезащитные очки с поляроидами. Посмотрите сквозь поляризатор на голубое небо в стороне от Солнца и понаблюдайте эффект при повороте очков на 90°. Затем посмотрите на блеск света, отраженного дорогой или крышкой стола, и понаблюдайте, как меняется его вид при повороте поляризатора.

Очевидно, что электромагнитное излучение, будь то радиоволны или видимый свет, передается с помощью некоторого физического процесса, который зависит от ориентации относительно направления распространения. Развивая теорию электромагнитного излучения, найдем объяснение всем этим эффектам.

4. Струя воды из шланга дает довольно точную аналогию линий электрического поля. Если перемещать шланг очень медленно (в сравнении со скоростью струи) в перпендикулярном к струе направлении, получается модель линий поля, выходящих из медленно движущегося электрического заряда. (Игнорируйте тот факт, что струя воды следует параболической траектории в вертикальной плоскости из-за силы тяжести. Наблюдайте только за горизонтальной проекцией струи.) Струя из шланга образует прямую линию, выходящую из наконечника и перпендикулярную к направлению движения. Если, однако, перемещать наконечник с ускорением, на струе образуется излом. Этот излом имеет ясно выраженную составляющую, *перпендикулярную* к основному направлению струи.

Особенно впечатляющий эффект можно получить, двигая наконечник перпендикулярно к струе туда и обратно по гармоническому закону. По струе будут перемещаться извивающиеся волны.

Отметьте в особенности, что размах волн *увеличивается* с увеличением расстояния от наконечника. Иллюстрация этого эффекта приведена на фотографии. Чтобы лучше понять излучение ускоренного заряда, стоит выполнить

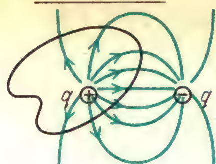
эту простую демонстрацию своими руками.

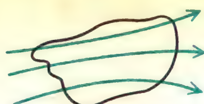
ОБЗОР ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА

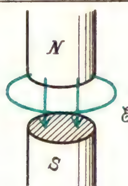
Вопрос 22-1
Можно ли считать закон Кулона и закон Ома основными уравнениями электричества?

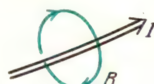
На рисунке в левой колонке на с. 303 сведены вместе изученные к этому моменту четыре основных закона электромагнетизма. Первые два закона относятся к статическим ситуациям. В терминах линий поля они связывают электрические и магнитные поля с их неподвижными источниками. Линии электрического поля начинаются на положительных зарядах и оканчиваются на отрицательных. Поскольку магнитных зарядов – монополей не существует, линии магнитного поля должны быть непрерывными.

Третий закон, открытый Фарадеем, описывает динамический способ возникновения электрического поля. Согласно четвертому закону, установленному Ампером, замкнутые линии магнитного по-



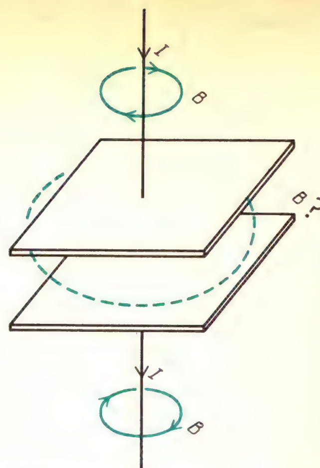






ля создаются движением электрических зарядов.

Эти четыре уравнения, собранные вместе, были рассмотрены Джеймсом Клерком Максвеллом (1831–1879). В этих уравнениях на него произвели впечатление элементы симметрии между электрическим и магнитным полями, но, с другой стороны, он был обеспокоен очевидным отсутствием полной симметрии. Во-первых, как мы уже отмечали, в природе не существуют магнитные заряды и поэтому не бывает магнитного тока. Но в этих уравнениях есть еще один пробел. Хотя третье уравнение описывает, что происходит, когда магнитное поле изменяется со временем, в уравнениях нет соответствующего члена, который описывал бы, что происходит при изменении электрического поля. На следующем рисунке показана одна из трудностей, вызываемых отсутствием такого члена. Когда ток заряжает конденсатор, вокруг подводящих проводов должны существовать линии магнитного поля. Однако сквозь замкнутый круговой контур, расположенный между пластинами конденсатора, никакой ток не проходит. Согласно закону Ампера в том виде, как он сформулирован, в

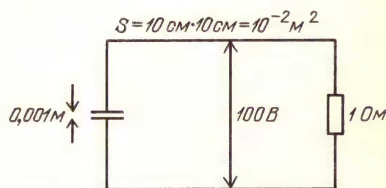


зазоре между пластинами конденсатора не должно быть никаких линий магнитного поля. Такое резкое изменение магнитного поля было бы противоестественным. Поскольку в процессе зарядки электрическое поле в конденсаторе меняется, Максвелл предположил, что магнитное поле должно возникать вокруг изменяющегося со временем электрического поля. С этим добавочным членом четвертое уравнение принимает следующий законченный вид:

$$\sum B\cdot\Delta l = \mu_0 I + \mu_0\left(\varepsilon_0\frac{\Delta\Phi_E}{\Delta t}\right).$$

Вопрос 22-2
В этом исправленном уравнении член $\varepsilon_0(\Delta\Phi_E/\Delta t)$ должен иметь размерность электрического тока. Так ли это на самом деле?

Сопоставим ток и изменяющееся электрическое поле в разряжающемся конденсаторе. На этом рисунке показан



$E = 100$ В/0,001 м $= 1\cdot 10^5$ В/м,

$\Phi_E = ES = (1\cdot 10^5$ В/м$)(1\cdot 10^{-2}$ м$^2) = 10^3$,

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} = \frac{(8{,}85\cdot 10^{-12}\ \text{Ф/м})(1\cdot 10^{-2}\ \text{м}^2)}{1\cdot 10^{-3}\ \text{м}} = 8{,}85\cdot 10^{-11}\ \text{Ф},$$

$\tau = RC = (1$ Ом$)(8{,}85\cdot 10^{-11}$ Ф$) = 8{,}85\cdot 10^{-11}$ с

такой конденсатор. Он был заряжен до напряжения 100 В и теперь разряжается через резистор сопротивлением 1 Ом. Как видно из вычислений, сопровождающих рисунок, электрическое поле сначала равно 10^5 В/м и поток электрического поля равен 10^3 линий. В процессе разрядки заряд конденсатора падает экспоненциально с постоянной времени, равной RC. При заданных размерах конденсатора постоянная времени в этом случае равна $\tau = 8{,}85 \cdot 10^{-11}$ с. Напряжение, электрическое поле и его поток тоже падают с этой же постоянной времени. Стекающий с конденсатора заряд создает ток в соединительных проводах. Для приближенного расчета примем, что в течение короткого промежутка времени разрядка происходит линейно, а не экспоненциально. Тогда в начале разрядки $I = U/R = 100$ В/1 Ом $= 100$ А. Этот ток в 100 А, протекая по проводам, создает вокруг них круговые линии магнитного поля. Эквивалентный ток, вызванный изменением потока электрического поля в конденсаторе, равен

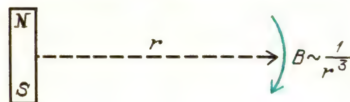
$$\varepsilon_0 \frac{\Delta\Phi_E}{\Delta t} = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{10^3 \text{ линий}}{8{,}85 \cdot 10^{-11} \text{ с}} = 10^2 \text{ А}.$$

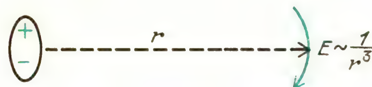
Оказывается, что изменяющееся электрическое поле в конденсаторе приводит к такому же результату, что и ток в соединительном проводе. Линии магнитного поля, охватывающие зазор конденсатора, будут такими же, как и вокруг подводящих проводов.

ФИЗИЧЕСКОЕ СОДЕРЖАНИЕ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Упомянутые четыре уравнения, описывающие электрическое и магнитное поля и их источники, называются уравнениями Максвелла, несмотря на то, что некоторые из них, как и описываемые ими явления, были открыты другими учеными. Так, уравнения Максвелла включают законы, связанные с именами Гаусса, Ампера и Фарадея. Однако лишь Максвелл собрал эти разрозненные уравнения воедино и предложил решающий добавочный член, описывающий действие изменяющегося со временем потока электрического поля. Объединяя эти четыре уравнения, Максвелл предсказал целый ряд новых явлений.

Заметьте, что с помощью электромагнитных эффектов, которые до сих пор были рассмотрены, вряд ли удалось бы осуществить передачу сигналов на расстояние. Можно, конечно, включить ток в проводе или в катушке, чтобы создать магнитное поле, или разделить электрические заряды, чтобы создать электрическое поле. В большинстве подобных случаев возник бы магнитный или электрический диполь, чье поле убывает с расстоянием как $1/r^3$. В лучшем случае мы получили бы точечный





Информацию нельзя передавать с помощью постоянного поля, информация содержится **в изменениях** поля

источник, поле которого убывает как $1/r^2$. Таким способом можно, конечно, посылать сигналы. Детектором может служить стрелка компаса в случае магнитного поля или маленький заряженный шарик на нити в случае электрического поля. Вы можете подумать сначала, что реакция этих детекторов на новые поля, создаваемые удаленными источниками, будет пропорциональна $1/r^3$ или $1/r^2$. Однако чувствительность детектора зависит не от приложенной силы, которая пропорциональна напряженности поля, а от энергии, которую детектор может получить от поля. Как было показано в главе 18, плотность энергии электрического поля пропорциональна E^2. В главе 20 мы видели, что плотность энергии магнитного поля пропорциональна B^2. Следовательно, если мы включаем электрическое или маг-

нитное поле и пытаемся обнаружить его действие на расстоянии, найдем, что эффективность нашего способа обнаружения падает как $1/r^4$ или $1/r^6$, в зависимости от того, является ли источник изолированным зарядом или диполем. Очевидно, нам едва ли удалось бы передавать электрические или магнитные сигналы, если бы возможность их детектировать уменьшалась так быстро с расстоянием.

Вопрос 22-3
Почему действие детектора сигнала должно зависеть от плотности энергии сигнала, а не от возможной силы?

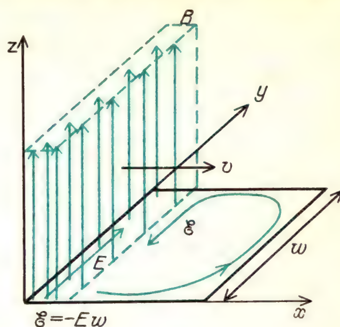
Выполненный Максвеллом анализ четырех уравнений электромагнетизма показал, что существует другой способ распространения в пространстве электрического и магнитного полей. При этом способе поля́ уменьшаются с уменьшением расстояния от источника лишь как $1/r$. Посмотрим, как такое может получиться. Выпишем два последних уравнения Максвелла для вакуума, где нет электрических зарядов или токов:

$$\sum \mathbf{E}\cdot\Delta\mathbf{l} = -\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t},$$

$$\sum \mathbf{B}\cdot\Delta\mathbf{l} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\Delta\Phi_E}{\Delta t}.$$

Эти два уравнения предсказывают новый замечательный эффект. Если магнитное поле каким-либо образом проникает в некоторую область пространства, там будет изменяющийся со временем магнитный поток. Он создаст электрическое поле. Поскольку раньше электрического поля в этой области не было, его появление должно вызвать изменяющийся со временем поток электрического поля. Но изменение потока электрического поля порождает магнитное поле. Эта круговая последовательность событий генерирует электрические поля от изменяющихся магнитных полей и магнитные поля от последующих изменений электрических полей. Такая самоподдерживающаяся система, как мы теперь увидим, будет также и самораспространяющейся.

Предположим, что стена линий магнитного поля, направленных вдоль оси z, продвигается в направлении оси x, как показано на рисунке. (Позже зада-



димся вопросом о том, как такая стена магнитного поля могла бы быть первоначально получена.) Теперь имеем задачу с геометрическим расположением, очень похожим на то, с которого мы начали изучение электромагнитной индукции. Если в плоскости xy выбрать прямоугольный контур, магнитное поле будет продвигаться через него. Изменение магнитного поля внутри контура обеспечивает появление в нем э. д. с. Единственный вклад в э. д. с. обусловлен электрическим полем, действующим вдоль той стороны контура, которая расположена в надвигающемся магнитном поле. Эта э. д. с. (или напряжение) равна $-Ew$. Ширина контура w выбрана произвольно и выпадет из окончательного результата. Напряженность электрического поля E в этом плече контура постоянна, поскольку магнитное поле продвигается через него с постоянной скоростью. Индукционное электрическое поле направлено в положительную сторону оси y, что дает отрицательную э. д. с. при обходе контура в плоскости xy в должном направлении. Скорость изменения магнитного потока через контур равна

$$\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = \frac{\Delta(BS)}{\Delta t} = B\frac{\Delta S}{\Delta t} =$$

$$= Bw\frac{\Delta x}{\Delta t} = Bwv.$$

Изменение магнитного потока в контуре пропорционально скорости v, с которой надвигается стена магнитного поля.

Вопрос 22-4
Как можно было бы управлять скоростью v надвигающейся стены магнитного поля?

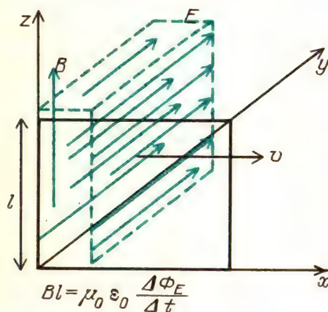
Согласно третьему из уравнений Максвелла для вакуума

$$\sum \mathbf{E}\cdot\Delta\mathbf{l} = -\Delta\Phi_B/\Delta t.$$

Поэтому

$$-Ew = -Bwv, \quad E = Bv.$$

Оказывается, существует простое соотношение между надвигающимся магнитным полем и напряженностью электрического поля, которое при этом возникает. Отметьте, что качественно линии электрического поля существуют лишь в области надвигающейся стены магнитного поля. Перед ней или позади нее никакого электрического поля нет. Но это означает, что у нас есть также стена электрического поля, продвигающаяся вдоль оси x с той же скоростью v. Теперь можно воспользоваться сделанным Максвеллом добавлением к четвертому уравнению, чтобы посмотреть, как это движущееся электрическое поле генерирует магнитное поле. На следующем рисунке на этот раз показана стена электрического поля, линии которого начинают проникать в контур,



расположенный в плоскости xz. Индуцируемое при этом магнитное поле направлено в положительную сторону оси z, но существует только в пределах области, занимаемой стеной электрического поля. Поэтому только переднее плечо контура дает вклад в сумму произведений магнитного поля на перемещение, взятую по замкнутому контуру. Скорость изменения потока электрического поля через контур равна

$$\frac{\Delta\Phi_E}{\Delta t} = E\frac{\Delta S}{\Delta t} = El\frac{\Delta x}{\Delta t} = Elv.$$

Подставим ее в четвертое из уравнений Максвелла:

$$\sum \mathbf{B}\cdot\Delta\mathbf{l} = \mu_0\varepsilon_0\Delta\Phi_E/\Delta t,$$

$$Bl = \mu_0\varepsilon_0 Elv,$$

$$B = \mu_0\varepsilon_0 vE.$$

Теперь мы вывели еще одно соотношение между магнитным и электрическим полями, которые генерируют друг друга. И снова это соотношение содержит скорость, с которой движутся поля. Когда электрическое поле E генерируется изменяющимся магнитным полем B, то

$$E = Bv.$$

Когда поле B генерируется изменяющимся магнитным полем E, то

$$E = B\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0 v}.$$

Эти два равенства не могут быть справедливы одновременно, если только не будет выполняться определенное соотношение между скоростью v и магнитной и электрической постоянными. Найдем это соотношение:

$$v = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0 v}, \qquad v = \sqrt{\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}}.$$

Электрическая постоянная ε_0 определяется из электростатических измерений, результаты которых зависят от значения, приписанного магнитной постоянной μ_0. Мы не можем произвольно выбрать другие значения для ε_0 и μ_0. Теперь оказывается, что скорость, с которой электрическое и магнитное поля продвигаются вдоль оси x, тоже не может быть произвольной. Для нее возможно только одно значение, которое определяется электрическими и магнитными свойствами вакуума. Подставим числовые значения ε_0 и μ_0 и найдем эту специальную скорость:

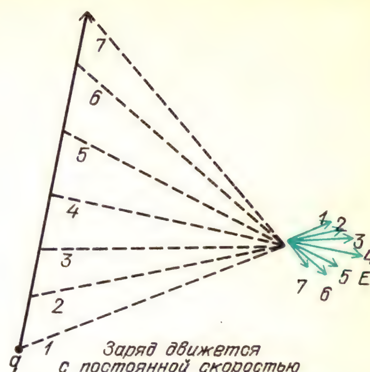
$$v = c = \frac{1}{\sqrt{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}} = 3{,}0\cdot 10^{8}\ \text{м/с}.$$

Во-первых, отметьте, что эта единственно возможная скорость распространения электромагнитных волн в вакууме очень велика. Во-вторых, как вам, возможно, известно, она равна скорости света. Отсюда следует, что сам свет является некоторой электромагнитной волной. Смотрите, какой триумф теории представляют эти простые соображения, изложенные на последней паре страниц. Уравнения Максвелла содержат лишь несколько членов, которые требуют выполнения сравнительно простых соотношений между электрическим и магнитным полями и скоростью их изменения. Когда эти уравнения рассматриваются совместно, они не только говорят о том, что изменяющиеся со временем электрические и магнитные поля будут непрерывно генерировать друг друга, но и предсказывают, что эти изменяющиеся поля будут распространяться в пространстве с универсальной скоростью. Эта скорость определяется константами, которые измеряются в статических экспериментах. Электрическая постоянная ε_0 измеряется в эксперименте с конденсатором. Магнитной постоянной μ_0 приписано некоторое значение, которым определяется размер ампера и кулона. И все же комбинация этих величин приводит к скорости света. Вскоре увидим, как предсказания Максвелла были проверены и подтверждены на опыте. Однако прежде мы должны объяснить, каким образом можно первоначально получить эти переменные электрическое и магнитное поля.

Дополнительный материал

Излучение электромагнитных полей ускоренными зарядами

Сам Максвелл не решал своих уравнений, чтобы показать, что ускоренные заряды «стряхивают» с себя электромагнитную энергию. Детальный расчет сложен, но можно приближенно разобраться в ситуации на основе модели линий поля. Поля, которые обнаруживают себя на некотором расстоянии от движущегося электрического заряда, были созданы этим зарядом в предшествующие моменты времени. Когда заряд движется с постоянной скоростью (но при условии, что она значительно меньше скорости света), электрическое поле E в некоторой удаленной точке будет постепенно изменяться по модулю и направлению, как показано на рисунке.



Поле в удаленной точке направлено радиально из положения заряда **в данный момент времени** (а не в предшествующий момент, когда информация была послана)

Магнитное поле в этой точке при движении заряда остается неизменным по направлению, но постепенно изменяется по модулю. Чтобы поддерживать движение заряда с постоянной скоростью, не требуется подводить энергию, и заряд не теряет энергии, когда он увлекает за собой линии электрического и магнитного полей.

Чтобы *ускорить* заряд в направлении его движения, к нему требуется приложить силу, и поэтому должна совершаться работа. Часть затрачиваемой при этом энергии излучается в форме электрического и магнитного полей, которые несут сообщение о внезапном изменении скорости источника.

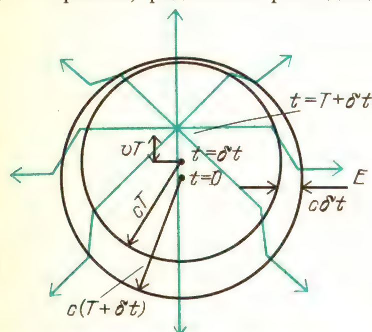
Проанализируем поле, создаваемое в удаленной точке электрическим зарядом, который сначала покоился, а затем внезапно получил ускорение a вертикально вверх на короткий промежуток времени δt. Его скорость к концу этого периода ускорения равна $v = a\delta t$. Затем он продолжает свободное движение вверх с этой скоростью v. Рассмотрим линию электрического поля, которая выходит из заряда в горизонтальном направлении. Даже после того, как заряд начал движение, электрическое поле в отдаленной точке остается постоянным и горизонтальным. Никакой информации о том, что заряд начал движение, еще не поступило в эту точку. В момент времени T, равный расстоянию от заряда до этой точки, деленному на скорость света, поле начинает изме-

нять направление. К моменту времени $T + \delta T$ электрическое поле изменится так, что оно будет направлено вдоль прямой, выходящей из положения заряда в момент $T + \delta t$.

Вопрос 22-5

Почему бы полю не иметь направление вдоль прямой, выходящей из положения заряда в момент δt?

В течение промежутка времени от T до $T + \delta t$ направление электрического поля в удаленной точке наблюдения резко изменяется. Посмотрим, как все это выглядит, и изобразим линии электрического поля, как показано на рисунке. За пределами круга радиусом $c(T + \delta t)$ линии поля направлены вдоль прямых, радиально расходящихся из

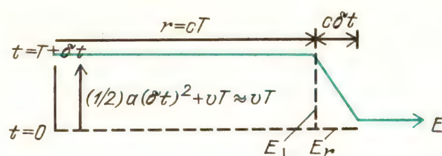


начального положения заряда при $t = 0$. Никакая информация о движении заряда еще не вышла за пределы этого круга. Внутри меньшего круга радиусом cT линии поля направлены радиально из точки, где находится заряд в данный момент времени $t = T + \delta t$. Оба круга радиально расширяются со скоростью света. Между ними находится промежуточная область, где линии поля имеют большую составляющую, перпендикулярную к радиальному направлению. (Заметьте, что линии поля должны быть непрерывны, поэтому при переходе из внутренней сферы каждая линия должна соединяться с соответственной линией за пределами наружной сферы.) Линия поля в этом «изломе» имеет не то направление, которое примет поле после того, как импульс минует точку наблюдения. То направление изменится очень незначительно, поскольку источник перемещается лишь на небольшое расстояние vT, в то время как световой сигнал проходит расстояние cT. Поэтому в конце концов линия поля изменит направление лишь на небольшой угол порядка v/c.

В изломе горизонтальной линии поля отношение поперечной составляющей напряженности поля к радиальной составляющей, как видно из следующего рисунка, равно

$$\frac{E_\perp}{E_r} = \frac{vT}{c\delta t} = \frac{a\delta t T}{c\delta t} = \frac{aT}{c}.$$

Радиальная составляющая представляет со-



Заметьте, что $(1/2)\,a\,(\delta t)^2 \ll vT$

бой просто поле точечного заряда и дается законом Кулона:

$$E_r = k\frac{q}{r^2}.$$

Следовательно, поперечная составляющая напряженности электрического поля равна

$$E_\perp = E_r\frac{aT}{c} = k\frac{qaT}{r^2c}.$$

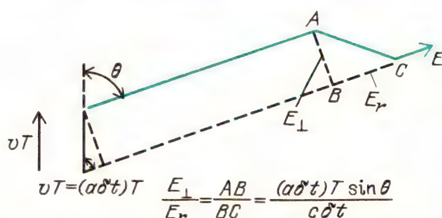
Расстояние от движущегося заряда до точки наблюдения равно $r = cT$, откуда $T = r/c$. Подстановка этого значения T дает следующее значение для поперечной составляющей электрического поля:

$$E_\perp = k\frac{qar}{r^2cc} = k\frac{qa}{c^2r}.$$

Напомним, что эта поперечная составляющая электрического поля несет информацию о том, что заряд подвергается ускорению. Она и пропорциональна ускорению заряда, но, что более замечательно, она обратно пропорциональна лишь *первой* степени расстояния. Почему же некоторая часть электрического поля, зависящего обратно пропорционально квадрату расстояния, убывает обратно пропорционально первой степени этого расстояния? Если вы пристально наблюдали за поведением струи воды из шланга при движениях наконечника в стороны туда и обратно, то должны были заметить, что поперечная компонента возрастала с увеличением расстояния от наконечника. Этот эффект показан на фотографии, помещенной на с. 302. С аналитической точки зрения заметьте, что поперечная компонента

пропорциональна времени, в течение которого распространяется сообщение от источника до точки наблюдения. Это непосредственно связано с тем фактом, что резко сдвинутое поле в точке наблюдения направлено вдоль прямой, выходящей из точки, где находится равномерно движущийся заряд в *данный момент времени*. Чем больше время распространения сигнала T, тем дальше вверх успевает сдвинуться заряд и поэтому тем больше сдвиг линии электрического поля и тем больше его поперечная компонента.

Поперечная составляющая электрического поля – излом на линии поля – зависит также от угла между линией поля и направлением ускорения. Мы рассмотрели случай, когда линия поля перпендикулярна к ускорению и эффект максимален. Если бы мы наблюдали за поведением линии поля, направленной в ту же сторону, что и ускорение заряда, то не обнаружили бы никакого эффекта. Независимо от модуля ускорения такая линия электрического поля сохраняет свое направление, и поэтому здесь не будет поперечной компоненты. Модуль поперечной составляющей поля зависит от синуса угла между направлением ускорения и направлением наблюдения, как показано на этом рисунке. Окончательная формула для поперечной составляющей напряженности электрического поля имеет вид



$$E_\perp = k\frac{qa\sin\theta}{c^2r}.$$

Поскольку обычные электрические и магнитные поля, создаваемые уединенными зарядами или диполями, или электрическими токами, убывают обратно пропорционально второй или третьей степени расстояния, то единственным полем, которое можно обнаружить на больших расстояниях от источника, будет создаваемая ускорением составляющая напряженности поля, зависящая от обратной величины *первой* степени расстояния. Отметьте, прежде всего, что эта часть поля перпендикулярна к прямой, выходящей из источника. Далее, этот поперечный излом уносится наружу со скоростью света. Как мы уже видели раньше, такой импульс электрического поля должен сопровождаться импульсом магнитного поля, которое перпендикулярно к электрическому полю и также к направлению распространения. Плотность энергии в таком импульсе пропорциональна квадрату электрического или магнитного поля. Поэтому излучаемая ускоренно движущимся зарядом энергия должна быть пропорциональна квадрату заряда, квадрату ускорения и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника. Свет, приходящий к нам от карманного фонарика или от удаленной звезды, пропорционален $1/r^2$, если под «светом» понимать поступающую от источника энергию, которую можно зарегистрировать. Поскольку испускаемая ускоряемым вдоль прямой линии зарядом энергия пропорциональна $\sin^2\theta$, заряд излучает преимущественно в перпендикулярных к ускорению направлениях.

В антенне радиопередатчика электроны приводятся в движение вверх и вниз вдоль вертикальной линии, образующей резонансную цепь. Линия имеет длину l в каждую сторону от точки, где к антенне подводится мощность. Электрический заряд совершает простое гармоническое колебание, при котором положение центра заряда дается выражением $y = l\sin\omega t$. При этом скорость центра заряда равна

$$v = \Delta y/\Delta t = \omega l\cos\omega t.$$

Ускорение этого заряда равно

$$a = \Delta v/\Delta t = -\omega^2 l\sin\omega t.$$

Вопрос 22-6

Как излучаемая энергия зависит от частоты сигнала?

ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

При расчетах плотности энергии статических электрического и магнитного полей мы делали предположения о локализации этих полей. В случае конденсатора было сказано, что электрическое поле существует в объеме между пластинами. Вычисление магнитной энергии было проделано для соленоида

в форме тора, т. е. полого бублика. В этом случае предполагалось, что энергия локализована в его внутреннем объеме. В обоих случаях была выбрана определенная геометрия, чтобы поля были постоянными по модулю и заключались в пределах этих объемов. Хотя и было правдоподобно и полезно представлять себе те внутренние пространства заполненными энергией, все же в равной мере можно было приписывать эту энергию зарядам, накопленным на пластинах конденсатора, или токам в соленоиде.

Представление об энергии, реально существующей и движущейся в пространстве, становится гораздо более физичным в случае энергии излучения. Приемная антенна может извлекать энергию из вакуума. Сравним теперь электрическую и магнитную энергию излучения и рассмотрим другой способ описания его свойств.

Плотности энергии электрического и магнитного полей в вакууме (в джоулях на кубический метр (Дж/м^3)) даются выражениями

$$u_E = (\varepsilon_0/2)\,E^2,$$

$$u_B = (1/2\mu_0)\,B^2.$$

В плоской волне электромагнитного излучения существует, как мы видели, простое соотношение между напряженностями электрического и магнитного полей: $B = E/c$. Подставим это значение B в формулу для плотности энергии магнитного поля:

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0}B^2 = \frac{1}{2\mu_0}\frac{E^2}{c^2} = \frac{\varepsilon_0\mu_0}{2\mu_0}E^2 = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2.$$

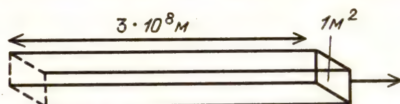
Очевидно, что в плоской волне излучения плотность энергии магнитного поля равна плотности энергии электрического поля. Полная плотность энергии в электромагнитной волне равна

$$u_{\text{полн}} = u = u_E + u_B = \varepsilon_0 E^2.$$

Интенсивность излучения, или *плотность потока энергии излучения*, определяется как энергия, переносимая излучением в единицу времени через единицу площади:

$$J = \frac{\text{энергия/время}}{\text{площадь}} = \frac{\text{мощность}}{\text{площадь}}.$$

На рисунке показано, как подсчитать энергию, переносимую в единицу времени через единицу площади. Длинный ящик имеет единичную площадь поперечного сечения и длину, равную произведению скорости света на единицу



Заключенная в этом ящике энергия выйдет через его правый конец за 1 секунду

времени. В стандартных единицах площадь поперечного сечения ящика была бы равна 1 м^2, а его длина была бы $3\cdot10^8$ м. За 1 секунду вся энергия, заключенная внутри этого ящика, прошла бы сквозь 1 м^2 площади его конца. Полная энергия в ящике равна произведению плотности энергии и объема ящика. Следовательно, интенсивность излучения равна

$$J = \frac{u\cdot\text{объем}}{\text{площадь}\cdot\text{время}} = \frac{u\cdot 1\ \text{м}^2\cdot c\Delta t}{1\ \text{м}^2\cdot\Delta t} = uc = \varepsilon_0 E^2 c.$$

Вопрос 22-7
Все ли здесь в порядке с единицами? Будет ли интенсивность излучения выражаться в ваттах на квадратный метр?

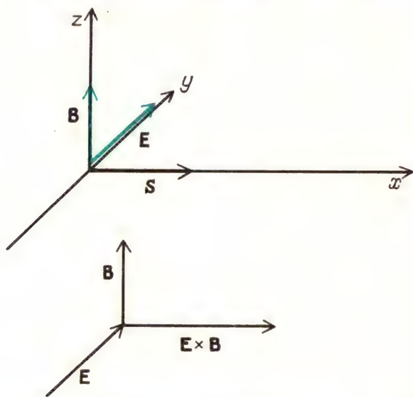
Существует еще один способ описания интенсивности электромагнитного излучения. Мы вывели выражение лишь для модуля интенсивности. Поскольку излучение характеризуется и направлением, было бы удобно представить интенсивность в виде вектора. Преобразуем полученное нами выражение так, чтобы в него входили и электрическое и магнитное поля:

$$J = \varepsilon_0 E^2 c = \varepsilon_0 E(Bc)\,c = \varepsilon_0 EBc^2 = \frac{\varepsilon_0 EB}{\varepsilon_0\mu_0} = \frac{1}{\mu_0}EB.$$

Дадим теперь обоснование новому определению, которое впервые было введено Джоном Пойнтингом (1852 – 1914). *Вектор Пойнтинга*, исключительно наглядная физическая величина, определяется как

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}.$$

На рисунке показано выражаемое этим векторным произведением соотношение между **E**, **B** и вектором Пойнтинга. Обратите внимание, что модуль



S как раз равен интенсивности в ваттах на квадратный метр, выражение для которой мы вывели ранее. Дополнительная информация, содержащаяся в векторном произведении, дает направление потока энергии. Отметьте также, что если электрическое и магнитное поля не перпендикулярны друг другу (может быть, из-за того, что электрическое или магнитное поле преломляется при прохождении сквозь границы), переносимая через такую область энергия будет меньше.

Подсчитаем электрическое и магнитное поля, создаваемые излучением от 100-ваттной электрической лампочки. Прежде всего, большая часть из потребляемых лампочкой 100 ватт не превращается в видимое излучение. К. п. д. лампочки составляет всего лишь около 2,5%. Будем считать лампочку точечным источником, равномерно излучающим по всем направлениям. На расстоянии 3 м от лампочки площадь поверхности окружающей ее сферы равна $S = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 9$ м^2 = 113 м^2. Поэтому интенсивность видимого излучения в ваттах на квадратный метр на расстоянии 3 м равна $J = 2{,}5$ Вт/113 м^2 = 0,022 Вт/м^2. Половина этой мощности доставляется электрическим полем и половина – магнитным. Для электрического поля

$$(1/2)\,\varepsilon_0 E^2 c = (1/2)\,J = (1/2)\cdot 0{,}022 \text{ Вт/м}^2,$$

$$E = \sqrt{\frac{0{,}022}{8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 3\cdot 10^8}} = 2{,}9 \text{ В/м}.$$

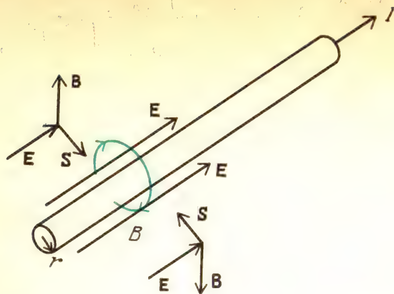
Рассчитанное нами значение E соответствует стационарному полю. Поскольку электрическое поле в световом пучке изменяется синусоидально, пиковое значение напряженности поля равно $\sqrt{2}\,E = 4{,}07$ В/м. Как видно, напряженность электрического поля света, которым вы пользуетесь для чтения, довольно велика. (Напряженность электрического поля телевизионного сигнала на краю зоны уверенного приема составляет лишь несколько микровольт на метр.) Теперь подсчитаем магнитное поле в видимом излучении от 100-ваттной лампочки на расстоянии 3 м:

$$(1/2)\,(1/\mu_0)\,B^2 c = (1/2)\,J = (1/2)\cdot 0{,}022 \text{ Вт/м}^2,$$

$$B = \sqrt{\frac{0{,}022\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}}{3\cdot 10^8}} = 9{,}6\cdot 10^{-9} \text{ Тл}.$$

И опять, поскольку поле в световом пучке изменяется синусоидально, пиковое значение магнитного поля равно $\sqrt{2}\,B = 1{,}4\cdot 10^{-8}$ Тл. Хотя мощность магнитного поля равна мощности электрического поля, очевидно, что это очень слабое магнитное поле.

Исследование локализации электромагнитной энергии приводит иной раз к несколько странным, но срывающим завесу следствиям, когда мы интересуемся направлением потока энергии. Возьмем, к примеру, знакомый случай постоянного тока в проводе или в резисторе. Ясно, что здесь присутствует поток энергии – ведь резистор нагревается. Интуиция подсказывает нам, что эта энергия должна тем или иным способом течь по проводу. Тем не менее подсчитаем вектор Пойнтинга и найдем его направление. Напряженность электриче-



ского поля в проводе и на его поверхности равна $E = U/l$ (где l – длина провода) и направлена вдоль провода. Напряженность магнитного поля на поверхности окружает провод и равна $B = \mu_0 I/(2\pi r)$. Отметьте, что электрическое и магнитное поля перпендикулярны друг другу. Модуль вектора Пойнтинга равен

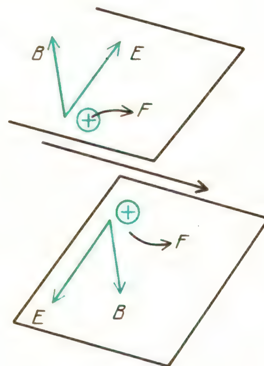
$$S = \frac{EB}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0}\frac{U}{l}\frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{IU}{2\pi r l} = \frac{IU}{\text{площадь поверхности провода}}.$$

Полный поток электромагнитной энергии внутри провода должен быть равен произведению вектора Пойнтинга (в ваттах на квадратный метр) и площади поверхности провода. Это произведение равно мощности джоулева тепла IU, выделяющегося в проводе. Более того, как видно из рисунка, выражаемый вектором Пойнтинга поток энергии направлен радиально внутрь провода всюду на его поверхности. Согласно нашей модели, рассеиваемая в проводе тепловая энергия непрерывно поставляется электрическим и магнитным полями, окружающими провод.

Вопрос 22-8
Разве это не квазистатические поля? Как они могут обеспечивать непрерывный подвод энергии?

ПЕРЕНОС ИМПУЛЬСА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ

Раз электромагнитное излучение переносит энергию, не переносит ли оно также и импульс? Может ли оно действовать на тело с некоторой силой? Конечно, в повседневной жизни мы с такой силой не сталкиваемся. Более того, сразу совсем не очевидно, как плоская электромагнитная волна может действовать на заряженную частицу с некоторой силой вдоль направления распространения волны. Если в волне электрическое и магнитное поля изменяются синусоидально, то основной реакцией заряженной частицы будут колебания вверх и вниз под действием электрического поля волны. Это движение происходит перпендикулярно к направлению распространения, а его усреднение по времени дает нуль. Однако такое вынужденное движение электрического заряда происходит в присутствии сопровождающего заряд магнитного поля волны. Поэтому на заряженную частицу действует сила Лоренца, пропорциональная $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. На рисунке



показано соотношение между направлениями **E**, **B** и направлением результирующей силы **F**, действующей на осциллирующий электрический заряд. Через половину периода, когда заряд движется в противоположном направлении под действием изменившего направление электрического поля волны, магнитное поле волны также обращено. И снова действующая на заряд сила Лоренца направлена в сторону распространения волны.

Сила Лоренца, действующая на заряженную частицу со стороны поля излучения, равна

$$F_{\text{изл}} = evB = ev(E/c).$$

Действующая на заряд электрическая сила равна $F = eE$. Поэтому сила давле-

ния излучения на заряд равна

$$F_{\text{изл}} = \frac{Fv}{c} = \frac{\text{мощность}}{c}.$$

Поглощаемая зарядом мощность равна Fv (поскольку работа над зарядом равна $\Delta A = F\Delta x$ и *мощность* $Fv = \Delta A/\Delta t$). Поскольку $\Delta\,(\text{импульс})\,/\Delta t = F$ и $\Delta\,(\text{энергия})\,/\Delta t =$ *мощность*, связь между импульсом и энергией, переносимыми электромагнитной волной, должна иметь вид

$$\Delta\,(\text{импульс})/\Delta t = (1/c)\,\Delta\,(\text{энергия})/\Delta t,$$

$$\text{импульс} = (1/c)\cdot\text{энергия}.$$

Вопрос 22-9

Правильно ли с точки зрения размерностей, что импульс, передаваемый световой волной некоторому телу, равен поглощаемой телом энергии, деленной на скорость света?

Как мы увидим в главе 23, энергия электромагнитного излучения не распределена в виде непрерывной плавной волны, но, по крайней мере во время взаимодействий, проявляется как квантованная величина. Энергия испускается и поглощается порциями. Соответствующая модель для света такова: он распространяется в виде сгустков, называемых фотонами. Энергия фотона пропорциональна частоте света. Для фотона энергия равна $h\nu$. Поэтому переносимый таким фотоном импульс должен быть равен

$$(1/c)\,h\nu = h/\lambda \quad (\text{поскольку } \lambda = c/\nu).$$

Коэффициент пропорциональности h называется постоянной Планка. Ее значение равно $6{,}6\cdot10^{-34}$ Дж·с. Энергия и импульс, переносимые отдельным фотоном видимого света, очень малы, но все же не настолько, чтобы их невозможно было обнаружить.

Вычислим по порядку величины давление солнечного излучения на Землю. Сила давления излучения равна доставляемой мощности, деленной на скорость света:

$$F_{\text{изл}} = \text{мощность}/c.$$

Мощность, доставляемая солнечным излучением к Земле на единицу площади поверхности, составляет приблизительно 1 киловатт на 1 квадратный метр (1 кВт/м^2). Поэтому давление солнечного света на Землю равно

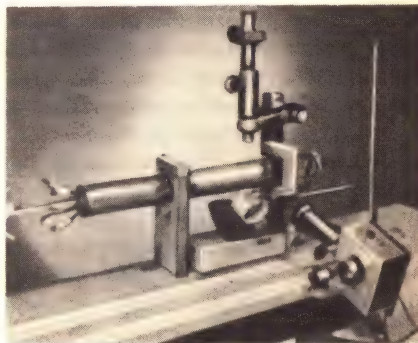
$$\frac{F_{\text{изл}}}{S} = \frac{\text{мощность}/c}{S} = \frac{\text{мощность}/S}{c} = \frac{1\cdot10^3\ \text{Вт/м}^2}{3\cdot10^8\ \text{м/с}} = \frac{1}{3}\cdot10^{-5}\ \text{Па}.$$

Видно, что солнечный свет оказывает на Землю ничтожное давление.

Вопрос 22-10

Выберите подходящую плоскую площадку, соответствующую мишени, которую представляет для солнечного света сферическая Земля, и подсчитайте приближенно полную силу, с которой солнечное излучение действует на Землю.

Хвосты комет сдуваются в противоположную от Солнца сторону частично из-за его электромагнитного излучения и частично из-за потока других частиц, испускаемых Солнцем. Радиационное давление для видимого света было продемонстрировано в лаборатории Е. Ф. Никольсом и Дж. Ф. Халлом в 1903 г.*) Стандартная методика такой демонстрации заключается в облучении маленького зеркальца, закрепленного на коромысле крутильных весов, как показано на фотографии. Импульс, переда-



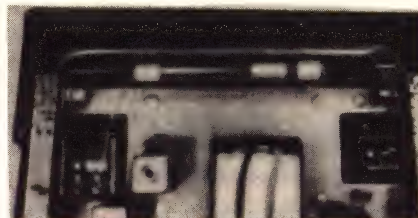
*) Впервые давление видимого света было измерено в опытах русского физика П. Н. Лебедева в 1900 г. (*Примеч. пер.*)

ваемый светом зеркальцу, в два раза больше того, что был бы при поглощении света. Отдача зеркальца обусловлена не только тем, что оно принимает на себя импульс падающего света, но и тем, что оно сообщает отраженному свету импульс в противоположном направлении. Интенсивность света, который можно сфокусировать на крошечном зеркальце крутильных весов, обычно слишком мала, чтобы вызвать заметное отклонение системы. В стандартной технике опыта используют включение и выключение света с частотой, равной собственной частоте колебаний подвеса зеркальца. Тогда падающий свет возбуждает колебания зеркальца, подобно тому, как раскачивают качели. Измеряемый в таких опытах передаваемый импульс хорошо согласуется с теоретически предсказанным.

ПОЛЯРИЗАЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

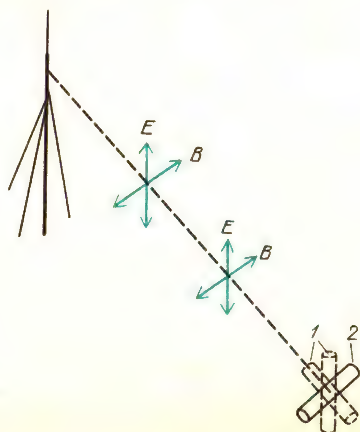
Когда мы только начали рассматривать, как электрическое и магнитное поля могли бы генерировать друг друга и распространяться в пространстве, то считали, что можно создать движущуюся стену электрического поля, все линии которого имеют одно и то же направление, перпендикулярное к направлению распространения. Радиоволны, испускаемые антенной АМ-радиостанции, дают практический пример подобного электромагнитного излучения. Из-за того что электроны источника ускоряются вверх и вниз по вертикали в высокой антенне, электрическое поле излучаемого сигнала тоже имеет вертикальное направление. Соответствующее магнитное поле направлено горизонтально.

В «Знакомстве с явлениями» вам предлагалось поворачивать портативный радиоприемник в различных направлениях по отношению к радиостанции. Если у вашего приемника есть вертикальная антенна, как на автомобиле, значит, он рассчитан на возбуждение электрическим полем радиоволны. Когда вы поворачиваете антенну в горизонтальное положение, сигнал сильно ослабевает. Некоторые портативные приемники снабжены горизонтально расположенными антеннами. Такая антенна представляет собой катушку из многих витков провода, навитую на ферритовый стержень. Этот керамический материал имеет высокую магнитную восприимчивость, но, в отличие от железа,



Антенна с ферритовым стержнем в верхней части транзисторного приемника

он может изменять намагниченность много миллионов раз в секунду. Приемник, снабженный такой антенной, должен не только оставаться горизонтальным для приема сигнала, но он также чувствителен к ориентации относительно радиостанции. Чтобы горизонтальное магнитное поле возбуждало такую магнитную антенну, она должна быть ориентирована не только горизонтально, но и перпендикулярно к направлению на радиостанцию. Возможно, вы обнаружите странные исключения из сформулированных выше правил. Радиоволны могут отражаться от холмов и зданий так, что оптимальный сигнал будет приходить от станции и не по прямому направлению (на рисунке в положениях *1* приема нет; максимальный прием на ферритовую антенну осуще-



ствляется в положении *2*). Более того, в этих отражениях электрическое и магнитное поля могут быть повернуты относительно вертикального и горизонтального направлений.

Видимый свет нельзя генерировать с помощью упорядоченного движения электронов вверх и вниз по антенне. Частота видимого света настолько высока и длина волны настолько мала, что обычно он генерируется атомными системами. Как мы увидим в главе 23, видимый свет обычно генерируется при переходах атома или молекулы из возбужденного состояния на более низкий энергетический уровень. Каждый атом или молекула испускает за один раз только один фотон, фаза и поляризация которого обычно не связаны с этими характеристиками какого бы то ни было другого испускаемого фотона. (Существуют определенные исключения в случаях лазерного и синхротронного излучений, которые будут описаны ниже.) У обычного видимого света напряженность электрического поля в данной точке в данный момент времени может иметь вертикальное направление, а спустя биллионную долю секунды она может быть горизонтальна или направлена под любым промежуточным углом. Векторы электрического и магнитного полей остаются перпендикулярными друг к другу и к направлению распространения. Но поля имеют случайную ориентацию, и их направления все время изменяются.

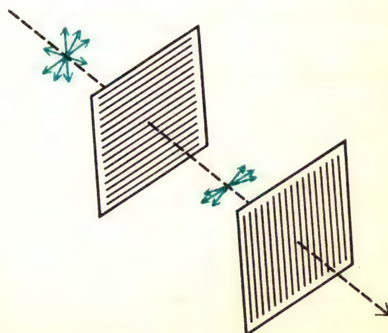
Эффективность рассеяния или отражения света зависит от ориентации вектора электрического поля относительно поверхности, с которой свет взаимодействует. При больших углах падения поверхности отражают большую часть падающего света. Такое отражение выглядит как блеск и содержит мало информации о поверхности.

Вопрос 22-11
Как это может быть? Разве обычно мы видим тела не в отраженном свете?

Поскольку отраженный свет, создающий блеск поверхности, сильно поляризован в горизонтальном направлении, можно ослабить этот блеск, если воспринимать только свет, поляризованный в вертикальном направлении. Именно это и делают солнцезащитные очки с поляроидами. Если у вас есть такие очки, обратите внимание, насколько они уменьшают блеск любой отражающей поверхности и как этот блеск появляется снова при повороте поляризаторов на 90°.

Голубой цвет неба вызван преимущественным рассеянием синего света в верхней атмосфере. Этот рассеянный свет частично поляризован, в чем можно убедиться, рассматривая участок голубого неба через поляризующие очки. Поляризующий светофильтр иногда применяют в фотографии, чтобы затемнить небо и подчеркнуть на его фоне белизну облаков.

Длинные цепные молекулы, внедренные в пластиковые листовые поляризаторы, в процессе изготовления ориентируются так, что все они вытянуты в одном направлении. Когда электрический вектор света перпендикулярен к направлению пропускания, такой поляризатор выглядит почти черным (в действительности его действие до некоторой степени зависит от длины волны, и синий свет все же частично проходит насквозь). При прохождении света через два поляризатора он будет превращаться в линейно поляризованный первым из них и затем будет «анализироваться» вторым. Если эти поляризаторы ориентированы одинаково, свет пройдет насквозь. Но когда они ориентированы друг относительно друга под углом 90°, большая часть света будет задерживаться. Если электрическое поле падающего света образует угол θ с направлением пропускания, то пройдет насквозь лишь



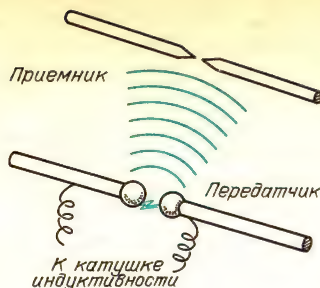
составляющая $E \cos\theta$. Поскольку интенсивность света пропорциональна E^2, интенсивность линейно поляризованного света, прошедшего сквозь поляризатор, равна $J = J_{\text{макс}} \cos^2\theta$.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ПОДТВЕРЖДЕНИЕ ПРЕДСКАЗАНИЯ МАКСВЕЛЛА

Максвелл развивал свои уравнения и следствия из них на основе созданной Фарадеем модели электрических и магнитных полей. Мысленные модели, описываемые его уравнениями, были сложнее, чем те, которые мы используем теперь. Максвелл и другие ученые того времени считали поля и волновые движения физическими свойствами реальной всепроникающей среды, которую они называли эфиром. И тем не менее в 1862 году Максвелл предположил, что «свет состоит из поперечных волнообразных движений той же самой среды, которая служит причиной электрических и магнитных явлений». К тому времени на основе своих уравнений он рассчитал скорость электромагнитных волн и нашел, что эта скорость была приблизительно такой же, как и незадолго до этого измеренная скорость света.

Эксперименты, подтвердившие предсказания Максвелла, впервые были выполнены Генрихом Герцем (1857–1894) между 1885 и 1889 годами, примерно через 25 лет после предсказаний Максвелла, вскоре после его смерти. В своей блестящей серии экспериментов Герц сначала выяснил, как можно получить колебательные цепи для диапазона частот от 10^8 до 10^9 Гц. Он делал это, прерывая токи в индукционных катушках, чтобы внезапно наложить высокие напряжения на искровые промежутки. Проскакивающая в таком промежутке искра состоит из электронов и ионов воздуха, которые осциллируют туда и обратно. Частота осцилляций определяется индуктивностью и емкостью электродов или стержней, образующих искровой промежуток.

Схематическое изображение использованного Герцем прибора показано на рисунке. Приемник состоял из «разрезанного диполя», т. е. стержня, длина которого равна половине длины волны, разделенного в середине маленьким искровым промежутком. Искра *передатчика* проскакивала между небольшими полированными шариками. Эта искра была обильной и пропускала сильный ток. Однако энергия излучения, которую получал приемник, была относительно малой. Даже тогда, когда приемная антенна была настроена на излучаемую частоту, напряжение на искровом промежутке приемника было слабым. Искровой промежуток *приемника* был образован остриями, разделенными расстоянием лишь в доли миллиметра. Герц детектировал излучение, рассматривая крошечные искорки, проскакивающие между остриями.



На частоте $1 \cdot 10^9$ Гц длина волны равна лишь 30 см. Герц измерил длину волны, отражая излучение от металлической пластины и отыскивая узлы образующихся при этом стоячих волн. (Когда приемник расположен в узле, искры в нем не проскакивают.) Он продемонстрировал также, что излучение было поляризовано и что оно испытывало преломление (в призме из смолы) и дифракцию.

Одним из курьезов этого эксперимента было сделанное Герцем наблюдение, что искровой разряд в зазоре приемника возникал лишь тогда, когда на него попадал обычный свет от искры передатчика. Теперь мы знаем, что ультрафиолетовое излучение исходной искры способствовало высвобождению электронов из электродов приемника, облегчая образование детектирующей искры. Это явление называют фотоэлектрическим эффектом и часто приводят как решающий опыт, демонстрирующий фотонную, или корпускулярную, приро-

ду света. Оказалось, что успех эксперимента Герца, продемонстрировавшего волновую природу электромагнитного излучения и существенно на нее опиравшегося, решающим образом зависел и от этого другого аспекта излучения. Герцу не удалось непосредственно измерить скорость излучения, производимого его прибором, но такой эксперимент был выполнен несколько лет спустя. Полученное значение скорости действительно оказалось равным скорости света.

СПЕКТР ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

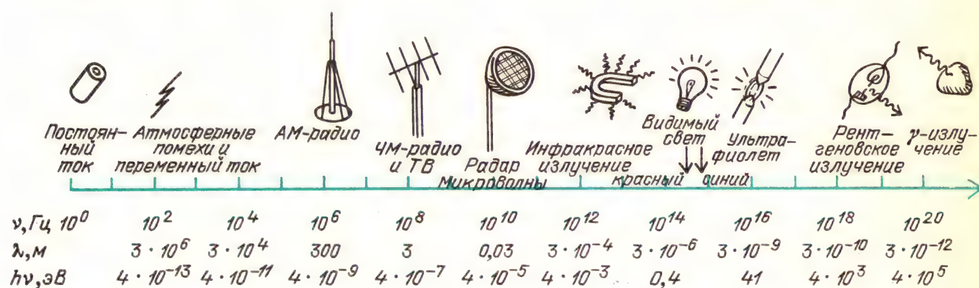
Мы утверждали, что электромагнитное излучение охватывает все эффекты от радиоволн до рентгеновского излучения. В определенном смысле вся внешняя несхожесть этих явлений обусловлена лишь частотой волнового движения. Этот фактор приводит к столь сильным различиям, что придется разделить весь диапазон электромагнитного излучения на отдельные области. Развернем различные эффекты в спектр подобно тому, как видимый свет можно разложить в спектр цветов. Упорядочивающей переменной для такого разложения может служить или частота, или длина волны. Эти переменные связаны основным соотношением волнового движения: $\lambda\nu = c$.

Если начать с радиоволн, здесь будут низкие частоты и большие длины волн. По мере продвижения к рентгеновским лучам переходим к все более высоким частотам и все более коротким волнам.

Существуют и другие факторы, которыми характеризуются отдельные области электромагнитного спектра. Уже упоминалось, что видимый свет при взаимодействии с веществом проявляется в виде сгустков, т. е. квантовым образом. Каждый фотон света доставляет порцию энергии, равную $h\nu$, где h – постоянная Планка. Удобно характеризовать излучение с помощью энергии фотонов данной частоты. Действительно, для частот видимого света и более высоких энергия фотона часто является наиболее важным параметром.

Упорядочивая электромагнитный спектр, следует указать на особенности передатчиков или приемников в каждой его области. Размер антенны связан с длиной волны. Другим родственным фактором является поглощение на определенных частотах. Некоторые вещества прозрачны для одних длин волн и не прозрачны для других.

Здесь изображена шкала электромагнитных волн, показывающая области, которым даны специальные названия.



Шкала по необходимости имеет логарифмический масштаб, поскольку частóты и длины волн простираются в очень широком диапазоне. Обратите внимание, насколько мала область видимого света.

«Рыки» и «свисты». На заре радиовещания бичом определенного вида приемников были разновидности атмосферных помех, называемые «рыками» и «свистами». Это короткоживущие сигналы с частотами в диапазоне слышимых звуков – от нескольких десятков до нескольких сотен циклов в секунду. Высота их тона изменяется на протяжении каждого короткого сигнала. Соответствующие им длины волн по порядку величины достигают 1000 км, т. е. почти протяженности континентов. Эти

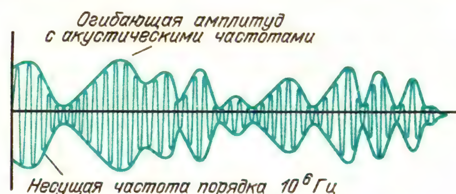
волны прижимаются к поверхности Земли и огибают ее по многу раз, прежде чем затухнут. Поскольку, как мы видели, излучаемая мощность пропорциональна четвертой степени частоты, для получения заметных сигналов на таких низких частотах требуются громадные токи в источниках. По-видимому, эти сигналы вызываются молниями, которые обеспечивают мощность, достаточную для того, чтобы сигналы могли обойти вокруг Земли.

Использовались и искусственные радиосигналы с частотами в диапазоне слышимых звуков. В 1920–1930-х годах для связи через океан время от времени использовалась система на частоте 25 000 Гц. Длина волны этого сигнала составляла 12 км. Антенной служил горизонтальный провод длиной 3 км, растянутый на высоких мачтах. Такая система была задумана до того, как научились изготовлять мощные радиолампы. Для обеспечения достаточной мощности излучения был построен машинный генератор с большим числом коммутаторов. Преимущество передатчика, использующего столь длинные волны, заключается в том, что его сигналы могут стлаться вокруг сферической земной поверхности, а не улетать по касательной в космос. Обычные радиоволны для связи через океан направляют вверх, к ионизованному слою, называемому слоем Хевисайда, лежащему высоко над атмосферой. Тогда коротковолновые сигналы отражаются назад, к Земле, и могут совершить несколько таких отражений или скачков, прежде чем прибудут к месту, где их можно принять. Солнечные магнитные бури временно разрушают слои Хевисайда, но тогда связь между континентами можно поддерживать с помощью системы очень длинных волн.

В навигационной системе «Омега», охватывающей весь мир, генерируются радиосигналы с частотой в диапазоне 10 000 Гц. Ряд передатчиков, расположенных на разных континентах, посылает тщательно синхронизированные сигналы в течение повторяющихся интервалов в несколько секунд. На корабле можно сравнить относительные фазы сигналов от двух или трех станций и определить свое положение на Земле с точностью до двух миль.

Сверхдлинные волны электромагнитного излучения могут проникать в глубины океанов и даже в саму Землю. В военных целях для осуществления связи с подводными лодками были предложены передатчики с частотами в диапазоне 100 Гц. Передающие антенны для таких систем требуют громадных территорий.

АМ-радио. Здесь «АМ» означает амплитудную модуляцию. В передатчике используется определенная несущая частота, но амплитуда этого сигнала изменяется с гораздо более низкими частотами из диапазона слышимых звуков. На рисунке показан пример такой



амплитудной модуляции. Стандартный АМ-диапазон в Соединенных Штатах простирается от 535 кГц до 1605 кГц. Середина этого диапазона приходится на 1 МГц или $1 \cdot 10^6$ циклов в секунду. Соответствующая этой частоте длина волны равна 300 м. Излучение с такой длиной волны может проникать в обычные неметаллические здания, а также может огибать большинство искусственных сооружений.

Вопрос 22-12

Какое отношение имеет длина волны излучения к вопросу о том, будет ли данное тело представлять препятствие для волн?

Нам редко предоставляется случай обратить внимание на квантовый характер радиоволн, но все же подсчитаем энергию, которой обладает соответствующий фотон:

$$h\nu = 6{,}6 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с} \cdot 1 \cdot 10^{6} \text{ Гц} = 6{,}6 \cdot 10^{-28} \text{ Дж} = 6{,}6 \cdot 10^{-28} \text{ Дж} \cdot (1 \text{ эВ}/1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}) \approx 4 \cdot 10^{-9} \text{ эВ}.$$

Энергия фотона электромагнитного излучения АМ-радиочастоты мала даже в атомных масштабах. Чтобы вызвать химическую реакцию, требуется около одного электрон-вольта (1 эВ).

Передающие антенны АМ-радиостанций представляют собой вертикальные мачты. Иногда их устанавливают на крыше очень высокого здания в центре города, иногда массив из нескольких мачт, построенных на земле, помещают на окраине населенного района. Выбирая фазы сигналов в нескольких мачтах, можно управлять направлением излучения, так чтобы большая часть энергии доставлялась в населенный район. Высота мачт обычно около 1/4 длины волны, если сигнал подводится к ним на уровне земли. Существует несколько способов получения эффективных излучателей из антенн, высота которых меньше 1/4 длины волны. Заметьте, что для сигнала частотой 1 МГц антенна в 1/4 длины волны должна иметь высоту 75 м. Полная высота антенны в действительности равна половине длины волны. Другая 1/4 длины волны образована не самой антенной, а ее отражением поверхностью земли. Для обеспечения удовлетворительного сигнала напряженность электрического поля в месте приема должна быть в пределах от 100 мкВ/м в электрически спокойной сельской местности до 10 мВ/м в сердце электрически шумного города. Большинство коммерческих радиостанций имеют радиус действия от 25 до 100 миль. Прием в пределах этой области обеспечивается так называемой наземной волной, которая приходит непосредственно от антенны и преломляется таким образом, что оказывается как бы прильнувшей к искривленной поверхности Земли. Однако некоторая часть излучаемой энергии уходит вверх, к слою Хевисайда, и затем отражается снова вниз, на расстояние многих сотен миль. Эффект отражений обычно мал для АМ-радиоволн, но его значение возрастает для более коротких волн, особенно в ночное время.

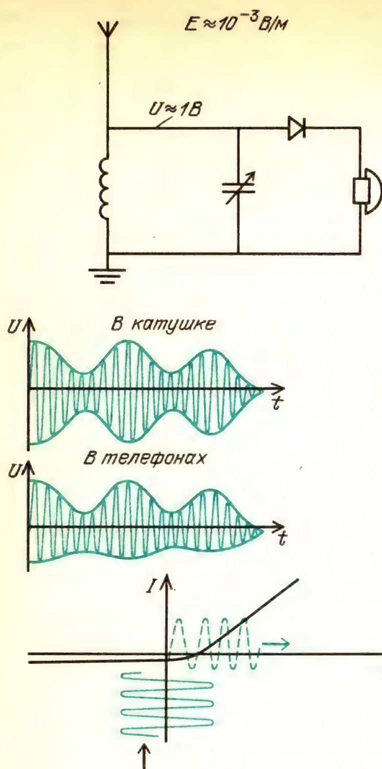
Для генерации и приема радиоволн решающую роль играет явление резонанса, которое обсуждалось в главе, посвященной волнам, а также в главе 21, где мы описывали *LC*-цепи. Оконечный каскад передатчика и антенна образуют *LC*-цепь, настроенную на определенную рабочую частоту данной радиостанции. Благодаря резонансу в передающей антенне создаются сильные токи и высокие напряжения.

Приемная антенна и первый каскад схемы приемника тоже должны быть остро настроены на частоту желаемого сигнала. Главная причина этого требования очевидна. Окружающее антенну пространство заполнено электромагнитным излучением многих частот, приходящим от множества источников. При настройке антенны и приемника на одну определенную частоту сигнал этой частоты приведет цепь в резонансное колебание. Излучение других частот будет не в состоянии вызвать такое колебание.

Удивительно, насколько сильно может вырасти напряжение сигнала в приемнике. Если напряженность электрического поля сигнала составляет только около 1 милливольта на метр и антенна имеет длину всего несколько метров, то напряжение на входе приемника равно лишь нескольким милливольтам. И тем не менее даже детекторные приемники, не имеющие ни радиоламп, ни транзисторов, могут обеспечить прием такого сигнала на слух, хотя для головных телефонов нужны напряжения порядка одного вольта.

Рассмотрим типичную схему простого детекторного радиоприемника. Она показана на рисунке на с. 320. Назначение кристаллического диода (детектора) – выпрямлять высокочастотный радиосигнал; в противном случае громкоговоритель или головные телефоны не будут реагировать на высокочастотный сигнал, который создает переменную (то положительную, то отрицательную) силу. Выпрямляя сигнал, схема создает короткие импульсы изменяющейся величины, но все в одном направлении. Тогда акустическая часть схемы сможет реагировать на медленно изменяющееся среднее значение однонаправленного тока.

Может показаться, что такая схема будет плохо работать из-за того, что кристаллический детектор изменяет пря-



Для эффективного детектирования размахи напряжения должны быть больше, чем ±0,5 В

мое сопротивление на обратное лишь при изменении напряжения в диапазоне нескольких десятых долей вольта. Если к такому детектору приложить сигнал в несколько милливольт, на выходе он вообще едва ли будет выпрямлен. Однако приложенный к кристаллическому детектору сигнал отнюдь не равен нескольким милливольтам. Резонансная цепь, включающая антенну и входную катушку, раскачивается слабым радиосигналом. При резонансе колебания напряжения в сотни раз превышают раскачивающее напряжение. В результате к кристаллическому детектору оказывается приложенным высокочастотный сигнал с амплитудой по меньшей мере 1 вольт, и поэтому выпрямленный сигнал выглядит так, как показано на рисунке. Множитель, показывающий во сколько раз усиливается напряжение в результате резонанса, называется добротностью Q резонансного контура. Высокодобротный контур имеет очень малое активное сопротивление. Контур с высокой добротностью не только дает большое резонансное усиление, но и обладает высокой избирательностью по отношению к другим частотам.

Телевидение и ЧМ-радио. Каждый из телевизионных каналов, начиная со второго, протянувшегося от 54 до 60 МГц, занимает полосу частот шириной 6 МГц. Шестой канал простирается от 82 до 88 МГц. Диапазон частот от 88 МГц до 108 МГц отведен для ЧМ-радиовещания. Каждая ЧМ-радиостанция может использовать канал шириной 150 кГц. Телевизионные каналы от 7 до 13 занимают диапазон от 174 до 216 МГц, а каналы УВЧ (ультравысокой частоты) от 14 до 83 используют диапазон от 470 до 890 МГц.

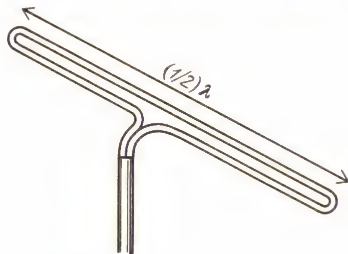
От 2-го канала до 83-го частота возрастает примерно в 15 раз. Подсчитаем длины волн, соответствующие краям этого диапазона. Длина волны для 2-го канала равна

$$\lambda = (3 \cdot 10^8 \text{ м/с}) / (54 \cdot 10^6 \text{ Гц}) \approx 6 \text{ м}.$$

Середине ЧМ-полосы соответствует длина волны около 3 м, и 83-му каналу в УВЧ соответствует длина волны около (1/3) м.

Антенны для телевидения и ЧМ-радио очень сильно отличаются от простых вертикальных проводников для АМ-радио. Если передатчик расположен в центре города, его проектируют так, чтобы он излучал равномерно по всем горизонтальным направлениям. Однако приемные антенны должны иметь направленное действие, и их ориентируют на башню телецентра. Обратите внимание на ТВ антенны на крышах домов в пригороде. Все они будут смотреть в одну сторону, обычно по направлению к центру города. Более того, размеры приемных антенн примерно подогнаны к длине волны. На фотографии показана многоэлементная антенна типа «вол-

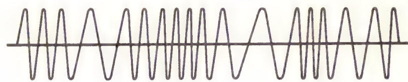
новой канал». Длина ее поперечных стержней равна половине длины волны, и расположены они горизонтально. В телевидении и ЧМ-радиовещании электрическое поле излучаемых волн направлено горизонтально или составляет 45° с вертикалью. Приемный вибратор антенны называется «сложенный диполь». Его геометрия показана на рисунке. Сигнал снимается только с этого



одного вибратора антенны «волновой канал». Остальные отражают и усиливают сигнал. Поскольку такая антенна имеет резонансный максимум для длины волны, вдвое большей длины ее вибраторов, ее чувствительность к другим длинам волн будет низкой. Телевизионные антенны более общего типа резонируют в широком диапазоне частот, но дают меньший выигрыш для каждой из них в отдельности. Для получения резонанса на определенной частоте можно изготовить множество разных конфигураций и форм проводников. Однако во всех случаях размер антенны будет составлять примерно половину длины волны. Как мы видели, резонанс дает ключ к извлечению полезной энергии из электромагнитной волны. Полная резонансная цепь состоит из антенны и перестраиваемого каскада телевизионного или ЧМ-приемника.

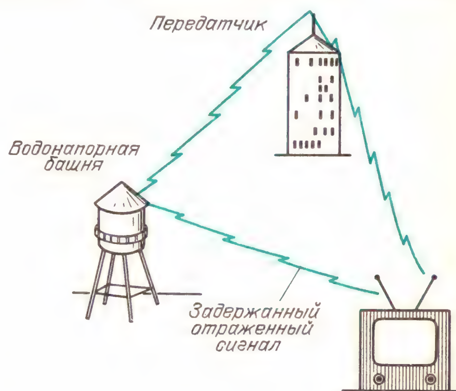
Энергия фотона в диапазоне частот ТВ или ЧМ очень мала, но поскольку эта частота примерно в 100 раз больше, чем в АМ-радиодиапазоне, энергия каждого фотона примерно в 100 раз больше. Это значит, что энергия такого фотона порядка одной миллионной доли электрон-вольта.

Хотя в телевидении сигнал изображения передается с помощью амплитудной модуляции (обратите внимание, как разряд молнии влияет на изображение), сигнал звукового сопровождения передается с помощью частотной модуляции (ЧМ). На рисунке схематически показано, как выглядит ЧМ-сигнал. Акустический сигнал управляет *частотой*



радиосигнала, которая может отклоняться на 75 килогерц в каждую сторону от центральной частоты. В отсутствие акустического сигнала ЧМ-радиосигнал остается на средней частоте и приемник молчит. Чем громче исходный акустический сигнал, тем дальше радиосигнал отклоняется от средней частоты и тем громче результирующий звук в приемнике. Частота исходного акустического сигнала определяет частоту, с которой происходят отклонения радиосигнала от своей средней частоты, а поэтому и частоту детектируемого в приемнике сигнала. Обычные помехи, как индустриальные, так и создаваемые разрядами молний, в такой системе не воспринимаются как сигнал.

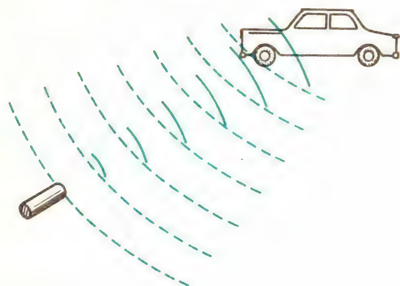
Длина волны в телевидении и ЧМ-радиовещании меньше размеров искусственных сооружений, таких как здания и самолеты. Следовательно, ТВ и ЧМ-сигналы часто отражаются такими



объектами и приходят к вашей антенне двумя различными путями. Разность хода двух таких путей создает разность фаз, которая проявляется на экране телевизора в виде «призраков». Иногда такие призраки вызываются передаваемыми по тому же каналу сигналами в городе, отстоящем на несколько сот

миль. Высокочастотный сигнал не огибает земную поверхность, а по прямой достигает ионизованных слоев и затем снова отражается вниз.

Радар и микроволны. В системе радара передатчик используется также и как приемник. Короткий импульс электромагнитного излучения в форме пучка



посылается передатчиком отражательного типа. Затем та же система ждет, не отразится ли часть этого импульса от какого-либо тела. Промежуток времени между посылкой импульса и приемом его отражения пропорционален расстоянию от радара до этого тела.

Чтобы передатчик мог сформировать узкий пучок, длина волны излучения должна быть мала по сравнению с размерами зеркала передатчика.

Вопрос 22-13
Угловой разброс пучка не может быть меньше ширины дифракционного максимума передающей антенны. Какой вид имеет соотношение между угловой шириной пучка, длиной волны и диаметром зеркала передатчика?

Для радаров используют разные частоты в зависимости от размеров тел, для слежения за которыми они предназначены. Наименьшие длины волн используются в радарах автоинспекции. Вы можете оценить эту длину волны, рассматривая небольшие портативные системы, которыми автоинспекторы берут на прицел проходящие автомобили. Диаметр радарного ружья может быть всего около 10 см. Чтобы излучаемый пучок был достаточно узок для различения близких автомобилей, используемая длина волны должна быть всего около 1 см. Еще более короткие волны поглощаются содержащимися в воздухе пара́ми воды.

Частота излучения с длиной волны 1 см равна $3 \cdot 10^{10}$ Гц, или $3 \cdot 10^4$ МГц. Энергия фотона такой частоты равна

$$E_\gamma = h\nu =$$

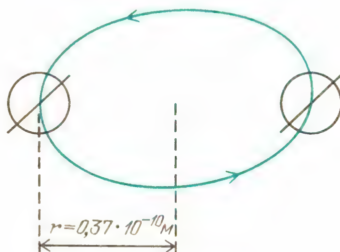
$$= (6{,}6 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с})(3 \cdot 10^{10} \text{ Гц}) \approx$$

$$\approx 20 \cdot 10^{-24} \text{ Дж} = 1{,}2 \cdot 10^{-4} \text{ эВ}.$$

Энергия фотона излучения с длиной волны 1 см все еще много ниже энергии молекулярных связей или средней кинетической энергии колебательного и поступательного движений молекул при комнатной температуре. Однако микроволновые фотоны попадают в энергетический диапазон молекулярных *вращений*. Атомы в молекуле могут не только совершать колебания, но и вращаться вокруг центра масс. Как было указано в главе 9, момент импульса квантуется. Вращающаяся система может изменять момент импульса только целыми кратными основной единицы. Эта основная единица равна постоянной Планка. Если круговая частота выражается в секунду в минус первой степени, то единица момента импульса равна

$$\hbar = h/(2\pi) = 1 \cdot 10^{-34} \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}.$$

Подсчитаем дополнительную энергию простой молекулы водорода, ког-



да двум вращающимся протонам сообщается единица момента импульса:

изменение момента импульса

$$\Delta(I\omega) = \hbar,$$

момент инерции молекулы водорода

$$I = 2m_p r^2,$$

кинетическая энергия вращения

$$E_{вр} = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} \frac{(I\omega)^2}{I} = \frac{1}{2} \frac{\hbar^2}{I} =$$

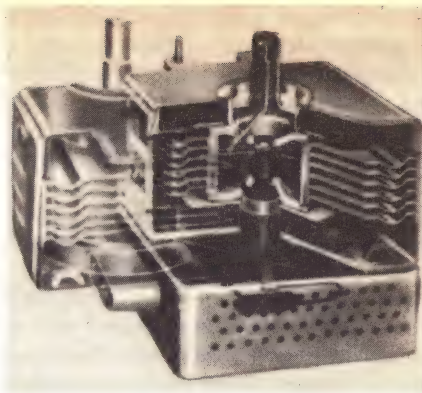
$$= \frac{1}{2} \frac{(1 \cdot 10^{-34})^2}{2 \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \cdot (0{,}37 \cdot 10^{-10} \text{ м})^2} \approx$$

$$\approx 1 \cdot 10^{-21} \text{ Дж} =$$

$$= 1 \cdot 10^{-21} \text{ Дж} \cdot (1 \text{ эВ}/1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}) \approx$$

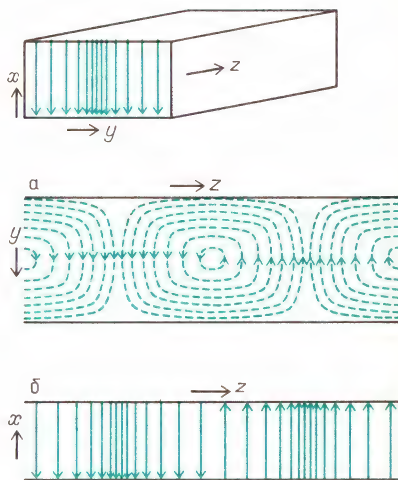
$$\approx 1 \cdot 10^{-2} \text{ эВ}.$$

(Действительное измеренное значение равно $1{,}5 \cdot 10^{-2}$ эВ.) Как видно, при изменении момента импульса молекулы водорода на единицу происходит очень небольшое изменение ее вращательной энергии, хотя оно все же примерно в 100 раз больше энергии фотона с длиной волны 1 см. У более крупных молекул изменение вращательной энергии может быть значительно меньше, чем у молекулы водорода. Обратите внимание, что в формулу, выражающую вращательную энергию через момент импульса, момент инерции входит в знаменателе. У молекулы большей массы и большего радиуса больше и момент инерции, поэтому кинетическая энергия вращения при заданном значении момента импульса будет меньше. Следовательно, микроволновое излучение можно использовать для изучения структуры молекул. Излучение таких длин волн можно генерировать с частотами, известными с высокой точностью. Если пучок такого излучения поглощается в веществе на определенной частоте, это значит, что молекулы вещества должны изменять энергию своих движений на величину, равную энергии соответствующего фотона.



Магнетронный генератор микроволн

Микроволны можно генерировать с помощью вакуумных ламп, в которых используются пучки электронов для возбуждения стоячих волн электромагнитного излучения в небольших полостях. Здесь показан один из типов таких ламп. Вместо того чтобы посылать это высокочастотное излучение по проводам, его можно буквально перекачивать из одного места в другое с очень малыми потерями. На рисунке показаны электрическое и магнитное поля внутри трубы, по которой распространяются



Электрическое (*а*) и магнитное (*б*) поля микроволн, распространяющихся в волноводе

микроволны. По практическим соображениям эту технику используют только для излучения с длинами волн в сантиметровом диапазоне, поскольку поперечные размеры трубы должны быть примерно такими же, как и длина волны излучения.

Пучок радара поднимает температуру вещества, в котором он поглощается. В самом деле, во многих кухнях есть устройства, действие которых основано на этом эффекте. Излучение в стандартной микроволновой печи имеет длину волны 10 см. В одном из серьезных предложений использования солнечной энергии рассматривается огромное поле

кремниевых фотоэлементов, выведенных на стационарную орбиту высотой 22 000 миль над поверхностью Земли. Фотоэлементы поглощали бы солнечный свет и вырабатывали постоянный ток. Его энергия затем превращалась бы в электромагнитное излучение длиной волны 10 см с помощью магнетронов, подобных тем, что используются в микроволновых печах. Эти микроволны направлялись бы сфокусированным пучком на поле выпрямителей, расположенное на Земле вблизи города, который использовал бы эту систему.

Вопрос 22-14

Не будет ли это излучение поджаривать птиц и самолеты, которые сквозь него пролетают? Предположим, что пучок, снабжающий энергией город, имеет полную мощность 10 000 МВт (10^{10} Вт). Если средняя плотность потока энергии в пучке равна 100 Вт/м^2, насколько большое потребовалось бы поле выпрямителей? (Принятый в этой стране безопасный уровень утечки излучения микроволновых печей равен 10 мВт/см^2.)

Инфракрасное излучение. Низкочастотный край этой области не имеет резкой границы, которая отделяла бы ее от микроволновой области. Эта граница определяется скорее длиной волны, а не частотой, поскольку для длин волн, меньших 1 мм, электронные лампы и другие приборы обычной электроники становятся слишком мелкими, чтобы их можно было изготовить или использовать. Соответствующая длине волны 1 мм частота равна $3 \cdot 10^{11}$ Гц. Верхний предел инфракрасного излучения определяется началом области видимого света. Этому соответствует частота около $4 \cdot 10^{14}$ Гц и длина волны $7 \cdot 10^{-7}$ м. Отметьте, что эта длина волны чуть меньше одного микрометра ($0{,}7 \cdot 10^{-6}$ м $= 0{,}7$ мкм).

Энергия фотона для низкочастотного предела равна

$$h\nu = \frac{3 \cdot 10^{11}\ \text{Гц} \cdot 6{,}6 \cdot 10^{-34}\ \text{Дж} \cdot \text{с}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Дж/эВ}} \approx$$

$$\approx 1 \cdot 10^{-3}\ \text{эВ}.$$

Как мы видели, такая энергия соответствует изменениям вращательной энергии молекул. На высокочастотном пределе инфракрасной области фотоны имеют энергию, достаточную для разрыва на части молекул некоторых типов:

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} =$$

$$= \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34}\ \text{Дж} \cdot \text{с} \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \text{м/с}}{7 \cdot 10^{-7}\ \text{м} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Дж/эВ}} = 1{,}8\ \text{эВ}.$$

Поскольку энергия фотонов инфракрасного излучения достаточна для возмущения молекул, оно служит основным инструментом исследования для химиков. Пучок инфракрасного излучения направляется на исследуемое вещество и измеряется его поглощение как функция частоты. Каждая частота, на которой происходит поглощение, соответствует определенной энергии, поглощаемой веществом. Такая энергия изменяет вращательное или колебательное движение молекул. По таким данным можно рассчитать действительное строение молекулы.

Один из способов получения инфракрасного излучения состоит просто в повышении температуры какого-нибудь твердого вещества. По мере повышения температуры твердого тела быстро увеличивается интенсивность испускаемого излучения (пропорционально T^4), а также происходит сдвиг излучения в сторону более высоких частот. Это последнее наблюдение подтверждается повседневным опытом. При возрастании температуры угля или раскаленной проволоки их цвет изменяется от темнокрасного до яркобелого.

При любой температуре выше абсолютного нуля движение атомов и молекул приводит к испусканию электромагнитного излучения. Мы замечаем этот эффект у тел, температура которых выше, чем у нашей кожи. Раскаленные электрические спирали или угли камина могут согреть или даже поджарить нас. Этот эффект зависит не от видимого излучения – можно легко почувствовать излучение от горячего утюга даже тогда, когда он нагрет не настолько сильно, чтобы светиться.

Многие типы лазеров могут создавать излучение в инфракрасной области. Такие источники могут генерировать излучение в узком интервале частот, причем это излучение когерентно.

Видимый свет. Видимая область спектра электромагнитного излучения очень мала и имеет весьма резкие границы, определяемые свойствами органа зрения человека. Высокочастотная граница с сине-фиолетовой стороны имеет длину волны $4 \cdot 10^{-7}$ м. Низкочастотный предел с красной стороны имеет длину волны $7 \cdot 10^{-7}$ м. Длины волн для различных цветов показаны ниже.

	$4 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-7}$	$6 \cdot 10^{-7}$	$7 \cdot 10^{-7}$ λ, м
Ультрафиолетовый	Фиолетовый Голубой	Зеленый Желтый	Оранжевый Красный	Инфракрасный

Мы уже вычислили энергию, соответствующую границе красного и инфракрасного излучений – 1,8 В. Энергия фотона сине-фиолетового цвета равна

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} =$$

$$= \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34}\ \text{Дж} \cdot \text{с} \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \text{м/с}}{4 \cdot 10^{-7}\ \text{м} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Дж/эВ}} = 3\ \text{эВ}.$$

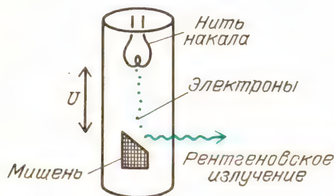
Обратите внимание, как часто количественные меры характеристик различных явлений оказываются по необходимости связанными друг с другом. Поскольку энергии связи атомов порядка 1 эВ, химические элементы создают напряжение около 1 В (напряжение стандартного элемента для карманного фонаря равно 1,5 В; элемента свинцовой аккумуляторной батареи – 2 В). Каждый раз, когда в таком элементе изменяется сочетание молекул, освобождается энергия порядка 1 эВ. Этой энергии достаточно, чтобы электрон мог преодолеть потенциальный барьер около 1 В. Поскольку совершенно ясно, что видимый свет может вызывать химические превращения (фотосинтез, фотография, отбеливание), энергия фотонов видимого света должна быть порядка одного электрон-вольта.

Видимый свет может генерироваться в большом числе различных процессов. Большинство из них происходит в связанных атомных или молекулярных системах. Некоторый электрон такой системы выбивается из своего основного состояния в результате теплового возмущения или электронного удара. Когда возмущенный электрон попадает назад, в свое исходное состояние, избыточная энергия освобождается в форме фотона. Как мы видим, нагретое твердое тело испускает непрерывный спектр фотонов различных частот. Если атомы изолированы друг от друга, как в газе низкого давления, испускаемые фотоны могут иметь только вполне определенные энергии (а следовательно, и длины волн), характерные для атомов данного определенного сорта. В главе 23 мы будем изучать строение атомов и молекул и дополнительно познакомимся со многими деталями испускания и поглощения света.

Ультрафиолетовое и рентгеновское излучение. Основной жизненный опыт, связанный с ультрафиолетовым излучением, мы приобретаем летом, когда много времени проводим на солнце. Наши волосы выгорают, а кожа покрывается загаром и ожогами. Область ультрафиолета начинается у сине-фиолетового конца видимого спектра и сливается без определенных различий с рентгеновским спектром. Для таких фотонов энергия является более важным параметром, чем частота. При длине волны $1 \cdot 10^{-10}$ м, что равно радиусу атома, энергия фотона составляет около $1 \cdot 10^{4}$ эВ. Рентгеновское излучение с такой и более высокой энергией может «видеть» отдельные атомы, поскольку длина волны у него меньше размеров атома. Рентгеновское излучение для медицинской диагностики обычно имеет энергию от 20 000 до 100 000 эВ. Для лучевого разложения тканей используются

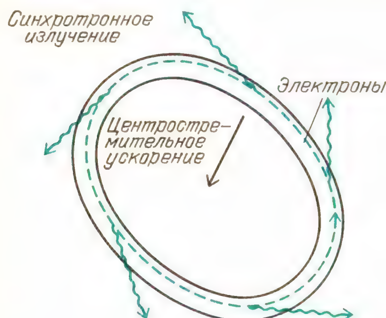
фотоны с энергией $1 \cdot 10^6$ эВ (1 МэВ) и выше.

Медицинский рентгеновский аппарат дает классический пример излучения электромагнитных волн ускоренно движущимся зарядом. Устройство рентгеновской трубки схематически показано на рисунке. Электроны ускоряются под



действием напряжения U, приложенного между нитью накала и мишенью из материала высокой плотности. Ускорение в этом вакуумном промежутке сравнительно мало и приводит к ничтожному излучению. Однако, когда электроны ударяются в мишень высокой плотности, они резко останавливаются с очень большим ускорением. Из мишени вылетают фотоны рентгеновского излучения с энергиями вплоть до максимальной энергии бомбардирующих электронов.

Поскольку рентгеновское излучение можно использовать для зондирования атомной структуры, важно иметь его источники, обладающие высокой интенсивностью. С недавних пор к стандартным рентгеновским аппаратам прибавился электронный синхротрон. Когда электроны высокой энергии (с энергиями порядка 10^9 эВ) удерживаются



магнитным полем на орбите малого радиуса, они должны подвергаться большому центростремительному ускорению. Следовательно, они излучают фотоны узким пучком главным образом в направлении своего движения. Это синхротронное излучение может быть очень интенсивным и простирается от инфракрасной области до рентгеновского излучения с длиной волны порядка атомных размеров. Несколько таких приборов было построено в национальных лабораториях.

Рентгеновское и гамма-излучение. Не существует верхнего предела для энергии фотонов. Точно так же, как не существует реальной границы между ультрафиолетовым и мягким рентгеновским излучением, отсутствует какое-либо физическое различие между рентгеновским и гамма-излучением. По историческим причинам фотоны, порождаемые энергетическими превращениями в *атомах*, были названы рентгеновским излучением, в то время как фотоны, испускаемые возбужденными атомными *ядрами*, были названы гамма-излучением. Когда энергия фотонов превосходит 1 МэВ ($1 \cdot 10^6$ эВ), они могут при определенных условиях рождать электрон-позитронные пары. В рождение пар энергия фотонов поставляет как энергии покоя электрона и позитрона, так и их кинетические энергии. Однако это не тот случай, когда «энергия превращается в вещество». Фотон высокой энергии лучше рассматривать как субатомную частицу. Как мы увидим в главе 23, такие частицы могут превращаться друг в друга, если соблюдаются определенные законы сохранения.

РЕЗЮМЕ

Отдельные уравнения, связанные с именами Гаусса, Ампера и Фарадея, были совместно проанализированы Максвеллом. Он добавил к ним еще один член, чтобы описать магнитное поле, создаваемое изменяющимся потоком электрического поля. Полные уравнения приводят к требованию, чтобы изменяющееся магнитное поле создавало изменяющееся электрическое поле, которое в свою очередь должно создавать изменяющееся магнитное поле. Эти два поля поддерживают распространение друг друга, перемещаясь со скоростью, определяемой статическими

свойствами пространства:

$$v = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}} = 3{,}0 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Движущийся с ускорением электрический заряд излучает электромагнитное поле. Это поле перпендикулярно к прямой, соединяющей заряд с точкой наблюдения. Напряженность электрического поля равна $E_\perp = kqa \sin\theta / c^2 r$. Когда заряды в антенне совершают простое гармоническое движение, их ускорение, а следовательно, и поле излучения пропорциональны квадрату частоты.

Плотность энергии электрического поля в волне равна плотности энергии магнитного поля: $u_E = u_B$, и $u_{\text{полн}} = \varepsilon_0 E^2$. Интенсивность излучения выражается в ваттах на квадратный метр: $J = $ мощность$/S = uc = \varepsilon_0 E^2 c = (1/\mu_0) EB$. Эта интенсивность может быть описана с помощью вектора Пойнтинга: $\mathbf{S} = (1/\mu_0)\, \mathbf{E} \times \mathbf{B}$. Поток энергии направлен перпендикулярно к электрическому и магнитному полям.

Электромагнитное излучение переносит импульс в направлении $\mathbf{S}$: импульс $= (1/c) \cdot$ энергия. Поскольку энергия фотона равна $h\nu$, импульс фотона равен $p = h\nu/c = h/\lambda$.

Излучение, идущее от антенны, поляризовано. В случае АМ-радиовещания электрический вектор вертикален, магнитный вектор горизонтален.

Герц использовал искровые осцилляторы для получения предсказанных Максвеллом электромагнитных волн и показал, что во многих отношениях это излучение ведет себя подобно свету. Спектр электромагнитных волн можно характеризовать с помощью ν, λ или энергии фотонов $h\nu$. Этот спектр простирается от волн с частотой всего несколько герц, возбуждаемых разрядами молний, до гамма-излучения с энергией фотонов в биллионы электрон-вольт.

Ответы на вопросы

22-1. Закон Кулона применим только к неподвижным точечным зарядам. Его можно вывести из закона Гаусса (а также из первого из уравнений Максвелла). Более того, закон Гаусса применим к любой системе зарядов, а не только к точечным зарядам. Закон Ома применим только в частном случае металлов, где плотность носителей заряда остается постоянной и скорость зарядов пропорциональна напряженности электрического поля.

22-2. Закон Гаусса связывает число линий напряженности электрического поля (полный поток, выходящий из замкнутой области) с заключенным в этой области зарядом:

$$\Phi_E = q/\varepsilon_0.$$

Поэтому величина $\varepsilon_0 \Phi_E$ имеет размерность электрического заряда. Деление этой величины на Δt дает величину, имеющую размерность электрического тока.

22-3. Детектор любого вида должен иметь некоторый индикатор, такой как стрелка на шкале, который возвращался бы в исходное положение в отсутствие сигнала. Индикатор может удерживаться пружиной или находиться в гравитационной потенциальной яме. В любом случае для обнаружения сигнала действующая сила должна переместить индикатор на некоторое расстояние. Для этого требуется совершить работу, и необходимая энергия должна поставляться самим сигналом.

22-4. Можно было бы перемещать магнит мимо плоскости наблюдения, точно так же, как в описанном в главе 21 эксперименте мы перемещали контур со скоростью v сквозь магнитное поле. Однако в данном случае был запущен импульс магнитного поля некоторым методом включения удаленного магнита. Этот магнитный импульс движется сам собой с произвольной скоростью v, по крайней мере она произвольна постольку, поскольку на данном этапе мы ничего о ней не знаем. Следующий шаг покажет нам, что эта произвольная скорость магнитного поля связана со скоростью индукционного электрического поля.

22-5. Возможный способ решения этой задачи — представлять себе линии поля как траектории фотонов, выбрасываемых электрическим зарядом. Для такой модели математическая аналогия с движением струи воды из шланга становится точной. К моменту времени δt заряженная частица набрала скорость v. Чтобы фотон был выброшен в перпендикулярном к скорости частицы направлении (в этом

случае он достигнет наблюдателя), он должен начать движение, имея компоненту скорости *назад*, равную v (поскольку он испускается источником, движущимся *вперед* со скоростью v). Когда фотон достигает наблюдателя, он будет казаться прибывшим вдоль прямой, выходящей из положения заряда в момент времени $T + \delta t$.

22-6. Поскольку ускорение электрического заряда, совершающего простое гармоническое движение, пропорционально квадрату частоты, а испускаемая энергия пропорциональна квадрату ускорения заряда, излучаемая энергия должна быть пропорциональна четвертой степени частоты. Следовательно, при одной и той же мощности излучения низкочастотные радиоисточники требуют гораздо больших токов, циркулирующих в передатчике, чем высокочастотные источники.

22-7. Поскольку величина $\varepsilon_0 E^2$ выражает плотность энергии в единицах Дж/м^3, произведение ее на скорость должно дать единицы (Дж/м^3)(м/с) = (Дж/с)(1/м^2). Это и есть ватты на квадратный метр (Вт/м^2).

22-8. Эти поля на самом деле остаются постоянными лишь благодаря непрерывному поступлению энергии от батареи или генератора. Один из способов интерпретации такой локализации энергии – считать, что химическая или механическая энергия источника непрерывно расходуется для поддержания электрического и магнитного полей, обеспечивающих постоянный поток носителей заряда и постоянное снабжение провода тепловой энергией.

22-9. Размерность энергии, деленной на скорость, действительно совпадает с размерностью импульса. Рассмотрим, например, кинетическую энергию, имеющую размерность массы, умноженной на квадрат скорости. Если ее разделить на скорость, получится масса, умноженная на скорость, т. е. величина, имеющая размерность импульса.

22-10. Примем, что поверхность мишени, эквивалентной Земле, соответствует плоскому диску того же радиуса. Его площадь равна $\pi r^2 = \pi \cdot (6{,}4 \cdot 10^6$ м$)^2 = 1{,}3 \cdot 10^{14}$ м^2. Поэтому полная сила давления солнечного излучения на Землю $(1{,}3 \cdot 10^{14}$ м$^2)(1/3) \cdot 10^{-5}$ Па $= 4{,}3 \cdot 10^8$ Н. Поскольку 10^4 Н – это примерно тонна, давление солнечного излучения на Землю составляет около 40 000 тонн.

22-11. Вклад в блеск поверхности дает свет, отраженный от нее как от зеркала. Такое зеркальное отражение содержит информацию только об источнике. В самом деле, поверхность зеркала при этом не «прощупывается». Когда впереди на дороге мы наблюдаем блестящие миражи, в действительности это видно отражение неба.

22-12. Как было показано в главе 16, волны, длина которых велика по сравнению с размерами препятствия, огибают последнее и не создают тени. Когда отношение λ/a меньше единицы, препятствие будет отбрасывать тень.

22-13. Как было показано в главе 16, угловой разброс волн от круглого источника дается выражением $\theta = 1{,}2\lambda/a$. Это половина угловой ширины, измеряемая от центра дифракционной картины до первого минимума. Интенсивность центрального пятна дифракционной картины уменьшается вдвое примерно на половине этого угла. Можно принять, что полная угловая ширина дифракционной картины приблизительно равна $1{,}2\lambda/a$. Если λ/a равно 1/10, то $\theta = 1{,}2/10 = 0{,}12$ рад $\approx 7°$. На расстоянии 100 м ширина пучка была бы 100 м$\cdot$0,12 рад = 12 м. Такой пучок может обнаружить тела на расстоянии 100 м, если они расположены друг от друга не ближе 12 м.

22-14. При плотности потока энергии 100 Вт/м^2 (которая согласуется с принятым для микроволн уровнем безопасности) поле выпрямителей должно было бы иметь площадь 10^8 м^2. Поэтому диаметр такого поля был бы немногим больше 10 км. Территория под выпрямительными устройствами могла бы использоваться для многих целей, в том числе для ферм или пастбищ. Сидящие на антеннах птицы могли бы согреться. Металлическая обшивка самолетов отражала бы микроволны без поглощения.

Задачи

1. Конденсатор емкостью 1,0 мкФ, заряженный до 1000 В, разряжается с постоянной времени, равной $1 \cdot 10^6$ с. Каким был начальный заряд конденсатора? Каким был начальный поток электрического поля в конденсаторе? (Вспомните соотношение из главы 18 между зарядом и полем в конденсаторе.) Чему равен ток разряда, если принять, что происходит линейный спад двух

третей заряда за промежуток, равный постоянной времени?

2. Опишите уравнения Максвелла, используя свои слова и собственные рисунки.

3. При изучении волн в главе 15 мы утверждали, что скорость любых волн должна быть пропорциональна квадратному корню из члена, представляющего восстанавливающую силу, и обратно пропорциональна квадратному корню из члена, характеризующего инертные свойства. Что соответствует этим членам в уравнении для скорости электромагнитных волн?

4. Антенна радиостанции для частоты 1 МГц представляет собой вертикальную мачту высотой 75 м. Эта длина равна четверти длины волны; ее отражение в Земле обеспечивает еще одну четверть длины волны. Если 1 мкКл электронов осциллирует вверх – вниз в антенне с частотой 1 МГц, чему равна амплитуда электрического поля на расстоянии 1 км по горизонтали?

5. Чему равна максимальная плотность энергии u в пространстве, где проходит радиоволна, амплитуда электрического поля которой равна 0,1 В/м?

6. Максимальная интенсивность солнечного света на Земле равна примерно 1,4 кВт/м^2. Каковы при этом значения E и B?

7. Типичный учебный лазер испускает 1 мВт в пучке, диаметр которого вблизи выходного окна равен около 2 мм. Чему равна создаваемая им облученность, или интенсивность излучения, в ваттах на квадратный метр? Сравните ее с интенсивностью солнечного света на Земле.

8. Если радиосигнал имеет эффективное ($E_{\text{макс}}/\sqrt{2}$) электрическое поле $1 \cdot 10^{-3}$ В/м, чему равно эффективное магнитное поле? Чему равно значение вектора Пойнтинга $\mathbf{S}$? Укажите единицы.

9. Если радиосигнал имеет эффективное ($E_{\text{макс}}/\sqrt{2}$) электрическое поле $1 \cdot 10^{-3}$ В/м, чему равна эффективная плотность импульса в этом месте пучка? Какое давление оказывает это излучение?

10. Космический корабль, находящийся на околосолнечной орбите (на таком же расстоянии от Солнца, что и Земля), раскрывает тонкие, как паутина, крылья из посеребренного пластика, чтобы использовать их в качестве паруса. Если парус имеет размеры 10×10 км, какая сила будет приложена к нему со стороны солнечного излучения? (Не забудьте, что парус отражает свет.) Если полная масса корабля равна $1 \cdot 10^5$ кг, сколько времени потребуется, чтобы сила давления излучения изменила скорость корабля на $1 \cdot 10^4$ м/с?

11. Если емкость разрезного диполя, использованного Герцем, была $3 \cdot 10^{-11}$ Ф, чему была равна его индуктивность при резонансной частоте, равной $1 \cdot 10^9$ Гц? (Заметьте, что прямолинейные стержни обладают индуктивностью.)

12. Чему равна длина волны сигнала частотой 535 кГц, соответствующего низкочастотному краю АМ-диапазона?

13. Какой должна быть длина антенны в виде сложенного диполя (приблизительно в половину длины волны) для ЧМ-сигнала частоты 100 МГц?

14. Если натрий сильно нагреть (например, уронив щепотку соли в пламя газовой горелки), он испускает яркий желтый свет. Этот цвет обусловлен излучением двух очень близких длин волн – $5{,}890 \cdot 10^{-7}$ и $5{,}896 \cdot 10^{-7}$ м. Чему равна частота каждого из этих цветов? Чему равна *энергетическая разность* (в эВ) между ними?

15. В медицинском рентгеновском аппарате используется обычно напряжение 50 000 В, что дает рентгеновское излучение с максимальной энергией 50 000 эВ. Чему равна соответствующая частота? Чему равна соответствующая длина волны? (Сравните ее с размером атома.)

16. «Солнечная постоянная» (падающая на Землю интенсивность электромагнитного излучения Солнца) равна 1,4 кВт/м^2. Сколько примерно фотонов/(с·м^2) доставляет эту энергию, если принять их среднюю длину волны посередине видимого спектра?

17. Одним из рабочих инструментов для исследования нашей галактики служит сильная спектральная линия водорода с длиной волны 21 см. Чему равно изменение энергии в атоме водорода, приводящее к такой длине волны?

18. Гамма-излучение с энергиями $1 \cdot 10^9$ эВ (1 ГэВ) можно получить с помощью земных ускорителей заряженных частиц; его обнаруживают и в космическом излучении. Чему равны соответствующие значения λ?

ГЛАВА 23. МИКРОСТРУКТУРА МИРА

Эта глава отличается от остальных в данной книге. Мы уже изучили многие важные явления физического мира и для их объяснения часто обращались к атомной модели строения вещества. Теперь следует пристальнее рассмотреть микроструктуру мира. Однако не существует простого способа познакомиться с явлениями в этой области, не располагая специальным оборудованием. При изучении микромира нам придется положиться на описание экспериментов, выполненных или выполняемых теперь другими исследователями.

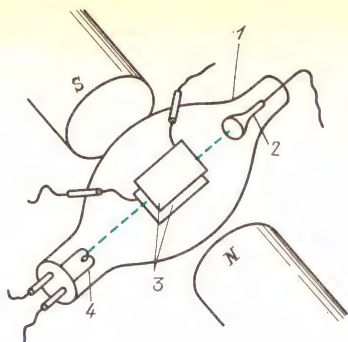
Эта глава отличается также и тем, что мы уже имели дело с некоторыми из вопросов, которые будем теперь снова рассматривать. На этот раз нужно связать воедино различные явления и объяснить их на основе поведения атомов и атомных ядер. Таким образом, эта последняя глава должна подытожить и освежить в памяти проделанную ранее работу, осветив ее с несколько иной точки зрения.

Приступая к описанию микромира, может показаться разумным начать с перечисления различных субатомных частиц и затем описать, как из них формируются ядра, атомы, молекулы, да и мы с вами. Однако это не так просто. Во-первых, существуют некоторые новые правила или законы, в изучении которых у нас до сих пор не возникало необходимости. Но эти законы правят микромиром. Во-вторых, элементарные частицы невозможно описать иначе, как на языке их взаимодействий, а взаимодействия нужно объяснять на основе свойств этих частиц. И наконец, явления микромира для своего описания требуют привлечения понятий, бросающих вызов обыденным представлениям о вселенной и о нашем взаимодействии с ней. Для описания этих явлений необходимо поднять глубинные вопросы о природе физической реальности. Мы оказываемся в положении рассказчика, пытающегося пересказать содержание пьесы, в которой роли актеров нельзя понять, не зная сюжета, а сюжет объяснить, не описав роли актеров. Более того, некоторые из законов сцены отличаются от законов повседневного мира, оказывающихся, как выясняется, всего лишь иллюзией. А реальный мир и представляет собой такую пьесу.

Начнем рассмотрение с осторожностью, обратив более пристальный взгляд на уже знакомую нам частицу. При описании электричества, света, теплоты и других явлений мы часто обращались к электронам. Теперь опишем параметры, или атрибуты, электрона. При этом узнаем кое-что о многих странных чертах микромира. Затем, руководствуясь этими предпосылками, сможем описать другие субатомные частицы и способы их взаимодействия.

ЭЛЕКТРОН

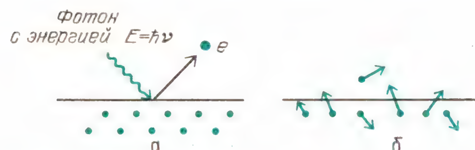
Электрон был первой элементарной частицей, действительно идентифицированной как таковая. В 1897 году Дж. Дж. Томсон измерил отношение заряда к массе (e/m) у частиц, вылетающих из отрицательного вывода внутри вакуумной системы. К тому времени уже несколько лет было известно о существовании «катодных лучей» и было показано, что они несут отрицательный электрический заряд. Предполагалось, однако, что эти лучи представляют собой просто электрический ток. Экспе-



Прибор Томсона для измерения отношения e/m катодных лучей с помощью скрещенных электрического и магнитного полей: 1 – вакуумная трубка, 2 – анод, 3 – пластины, создающие электрическое поле, 4 – нить накала катода

римент Томсона по отклонению траектории катодных лучей электрическим и магнитным полями наиболее просто объяснялся на основе представлений о движении отдельных частиц.

Получение. Из всех частиц электрон легче всего поддается высвобождению. Девяносто лет назад экспериментаторы были заинтригованы тем, как при самом умеренном воздействии электроны, казалось, «выскакивают» из любого вещества. Конечно, должны выполняться определенные минимальные условия. Эти эффекты происходят главным образом в условиях высокого вакуума, и для их обнаружения нужны электроизмерительные приборы. Для удаления электрона из вещества необходимо сообщить ему энергию, достаточную для освобождения от связей, удерживающих его в атоме или молекуле. В случае некоторых металлов это можно сделать нагреванием всей системы, что приводит к «выкипанию» электронов. Их можно также выбивать светом, как в случае фотоэлектрического эффекта. Как мы видели раньше, для освобождения необходима добавочная энергия в несколько электрон-вольт. Обычный синий свет может обеспечить около 3 эВ в единичном столкновении, что достаточно для эмиссии электрона из щелочных металлов. Ультрафиолетовое излучение, которое способно сообщить каждому электрону энергию от 6 до 10 эВ, могло бы выбивать электроны из куриного жира, если бы мы этого захотели (и если предположить, что ультрафиолетовое излучение может пройти сквозь воздух без поглощения, вызванного выбиванием электронов из молекул воздуха).



Фотоэлектронная эмиссия:

$h\nu = E_{\text{вых}} + (1/2)\,mv^2 \quad (а)$,

термоэлектронная эмиссия:

$E_{\text{тепл}} = E_{\text{вых}} + (1/2)\,mv^2 \quad (б)$

Средняя энергия тепловых колебаний связанного атома при комнатной температуре составляет около (1/25) эВ (0,04 эВ). Вольфрамовую нить накала в вакуумной лампе можно нагреть до 3000 К, что в десять раз превосходит комнатную температуру 300 К.

Вопрос 23-1.
Даже при температуре 3000 К средняя кинетическая энергия связанного атома составляет лишь 0,4 эВ. Как же может вольфрам испускать электроны, если энергия их связи равна нескольким электрон-вольтам?

Заряд. Приводимая на с. 332 схема диода показывает, как можно продемонстрировать, что нечто отрицательно заряженное переходит от нити накала к приемной пластине. Однако несмотря на успех предложенной Томсоном корпускулярной модели, все же можно представлять себе, что этот отрицательный заряд перетекает подобно некоторому флюиду, а не в виде отдельных порций. Отдельный электрон даже в случае самого чувствительного детектора в этой цепи не вызвал бы сигнала, превышающего естественные флуктуации прибора. Отдельный заряд впервые был точно измерен Милликеном в 1903 году. В главе 18 мы описали его метод измерения электрического заряда на крошечных капельках масла. Электрический заряд, который может прилипнуть к капельке, квантован (т. е. существует в ви-

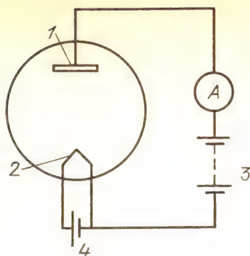
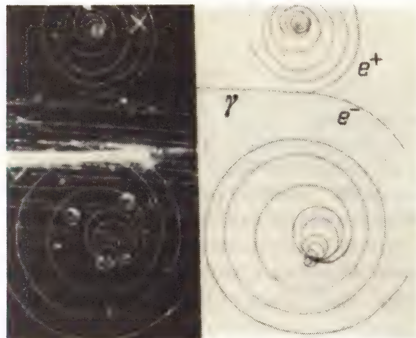


Схема диода: *1* — пластина, *2* — вольфрамовая нить накала, *3* — батарея смещения, *4* — источник для нагрева нити. Ток создается только при раскаленной нити. Поэтому заряды должны выходить из нити. Ток можно уменьшить или совсем прекратить наложением отрицательного задерживающего поля с помощью батареи смещения. Поэтому заряды должны быть отрицательными

де целого числа единичных величин). Опыт Милликена дал количественное значение заряда электрона. Он отрицателен и равен $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Масса. Наиболее очевидным атрибутом электрона является его электрический заряд. Следующий вопрос заключается в том, обладает ли электрон массой. Для измерения массы бейсбольного мяча есть два метода. Первый метод основан на измерении веса мяча, или, другими словами, — силы притяжения между мячом и Землей. Благодаря тому, что вес пропорционален массе ($F = GmM/r^2$), можно сравнить веса (и тем самым массы) бейсбольного мяча и эталона массы с помощью рычажных весов. Второй метод основан на инертных свойствах массы, на ее сопротивлении попыткам изменить состояние ее движения. Когда к телу приложена некоторая сила, оно движется с ускорением: $F \sim a$; коэффициент пропорциональности называется массой: $F = ma$. Массу бейсбольного мяча можно найти, приложив к нему известную силу и измеряя вызываемое ею ускорение.

Первый метод совершенно не пригоден для нахождения массы электрона. До сих пор не было выполнено ни одного опыта, где бы могло наблюдаться действие гравитационного поля на электрон. Эта сила — вес — просто очень мала. Но благодаря тому, что электрон обладает зарядом, к нему можно приложить электромагнитные силы, производящие гораздо большее действие, чем гравитационные. Треки в пузырьковой камере, запечатленные на приводимой фотографии, ясно показывают результат ускорения электрона. Скорость электрона непрерывно изменялась под действием силы, направленной перпендикулярно к траектории. Подобная нормальная, или центростремительная, сила не



изменяет модуль скорости или энергию электрона, но заставляет его двигаться по круговой траектории. На фотографии в пузырьковой камере треки закручиваются в спирали, потому что электроны все время теряют энергию при прохождении через газ. Перпендикулярная сила, вызванная движением электрона в магнитном поле, равна Bev, где B — напряженность магнитного поля, e — заряд электрона и v — его скорость. Она должна создавать центростремительное ускорение, равное v^2/r, где r — радиус круговой траектории. Поскольку $F = ma$, отсюда следует, что

$$eBv = m\frac{v^2}{r}.$$

Разрешая это уравнение относительно массы электрона, имеем

$$m_e = \frac{Ber}{v}.$$

Если известна скорость электрона, отсюда можно определить его массу. Существует много способов сочетать действующие на электроны или другие частицы магнитные и электрические силы таким образом, чтобы можно было измерить скорость и определить массу. Для электрона значение массы оказывается равным $9 \cdot 10^{-31}$ кг.

Вопрос 23-2
Как можно было бы найти скорость электрона, измеряя влияющие на него электрическое и магнитное поля?

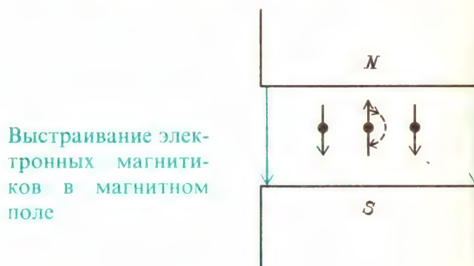
Но существует и совсем другой способ измерения массы электрона, основанный на эффекте, который выглядит совершенно отличным от эффектов инерции, хотя на самом деле его нельзя считать независящим от инертных свойств. Вместо того чтобы заставлять существующий электрон изменять свое движение, создайте новый электрон! Для этого, конечно, требуется энергия, равная mc^2, где c – скорость света и m – масса создаваемого электрона. Фотография, сделанная в пузырьковой камере, показывает подобное событие. Фотон вошел слева и в окрестности отдельного атома превратил всю свою энергию в массу и кинетическую энергию двух электронов*). В магнитном поле эти два электрона кружились в противоположных направлениях; один из них имел отрицательный заряд – это наш стандартный электрон, а другой – так называемый позитрон – имел положительный заряд. Если бы рождался только один электрон, единичный электрический заряд образовался бы из ничего. Такое никогда не происходит; полный заряд остается неизменным. Первоначально никакого заряда не было, и результирующий заряд (+ плюс –) впоследствии тоже равен нулю. Чтобы произошло подобное рождение пары, требуется гамма-излучение с энергией по меньшей мере 1 МэВ. Каждый из электронов использует половину этой величины на создание своей массы покоя. Если сверх этого остается еще какая-то энергия, то она распределяется между электронами и обеспечивает их движение вперед. Таким образом, этим вторым способом измерения массы электрона находим, что его масса составляет 0,51 МэВ. Простые вычисления показывают, конечно, согласованность результатов:

$$mc^2 = (9 \cdot 10^{-31}\ \text{кг})(3 \cdot 10^{8}\ \text{м/с})^2 = 81 \cdot 10^{-15}\ \text{Дж}.$$

Поскольку $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж = 1 эВ,

$$mc^2 = 0{,}51 \cdot 10^{6}\ \text{эВ} \approx (1/2)\ \text{МэВ}.$$

Спин. У электрона есть еще один атрибут, жизненно важный для его взаимодействий. Помимо того что он обладает массой и электрическим зарядом,



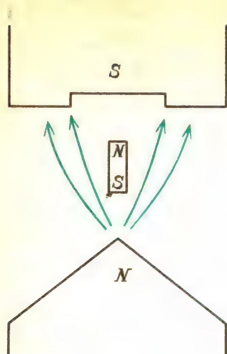
Выстраивание электронных магнитиков в магнитном поле

он ведет себя так, как если бы он вращался вокруг собственной оси. Подобный спин может дать о себе знать посредством трех главных эффектов.

Магнитный момент. Прежде всего, вращающийся электрический заряд становится маленьким магнитом, поэтому в однородном магнитном поле электроны должны были бы выстраиваться подобно стрелкам компасов, показывая в одну сторону. Когда по какой-либо причине некоторые из них выбиваются из этого строя, они оказываются в состояниях с иной энергией, нежели в устойчивом состоянии. Когда они разворачиваются обратно в линию, их энергия должна высвобождаться в какой-либо форме, поскольку первоначально им пришлось сообщить энергию, чтобы выбить их из строя. Более того, в неоднородном магнитном поле электронные магнитики должны не только поворачиваться, но и двигаться в область более сильного поля или из нее. Для обнаружения этих эффектов требуются некоторые уловки.

На рисунке на с. 334 показаны полюсные наконечники магнита, которые обеспечивают получение сильно неоднородного магнитного поля. Как видно, магнит, северный полюс которого обращен вверх, будет двигаться вниз на этом рисунке; направленная вниз сила, действующая на южный конец магнита, больше, чем направленная вверх сила, действующая на его северный конец. Можно ожи-

*) Точнее, в энергию покоя и кинетическую энергию электронов. (*Примеч. пер.*)



На магнитный диполь в неоднородном магнитном поле действует смещающая сила. На нижний конец диполя действует бо́льшая сила, чем на верхний

дать, что при пропускании пучка электронов сквозь такое магнитное поле пучок на выходе будет расширен в вертикальном направлении. Отклонение каждого электрона зависело бы от того, как ориентирован его спин на входе. Мы принимаем, что спин каждого электрона, пока он пролетает сквозь зазор магнита, не будет поворачиваться в линию с полем, а будет прецессировать подобно волчку, все время сохраняя первоначальный угол с вертикалью. Но, к сожалению, этот опыт нельзя осуществить столь просто.

Вопрос 23-3
Почему? Кроме движения электронов в вертикальном направлении под действием неоднородного магнитного поля, что еще происходило бы с движущимися в таком поле электронами?

Вместо использования свободных электронов, обладающих зарядом, действительный эксперимент выполняется с электронами, «оседлавшими» движущийся атом. Отто Штерн и Вальтер Герлах в 1924 году использовали для этого атомы серебра. Атом серебра имеет только один валентный электрон, находящийся в таком состоянии, что единственный момент импульса атома должен быть связан со спином самого электрона. Все остальные электроны на целиком заполненных оболочках создают эффекты, которые взаимно компенсируются. Атом в целом электрически нейтрален, так что магнитное поле на него не подействовало бы, если бы только атом не вел себя также подобно крошечному магнитику. В последнем случае он отклонялся бы вверх или вниз. На рисунке показаны экспериментальная методика и полученные результаты. Некоторые атомы и в самом деле отклонялись вверх, а другие вниз, но

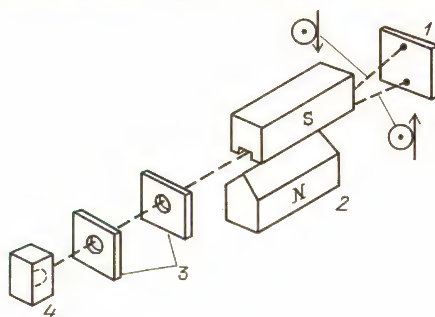


Схема опыта Штерна – Герлаха, в котором нейтральные атомы серебра используются для демонстрации дискретного характера выстраивания магнитных моментов (вся система находится в вакууме): *1* – пластинка-мишень, *2* – неоднородное магнитное поле, *3* – щели, формирующие пучок, *4* – печь для испарения серебра

при этом они разбивались только на две группы! Очевидно, что спины электронов были направлены либо по полю, либо составляли с его направлением угол 180°. Этот эффект *квантуется*. Если всю систему повернуть вокруг оси на 90°, мы бы нашли, что отклонения происходили бы тогда в горизонтальном направлении, но по-прежнему все атомы разделялись бы на две определенные группы, и ничего не попадало бы в промежуток между ними. Таким образом, пространственное отклонение не зависит от способа получения атомного пучка. Атомы серебра испаряются из печи с совершенно хаотическими ориентациями.

Это явление (как и многие другие) вынуждает нас сделать заключение, что спин электрона может существовать только в ориентации, параллельной или антипараллельной тому магнитному полю, с помощью которого мы его обнаруживаем. Невольно возникает искушение считать, что в исходном пучке спины, должно быть, имели любые ориентации и как-то упорядочились в этот своеобразный строй в тот момент, когда они входили в магнитное

поле. Может быть, и так, но, конечно же, все это – лишенная содержания метафизика. Если некоторый эффект никогда нельзя обнаружить прямо или косвенно, то довольно бесполезно размышлять о нем. В любом экспериментальном устройстве, где определяется спин электрона, некоторое стандартное направление или ось оказываются физически выделенными. Детектируемые электроны всегда обнаруживают себя выстроенными либо вдоль этого выделенного направления, либо противоположно ему, но никогда – в промежутке.

Подходящей единицей момента импульса элементарных частиц является постоянная Планка (деленная на 2π). В физической литературе ее записывают в виде символа $\hbar = h/(2\pi)$. Она имеет значение $1 \cdot 10^{-34}$ Дж·с и должную для момента импульса размерность (масса·длина^2/время).

Момент импульса рассматривался в главе 8. Как там указывалось, весьма удивительно то, что в этом мире существует естественная единица момента импульса. Известно лишь очень небольшое число других физических величин, для которых в природе существуют основные единицы. Насколько мы знаем, их не существует для массы, длины или времени. Имеется основная единица электрического заряда, а теперь мы нашли таковую для момента импульса. В этих единицах спин электрона равен 1/2. Как мы увидим, это очень важная величина. Элементарные частицы просто не могут иметь произвольные значения спина, а только вполне определенные. Подобно электрическому заряду, спин квантован и может существовать в виде целого числа $\hbar/2$, но никогда не принимает промежуточных значений, таких как $0{,}65\,\hbar$. Более того, для данной системы измеряемые значения момента импульса, соответствующие различным направлениям спина, всегда должны отличаться на целую единицу, т. е. на $\hbar$. Поэтому валентный электрон атома серебра обнаруживает себя только в двух ориентациях, со спином вдоль задающего направление поля $(+1/2)$ или против $(-1/2)$.

Проявление магнитного момента, связанного со спином электрона, можно также обнаружить в *однородных* магнитных полях. Для этого необходимо использовать атомы или молекулы с неспаренными электронами; цель состоит в том, чтобы иметь дело с электронами, которые сравнительно свободны и все же в достаточной степени связаны, так чтобы в одном месте можно было удерживать большое их число. Электроны проводимости в металле достаточно обильны, но их ни в коей мере нельзя считать независимыми. Электрон проводимости не может ориентироваться в магнитном поле без взаимодействия со всеми остальными электронами. Большинство электронов в веществе спарены с электронами, имеющими противоположный спин и находящимися на тех же энергетических уровнях. Однако в парамагнитных веществах имеются неспаренные электроны, которым не приходится взаимодействовать с соседними атомами для образования молекулярных связей.

Когда какое-либо из этих веществ помещается в магнитное поле, спины электронов будут направлены либо вдоль поля, либо против него. Сначала может показаться, что все они повернутся так, чтобы выстроиться в одном направлении и тем самым находиться в состоянии с наинизшей возможной энергией. Но в действительности к системе электронных спинов подводится энергия из-за хаотического теплового движения молекул. Получается так, как если бы множество стрелок компасов пыталось выстроиться в магнитном поле, но при этом раскачивалось в случайных направлениях.

Энергия, необходимая для переворота спина одного электрона в магнитном поле напряженностью B, имеет вполне определенную величину:

$$2\mu_e B \approx (2 \cdot 10^{-23}\ B)\,\text{Дж} \approx (10^{-4} B)\ \text{эВ} = 10^{-5}\ \text{эВ}$$

для $B = 0{,}1$ Тл $= 1000$ Гс, где μ_e – магнитный момент электрона. (Магнитный момент служит мерой интенсивности магнитного диполя, и лучшее его определение и способ измерения основаны на этом уравнении.) Для переворота спина электрона требуется как

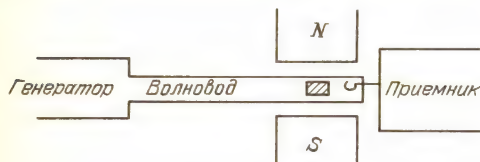
раз такая порция электромагнитной энергии, и когда спин электрона переворачивается обратно, испускается, конечно, фотон такой же энергии. Энергия фотона непосредственно связана с частотой. Так,

$$E_\gamma = h\nu,$$

где h – постоянная Планка и ν – частота в циклах за секунду. В данном примере в магнитном поле 0,1 Тл потребовались бы фотоны, соответствующие радиосигналам с частотой около 3000 МГц.

Вопрос 23-4
Чему равна длина волны сигнала с частотой 3000 МГц?

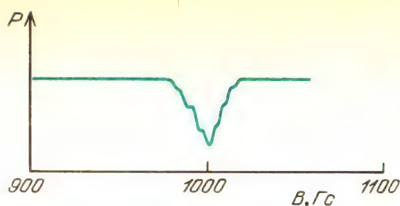
В обычных условиях такой сигнал образцом вещества не испускается. Чтобы поддержать определенное равновесие, соответствующее данной температуре, сколько электронов переворачиваются в одну сторону, столько же и в другую. Если, однако, образец окружить катушкой, питаемой от радиопередатчика, как показано на рисунке, и постепенно повышать частоту, оказывается, что в определенном узком диапазоне



частот катушка будет поглощать дополнительную энергию от передатчика. Эта энергия вызывает перевороты спинов многих электронов из направления, совпадающего с магнитным полем. Сколько времени потребуется для того, чтобы они перевернулись обратно, зависит от температуры и от того, насколько легко в данном веществе тепловое возбуждение передается этим электронам.

На следующем рисунке показан типичный график, полученный в такого рода эксперименте. В данном случае частота оставалась постоянной, а изменялось магнитное поле.

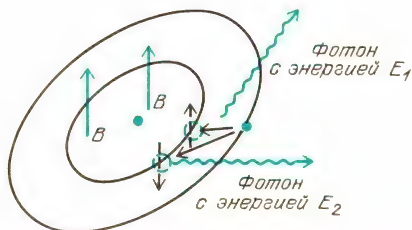
Различие в энергии состояний электрона с двумя ориентациями спина (параллельно или антипараллельно маг-



Поглощение энергии микроволн, обусловленное электронным магнитным резонансом. Зубчатые побочные пики на склонах главного провала соответствуют поглощению при различных локальных магнитных полях в веществе

нитному полю) приводит к спектроскопическим эффектам, которые впервые наблюдались более ста лет назад. Однако их интерпретации, данной Сэмюэлем Гаудсмитом и Джорджем Уленбеком, пришлось ждать вплоть до 1924 года. Внутри атомов естественным образом могут существовать сильные магнитные поля порядка 10 Тл. Движение электронов (в более старой картине – обращение электронов по орбитам) создает поля, которые взаимодействуют с магнитными проявлениями собственного вращения (спина) каждого электрона. Поскольку свет испускается при перескоке внешнего электрона на вакантное место, образовавшееся на мгновение на одной из допустимых орбит, энергия светового импульса будет равна разности уровней энергии, между которыми происходит перескок электрона.

В действительности каждый энергетический уровень имеет два возможных значения, соответствующих двум ориентациям, которые спин может принимать по отношению к локальным полям. Как видно из рисунка, это приведет к тонкой

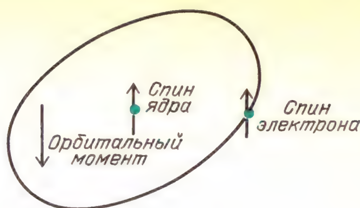


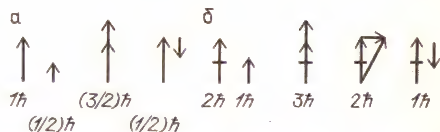
Расщепление спектральных линий, обусловленное спином электрона; энергия $E_1 > E_2$, поскольку во втором случае электрон еще сохраняет при себе часть энергии, оставаясь ориентированным против магнитного поля

структуре большинства переходов. Вместо того чтобы создавать фотоны света одной определенной энергии и тем самым определенной длины волны, каждый переход создает в спектре дублет или триплет длин волн.

Сохранение момента импульса – еще одно проявление спина электрона. Спин электрона нужно также принимать во внимание в спектроскопии и при изучении распадов частиц с испусканием электронов просто потому, что спин – это момент импульса, а момент импульса представляет собой одну из немногих величин в этом мире, которые должны строго сохраняться. Когда атомная система испускает фотон видимого света, фотон уносит с собой одну целую единицу момента импульса. (Тот факт, что фотоны обладают моментом импульса, был продемонстрирован на опыте.) Тогда остающийся у системы момент импульса должен на единицу отличаться от первоначального значения. Если фотон уносит момент импульса, соответствующий вращению по часовой стрелке, остающаяся система должна испытать отдачу против часовой стрелки. В системе различные ее части создают момент импульса – часть его связана с определенными электронными конфигурациями (как если бы электроны действительно обращались по орбитам вокруг ядра). Конечно, нужно также принимать в расчет спин, или собственный момент импульса, каждого из электронов. Ядра тоже обладают спином. Все эти величины должны складываться вместе, но это сложение – векторное; таким образом, многие из них взаимно уничтожаются. Понять структуру спектральных линий можно лишь тогда, когда спины включены в описание полного момента импульса.

При распадах частиц полный момент импульса тоже должен сохраняться. Когда радиоактивное ядро распадается с испусканием электрона, то есть β-излучения, имеет место кажущееся нарушение этого закона. Исходное ядро испытывает отдачу, но это может происходить только без изменения его собственного спина. И все же отрывающийся электрон улетает, как бы вращаясь

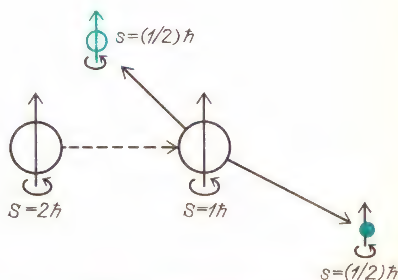




Векторное сложение моментов импульса: *а* – единственный электрон на *p*-орбите с моментом импульса 1 ℏ; *б* – два электрона: один на *s*-орбите с нулевым моментом импульса, другой – на *d*-орбите с моментом импульса 2 ℏ. Полный спин электронов равен 1 ℏ.

вокруг собственной оси. Это столь же удивительно, как если бы человек, находящийся на столике, который может вращаться без трения, оказался в состоянии раскрутить вокруг оси велосипедное колесо, не испытывая при этом вращательной отдачи в противоположную сторону. Такая же проблема возникает при распаде мюона (одной из основных составляющих космических лучей, достигающих уровня моря). Образуется единственный вращающийся вокруг собственной оси электрон.

Существует выход из этого кажущегося нарушения закона сохранения момента импульса. Во всех таких случаях испускается также по меньшей мере еще одна другая частица – нейтрино (ν). Нейтрино не имеет электрического заря-



Ядро со спином 2 ℏ распадается на ядро со спином 1 ℏ плюс электрон и нейтрино со спином (1/2) ℏ у каждого из них

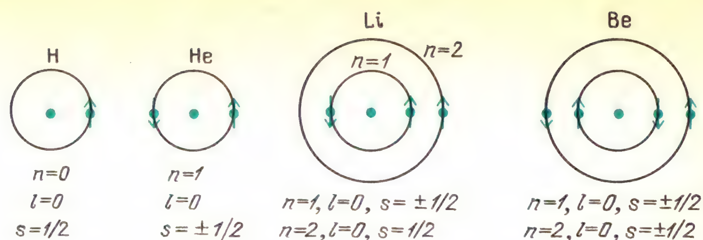
да, и поэтому его нелегко обнаружить, но у него есть спин. Человек на вращающемся столике не столкнулся бы с затруднениями, раскручивая вокруг осей два велосипедных колеса, если одно из них приводится во вращение по часовой стрелке, а другое – против часовой стрелки. Нейтрино и связанные с ним проблемы мы рассмотрим немного позже, когда определим все субатомные частицы.

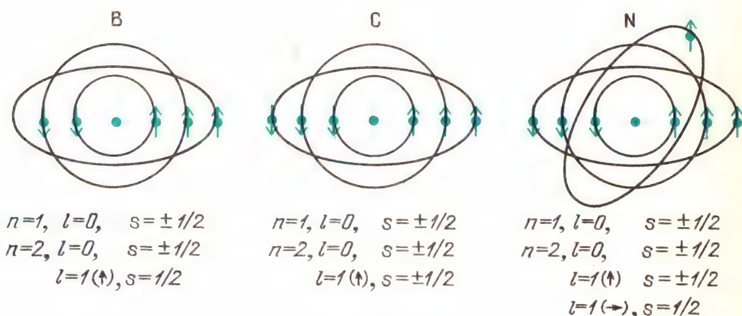
Принцип запрета – третья роль спина. Электрон обладает собственным моментом импульса и поэтому ведет себя подобно магниту, но его спин $(1/2)\,\hbar$ приводит даже к более глубокому эффекту. Все частицы с полуцелым спином (1/2, 3/2, 5/2, ...), в том числе протоны и нейтроны, наряду с электронами должны подчиняться особому закону запрета. Впервые этот принцип сформулировал великий физик Вольфганг Паули в 1925 году. Два других великих имени в мире физики – Энрико Ферми и Поль Дирак – обычно связывают со специфическими законами, вытекающими из принципа Паули. В научной литературе частицы со спином $(1/2)\,\hbar$, $(3/2)\,\hbar$ и т. д. называют *фермионами.* Никакие два фермиона не могут обладать идентичными свойствами, если они находятся в одной и той же пространственной области. Именно это ограничение типа насыщения несет ответственность за определенное расположение электронов в атомах и тем самым объясняет природу Периодической системы элементов.

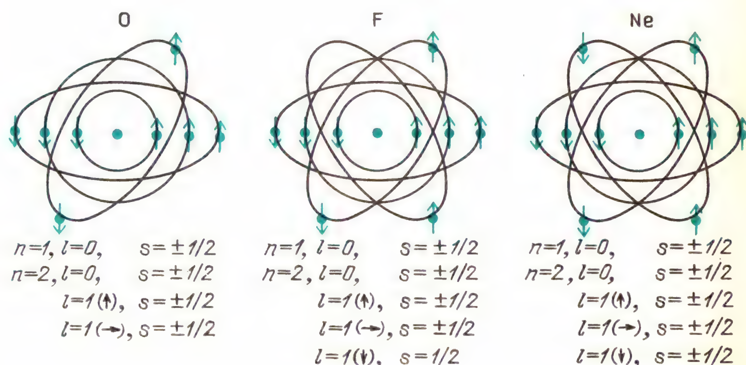
Атом водорода имеет один электрон, который располагается в области вблизи ядра, образованного протоном. У гелия два электрона в одной и той же области обладают одинаковыми свойствами, за исключением того, что спины этих электронов направлены в противоположные стороны. У атома лития три электрона, но только два из них могут находиться в области с наинизшей разрешенной энергией. Третий электрон в этой области мог бы иметь спин ориентированным только одним из двух способов, и в любом случае это привело бы к дублированию всех свойств уже находящегося там электрона. Если бы существовали электроны двух сортов, например красные и синие, или если бы электрон характеризовался каким-либо другим переменным свойством, например кривобокостью, то можно было бы поместить в одну и ту же область энергий более двух электронов. Но можно поместить только два. Таким образом, электрон должен иметь ограниченное число атрибутов, и со спином мы исчерпали весь список. Третий электрон лития должен находиться на более высоком уровне энергии, располагаясь дальше от ядра. Четвертый электрон бериллия может, имея противоположный спин, располагаться вместе с третьим. Пятый электрон у бора находится почти на таком же втором энергетическом уровне, но не совсем, потому что на нем он обладает моментом импульса в одну единицу (помимо собственного спина). Существование этой дополнительной единицы момента импульса слегка изменяет энергию пятого электрона и делает его отличимым от электрона с номером четыре. Существуют три допустимых направления момента импульса с модулем $1\,\hbar$. В любой экспериментальной ситуации, которая устанавливает предпочтительное направление (например, магнитное поле), ось системы, обладающей одной единицей момента импульса, может показывать вдоль поля, против него или перпендикулярно к нему.

Вопрос 23-5
Почему система с моментом импульса $1\,\hbar$ может принимать три различных ориентации по отношению к магнитному полю? Ведь для спина $(1/2)\,\hbar$ есть только две возможности.

Второй главный уровень системы атомных электронов может таким образом содержать четыре возможные конфигурации: одну с нулевым орбитальным моментом импульса и три – с различными ориентациями единичного орбитального момента импульса. В каждой из них могут находиться по два электрона, один со спином «вверх», другой – «вниз». В общей сложности восемь электронов могут разместиться на втором уровне. Даже в отсутствие внешнего поля внутренние магнитные поля в атоме приводят к тому, что







Принцип запрета Паули определяет периодический характер распределения электронов в атомах. На этих рисунках *n* обозначает главный уровень энергии электрона. Орбитальный момент обозначается через *l*. Его ориентация (вверх, вниз или в сторону по отношению к магнитному полю) квантуется. Спин электрона (1/2) *h* может иметь только две ориентации

каждый из этих восьми электронов имеет слегка отличную энергию. Эти различия выражаются в спектрах фотонами со слегка различными длинами волн, что приводит к «тонкой структуре» или «расщеплению» спектральных линий.

РАЗМЕР ЭЛЕКТРОНА – ПРОБЛЕМА ВОЛНА – ЧАСТИЦА

До сих пор мы приписали лишь три атрибута нашему знакомому – электрону: массу, заряд и спин. Если бы мы описывали стеклянный шарик, то уже задались бы вопросом о том, как он «выглядит»: какой у него цвет, размер, и т. д. (На самом деле, мы и описывали, как «выглядит» электрон, т. е. описывали экспериментальную реакцию на зонды, с помощью которых можно обнаруживать электроны.) Электрон, конечно, не имеет цвета просто потому, что самая короткая длина волны видимого света ($4 \cdot 10^{-7}$ м для синего света) определенно превосходит размер электрона. Нельзя определить строение объекта с помощью зонда, который больше самого объекта. Существует особая проблема, связанная с определением размеров частиц. В некоторых случаях эта проблема столь же проста, как и та, с которой мы столкнулись бы при измерении «размера» маленького стержневого магнита. Используя линейку, свет и наше зрение, мы бы получили один результат. Используя магнитный щуп, мы бы, очевидно, получили более крупный объект с весьма размытыми краями. Если частица чувствительна

к действию нескольких сил, возможно, что ее границы окажутся разными для каждой из них.

Но существует еще и более тонкая, чем эта, проблема размеров. При определенных условиях поведение электронов должно описываться в терминах поведения волн. Их длина волны связана с импульсом следующей формулой: $\lambda = h/p$. Здесь λ – длина волны в метрах; h – вездесущая постоянная Планка; а p – стандартный символ, используемый в литературе для обозначения импульса. При малых скоростях $p = mv$ (масса покоя · скорость) в соответствии с обычным определением. При скоростях, близких к скорости света, импульс является более сложной функцией, как мы видели в главе 11:

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Таким образом, в эксперименте импульс играет более важную роль, нежели масса или скорость по отдельности.

Посмотрим теперь, как изменяется размер электрона. Он, разумеется, не меньше одной длины волны, и можно предположить, что его влияние простирается на несколько длин волн. Для электрона, ускоренного напряжением 10 В, например в радиолампе, $v \approx 1{,}6 \cdot 10^6$ м/с. Тогда

$$\lambda \approx \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34}\ \text{Дж} \cdot \text{с}}{9 \cdot 10^{-31}\ \text{кг} \cdot 1{,}6 \cdot 10^6\ \text{м/с}} \approx$$
$$\approx 5 \cdot 10^{-10}\ \text{м}.$$

(Кинетическая энергия внешних электронов в атомах лежит в диапазоне от 1 до 10 эВ. Поэтому длины их волн имеют примерно такие размеры, как показывает это уравнение.) Поскольку эта длина волны превосходит размер атома, следует подчеркнуть, что в действительности нельзя рассматривать электрон движущимся по орбите вокруг ядра. В этом смысле электрон столь же велик, как и сам атом, и на самом деле ни в каком другом смысле об этом говорить нельзя. В любом эксперименте, который в принципе можно осуществить, будет обнаружено, что атомные электроны занимают области, сравнимые в размерах со всем атомом. Бессмысленно спрашивать, насколько велики эти электроны или где они находятся в то время, пока мы не производим над ними измерений.

Существуют, конечно, надежные экспериментальные свидетельства в пользу волнового *поведения* электронов. На данном этапе рассуждений мы сознательно избегаем использования выражения «волновая природа». Подобное волновое поведение света наиболее ясно можно видеть в интерференционных или дифракционных картинах. На фотографии показан дифракционный узор,

Интерференционная картина, создаваемая электронным пучком при прохождении через тонкую фольгу

образованный пучком электронов, проходящих через отверстия, образуемые промежутками между атомами в кристалле. Он очень похож на узор, образуемый светом при прохождении через маленькое отверстие. Расстояние между кольцами в обоих случаях зависит от отношения длины волны к диаметру отверстия. В красном свете кольца отстоят дальше друг от друга, чем в синем. В случае медленных электронов эти расстояния больше, чем в случае быстрых. Анализ оптического явления производится в терминах волн, исходящих из разных участков отверстия, проходящих разные расстояния до экрана и там интерферирующих, иногда уничтожая, а иногда усиливая друг друга. Форма колец обусловлена исключительно тем, что в случае круглого отверстия должна быть круговая симметрия. Поскольку с электронами наблюдается

в точности такое явление, мы пользуемся тем же языком и той же математикой волнового движения для описания этой ситуации.

Нам нет нужды беспокоиться о том, действительно ли электрон *представляет собой* волну. Электрон есть электрон. В ситуациях, где электрон взаимодействует с объектами, большими по сравнению с длиной волны, даваемой соотношением $\lambda = h/p$, он ведет себя подобно твердому вращающемуся шарику. Когда его взаимодействие происходит с объектами, размеры которых сравнимы с λ или еще меньше, эффект приходится описывать в терминах взаимодействия с волнами. Подобная ситуация имеет место и со звуком. Поведение высокочастотного звука в комнате во многом напоминает «лучи», упруго отражающиеся от стен. Однако низкочастотные звуки подобно волнам огибают углы.

При математическом описании процессов такое двойственное положение дел встречается очень часто. Бывает, что у нас есть определенная формула или уравнение, которое очень сложно и его трудно решить, но которое точно выполняется во всех случаях. Именно так обстоит дело при описании фотонов и любых электромагнитных взаимодействий. Обычный прием получения решений для частных случаев заключается в использовании некоторых приближений. Точное решение большинства физических задач недостижимо, и немалая доля искусства исследователя или математика лежит в выборе правильного приближения и умения определять, с какой точностью следует получать решение.

Рассмотрим для примера уравнение, описывающее падение шарика в воздухе:

$$ma = mg - Kv^2.$$

Произведение массы на ускорение шарика равно действующей на него силе тяжести минус сила сопротивления воздуха. (Предполагаем, что шарик достаточно велик и падает достаточно быстро, чтобы сопротивление воздуха было пропорционально квадрату его скорости.) Кривая, определяющая решение этого уравнения, была приведена в главе 1. Точное решение этого уравнения получить непросто, и для этого требуется использовать интегральное исчисление. Однако в двух предельных случаях можно сделать приближения, которые дают простые решения. Во-первых, в начальной стадии падения шарика, пока его скорость мала, получаем простое уравнение для свободного падения в вакууме: $a = g$, и $x = (1/2)\,at^2$. Во втором предельном случае трение очень велико: $mg = Kv^2$ и $x = vt$.

Нет нужды говорить, что мы не пришли к какому-либо парадоксу, связанному с природой падающих шариков, происходящему лишь из-за того, что одно и то же уравнение дает два различных решения. По той же причине не существует парадокса двойственности, связанного с природой субатомных частиц. При определенных условиях эксперимента наилучшее приближение в уравнениях, описывающих такие частицы, делает эти уравнения похожими на волновые уравнения. В других экспериментальных ситуациях подходящее приближение приводит к уравнению, которое подобно уравнению, описывающему действие, производимое твердыми шариками. Мы не утверждаем, что субатомная частица *является* волной или *является* твердым шариком; просто она ведет себя в определенных условиях тем или другим способом. Не следует также представлять себе, что субатомная частица (или фотон) движется, совершая извивающиеся, волнообразные движения. Это только решение соответствующего уравнения имеет волновой характер. Такое решение представляет собой функцию вероятности, которая показывает, каковы шансы найти определенные значения положения или скорости данной частицы в определенный момент времени.

Вопрос 23-6
Уравнение для положения падающего шарика дает точное значение положения шарика как функцию времени: $x(t)$. Разве квантовая теория не дает такой же информации о субатомных частицах?

ПРИНЦИП НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Существует еще один жизненно важный факт, связанный с измерениями, производимыми над частицами. Невозможно измерить – и тем самым узнать – определенные пары связанных между собой характеристик частицы так, чтобы они одновременно имели точные значения. И дело тут вовсе не в неимении достаточно чувствительных приборов нужного вида. Существует принципиальный, как, впрочем, и практический предел точности, с которой можно измерить положение частицы в тот момент, когда производим измерение ее импульса. Конечно, выполнение любого измерения положения некоторого тела сопряжено с определенными ошибками. Например, если вы на глаз определяете положение метки, сделанной мелом на полу комнаты, вы можете угадать расстояние от стены до нее с погрешностью в пределах (1/2) фута: $x = 3$ фут; $\Delta x = \pm 1/2$ фут, где Δx описывает не какую-то допущенную ошибку, а просто принятые вами пределы точности. Используя линейку, можно достичь гораздо большей точности: $x = 1$ м; $\Delta x = \pm 2$ мм. Если бы возникла необходимость достижения еще более высокой точности, это можно было бы сделать. Расстояние между двумя штриховыми метками на стержневом эталоне метра, хранящемся в Париже, было измерено Майкельсоном в терминах числа длин волн определенной спектральной линии видимого света. Достигнутая им с помощью такой техники точность превосходила одну миллионную долю: $x = 2 \cdot 10^6 \lambda$; $\Delta x = \pm 1\lambda$.

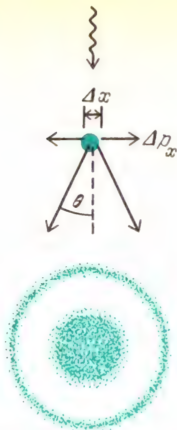
Даже если практические соображения могут исключать продолжение таких усилий, казалось бы, не должно существовать принципиального предела для достижения большей точности. Измерительный зонд должен быть, конечно, меньше, чем требуемое значение Δx. Чтобы превзойти Майкельсона, потребовалось бы использовать свет (или частицы!) с длиной волны, меньшей чем у видимого света. Синий свет с $\lambda = 4 \cdot 10^{-7}$ м был бы немножко лучше, чем красный с $\lambda = 7 \cdot 10^{-7}$ м. В некоторых микроскопах используют преимущества этого эффекта цвета, переходя к синему свету для увеличения разрешения. Разработаны и ультрафиолетовые микроскопы, но наиболее широкое применение получили электронные микроскопы. Длина волны электронов в таких приборах составляет $2 \cdot 10^{-9}$ м, что в 100 раз лучше того, что можно получить с видимым светом.

На самом деле разрешение даже лучших электронных микроскопов не столь велико по практическим причинам, связанным с их конструкцией. Чтобы получить еще более высокое разрешение, нужны частицы или свет с еще меньшей длиной волны. Но для получения частиц с меньшей длиной волны мы должны увеличивать их импульс: $\lambda = h/p$. С той же проблемой мы сталкиваемся и при использовании света. Энергия каждого фотона равна $E = h\nu = hc/\lambda$, где E – энергия в джоулях, h – постоянная Планка, ν – частота света в циклах в секунду и λ – длина волны в метрах. При последовательном переходе от радиоволн к микроволнам, инфракрасному свету, видимому свету, ультрафиолетовому излучению, рентгеновскому излучению и, наконец, гамма-излучению мы имеем дело с фотонами все большей и большей энергии, поведение которых все в большей степени связываем обычно с поведением частиц. Свет, конечно же, переносит импульс. (Хвосты комет «сдуваются» в противоположную от Солнца сторону фотонами и другими частицами, испускаемыми Солнцем.) Этот импульс равен

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

Но это в точности совпадает с соотношением, справедливым для частиц любого другого вида!

Когда пробная частица получает более высокий импульс по мере уменьшения ее длины волны, мы все еще можем измерить положение крошечного тела с любой желаемой точностью, но при этом пробная частица сталкивает его со своего места, как показано на рисунке. Измеряя положение тела, мы сообщаем ему импульс неизвестной величины.



Принцип неопределенностей Гейзенберга: дифракционная картина, создаваемая пучком света с длиной волны λ, имеет угол раскрытия $\theta \approx \lambda/\Delta x$. Неопределенный импульс в x-направлении, сообщаемый объекту зондирующим излучением, отклоняющимся на угол θ, равен

$$\Delta p_x = p_{\text{зонд}} \sin\theta \approx p\theta = (h/\lambda)(\lambda/\Delta x) = h/\Delta x.$$

Тогда $\Delta p_x \Delta x \approx h$.

Неизвестный импульс *перпендикулярен* к первоначальному направлению пробной волны. Вместо того чтобы отбросить резкую тень тела, которая определила бы его положение точно, пробная волна неизбежно образует некоторую дифракционную картину. Каждый отдельный фотон (или другая пробная частица) может попасть в любое место в пределах дифракционной картины совершенно непредсказуемым образом. Угол раскрытия для максимума дифракционной картины равен $\theta \simeq \lambda/\Delta x$. Длина волны пробного излучения равна λ, а неопределенность размера объекта (либо размытие его краев, либо, что более обычно, весь его диаметр) равна Δx. Конечно, пробная частица может также отклониться на угол, вдвое или втрое больший этого, и попасть в одно из внешних колец дифракционной картины. Однако большинство из них попадает в центральный максимум. Малая длина волны зондирующего излучения приводит к образованию дифракционной картины малых размеров. Но вследствие малой длины волны пробные частицы несут бóльший импульс. Такая компенсация за меньший угол отклонения приводит к тому, что получаемый объектом боковой импульс не зависит от длины волны.

Эта дилемма подытожена в соотношении неопределенностей Гейзенберга. Более тщательный анализ неопределенностей приводит для этого произведения к немного более низкому пределу по сравнению с выведенным на рисунке:

$$\Delta p_x \Delta x \geqslant \frac{h}{2\pi} = \hbar = 1 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}.$$

В словесном выражении, произведение неопределенности положения и неопределенности импульса всегда должно быть равно или должно превышать постоянную Планка, деленную на 2π. Этот закон в действительности вытекает из нашей формулы для импульса частицы: $p = h/\lambda$. При скользящем столкновении пробной частицы с объектом заметная доля ее импульса p может быть передана объекту в направлении, перпендикулярном к первоначальному направлению движения пробной частицы. Эта доля $\Delta p \sim p$ служит мерой неопределенности импульса тела после измерения. Неопределенность положения не может быть меньше, чем длина волны λ, используемая при измерении. Поскольку для зондирующей частицы $p = h/\lambda$, для объекта после измерения будет $\Delta p_x \sim \sim h/\Delta x$. Если бы момент импульса не был квантованным, т. е. если бы постоянная Планка была равна нулю, то и положение объекта, и его импульс можно было бы одновременно измерить с бесконечно высокой точностью. В таком случае наш мир был бы совсем иным.

Принцип Гейзенберга справедлив также и для других пар физических величин, которые по классическим представлениям могут быть в принципе известны одновременно с бесконечной точностью. Возьмем вместо линейного положения x угловое положение θ. Тогда $\Delta\theta \Delta L \geqslant \hbar$, где $\Delta\theta$ — неопределенность *угла поворота* системы и ΔL — неопределенность ее *момента импульса.*

В физике элементарных частиц важна еще одна пара переменных: $\Delta E \Delta t \geqslant \geqslant \hbar$, где ΔE — неопределенность энергии системы *в момент ее измерения* и Δt — неопределенность длительности процесса измерения. Может возникнуть соблазн сказать, что ΔE представляет собой неопределенность, с которой мы *знаем* энергию E, подразумевая при этом, что на самом деле система имеет определенную энергию. Такие мысли могут только ввести в заблуждение. Повторим еще раз, что, если какую-то ве-

личину в принципе нельзя измерить, вопрос о том, существует ли она на самом деле, становится бессмысленным.

Как можно измерить энергию возбужденного состояния системы? Наиболее общий метод состоит в том, чтобы дать системе вернуться в нормальное состояние и посмотреть, сколько при этом выделяется энергии. В результате столкновения атом, возможно, окажется в возбужденном состоянии, когда один из его электронов находится в неустойчивом положении. Однако неопределенность энергии этой системы не доставляет никаких проблем вплоть до момента, когда мы получаем информацию. Когда атом возвращается в нормальное состояние, т. е. когда электрон соскакивает вниз на свое место, происходит испускание фотона. Фотон несет энергию $E = h\nu$, и при этом подразумевается, что он имеет определенную длину волны $\lambda = c/\nu$. Однако для обычного атомного перехода испускание фотона происходит в течение времени около 10^{-8} с. Сначала никакого фотона нет, а спустя это время прекращается излучение из атома электромагнитных колебаний.

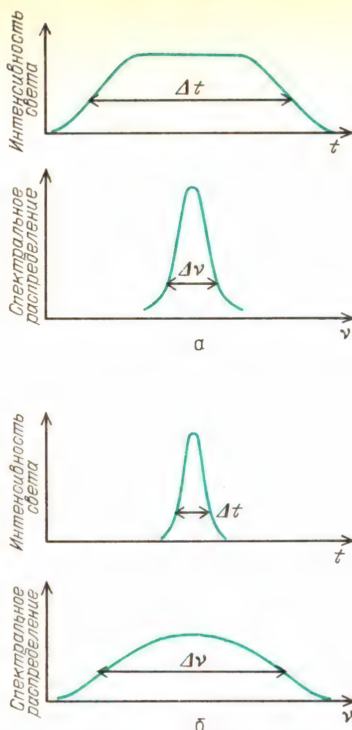
На рисунке в верху следующей колонки показано, как эта ситуация может быть записана измерительным прибором. Но отрезок синусоидальной волны имеет определенную частоту (т. е. является чистым тоном) лишь в том случае, если его испускание происходит все время и будет продолжаться неопределенно долго. Короткий отрезок колебаний должен иметь связанные с ним обертоны. Это более высокие частоты, которые, смешиваясь с основной нотой, формируют начало и конец импульса. Чем короче его продолжительность, тем важнее обертоны. Вместо единственной длины волны возникает узкая полоса длин волн. Даже узкая спектральная линия имеет конечную ширину.

В случае видимого света, когда $\Delta t \approx 10^{-8}$ с, имеем

$$\Delta E\,\Delta t \geqslant \hbar \approx 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с},$$

$$\Delta E \approx 10^{-26} \text{ Дж} \approx 10^{-7} \text{ эВ}.$$

Эта неопределенность на самом деле кажется небольшой. Поскольку энергия фотона видимого света составляет около 2 эВ, оказывается, что энергия



Соотношение между длительностью светового импульса и шириной занимаемой им полосы частот. Зависимость интенсивности света от времени и распределение энергии по частотам для длинного (*а*) и короткого (*б*) световых импульсов

определена с погрешностью до одной десятимиллионной. Но в спектроскопии может быть достигнута такая точность, что эта неопределенность наблюдается как естественная ширина линии. Неопределенность частоты равна $\Delta\nu \approx \approx 10^{8}$ Гц, и неустранимая ширина спектральной линии равна $\Delta\lambda \approx 10^{-13}$ м, что составляет около 0,3 миллионной части протяженности всего спектра от красного до синего света.

В некоторых случаях мы имеем дело с частицами или возбужденными состояниями, время жизни которых очень мало, вплоть до 10^{-22} с. В таком случае

$$\Delta E \approx 10^{-12} \text{ Дж} \approx 10 \text{ МэВ}.$$

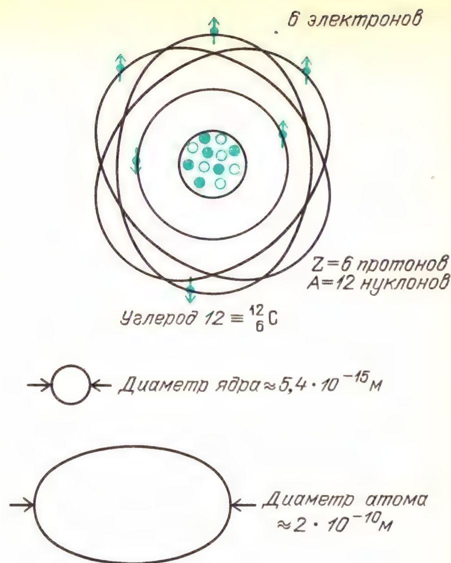
Неопределенности такого порядка могут играть доминирующую роль в некоторых реакциях с участием элементарных частиц.

СТРОЕНИЕ АТОМА

Рассмотренная нами предварительная модель атома в основе своей совпадала с разработанной Нильсом Бором (1885–1962) и Эрнестом Резерфордом (1871–1937) в течение второго десятилетия нашего века. Центральное ядро, в котором сосредоточена почти вся масса атома, обладает положительным электрическим зарядом. Величина заряда лежит в диапазоне от единицы у водорода до 92 у урана. Каждый атом содержит соответствующее число отрицательно заряженных электронов, что делает атом электрически нейтральным. Каждый химический элемент определяется числом электронов своего атома – так называемым «атомным номером» или «Z», как показано в Периодической таблице элементов, приведенной на внутренней стороне обложки. Отметьте, что у водорода атомный номер равен 1, у углерода 6, у кислорода 8, у меди 29, у золота 79 и у свинца 82. Эти номера целые, поскольку электрический заряд квантован.

Ядра атомов состоят из протонов и нейтронов. Масса нейтрона близка к массе протона и примерно в 1800 раз превосходит массу электрона. Каждый протон обладает единицей положительного заряда; нейтроны нейтральны. Протоны и нейтроны не являются точечными элементарными частицами. Наряду с другими чертами внутреннего строения, они содержат циркулирующие электрические токи, которые создают магнитные моменты. Атомный номер элемента равен также числу протонов в каждом его ядре. В первом приближении каждое ядро содержит примерно столько же нейтронов, сколько и протонов. В следующем разделе мы увидим, как фактическое соотношение нейтронов и протонов влияет на устойчивость ядра.

Радиус ядра довольно точно дается формулой: $r = r_0 A^{1/3}$, где $r_0 = 1{,}3 \cdot 10^{-15}$ м, а A равно полному числу протонов и нейтронов в ядре. Как раз такого соотношения следовало бы ожидать, если бы ядро состояло из крошечных шариков радиусом r_0 каждый, плотно упакованных вместе.



Вопрос 23-7

Почему следует ожидать такого соотношения, если протоны и нейтроны плотно упакованы подобно шарикам?

Для ядра урана эта формула дает $r = 1{,}3 \cdot 10^{-15}$ м $\cdot (238)^{1/3} = 8 \cdot 10^{-15}$ м. Радиус самого атома составляет около $1 \cdot 10^{-10}$ м, что примерно в 10 000 раз больше. Хотя на долю электронов приходится всего около 1/4000 массы атома, они, очевидно, занимают большую часть его объема.

Согласно планетарной модели атома Бора – Резерфорда, электроны обращаются по орбитам вокруг ядра. Электростатическое притяжение обеспечивает центростремительную силу. У простейшего из атомов – водорода – единственный электрон движется по орбите вокруг единственного протона; уравнение этого движения имеет вид

$$\frac{mv^2}{r} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

Значения переменных v и r остаются здесь неопределенными. На этом этапе может показаться, что электрон мог бы иметь орбиту любого радиуса и тем самым иметь соответствующую ей скорость. Однако Бор предположил, что момент импульса электрона должен

быть квантован. Для электрона на круговой орбите

$$mvr = n\hbar, \text{ где } n - \text{целое число.}$$

Объединим это требование к моменту импульса с уравнением движения. Итак, уравнение движения:

$$\frac{mv^2}{r} = k\frac{q_1q_2}{r^2} \to m^2v^2r^2 = mkq_1q_2r,$$

условие квантования момента импульса:

$$mvr = n\hbar \to m^2v^2r^2 = n^2\hbar^2,$$

$$r = \frac{n^2\hbar^2}{mkq_1q_2}.$$

Теперь мы получили формулу только для одной переменной r. Оказывается, что разрешены только определенные радиусы, и их значения возрастают как квадраты целых чисел: 1, 4, 9, 16 и т. д.

Вопрос 23-8

Чему равен размер атома водорода в невозбужденном состоянии, когда $n = 1$? Поскольку рассматриваемая модель весьма груба, используйте числовые значения с точностью только по порядку величины: $q_1 = q_2 = 10^{-19}$ Кл, $\hbar = h/2\pi = 10^{-34}$ Дж·с, $k = 10^{10}$ Н·м²/Кл², $m = 10^{-30}$ кг.

Как вы можете подсчитать, эта теория дает то самое приближенное значение для размера атома водорода, которое мы использовали на протяжении всей книги. Еще более важным свидетельством полезности этой теории является ее предсказание, касающееся энергии системы.

Поскольку электрон и протон связаны друг с другом, их электростатическая потенциальная энергия должна быть отрицательна:

$$E_{пот} = -k\frac{q_1q_2}{r}.$$

Электрон обладает положительной кинетической энергией, которая равна

$$E_{кин} = \frac{1}{2}mv^2.$$

Поскольку требование обеспечения необходимой центростремительной силы имеет вид

$$\frac{mv^2}{r} = k\frac{q_1q_2}{r^2},$$

эта кинетическая энергия должна быть равна

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k\frac{q_1q_2}{r}.$$

Полная энергия системы равна

$$E_{полн} = E_{кин} + E_{пот} = \frac{1}{2}k\frac{q_1q_2}{r} - k\frac{q_1q_2}{r} = -\frac{1}{2}k\frac{q_1q_2}{r}.$$

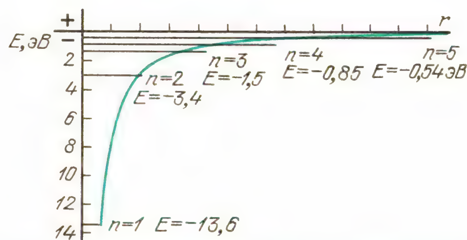
Отметьте, что полная энергия с необходимостью должна быть отрицательна, так как электрон находится в связанном состоянии. Поскольку разрешены лишь определенные радиусы орбит, могут существовать только определенные значения энергии. Итак,

$$E_{полн} = -\frac{1}{2}k\frac{q_1q_2}{r} = -\frac{1}{2}k^2\frac{mq_1^2q_2^2}{n^2\hbar^2}.$$

Вопрос 23-9

Используя приведенные в вопросе 23-8 числовые значения с точностью по порядку величины, рассчитайте энергию связи для самой низкой орбиты в атоме водорода (при $n = 1$).

Фактические значения энергии для орбит разных радиусов показаны на диаграмме уровней энергии.



Квантованные уровни энергии для боровских орбит в атоме водорода

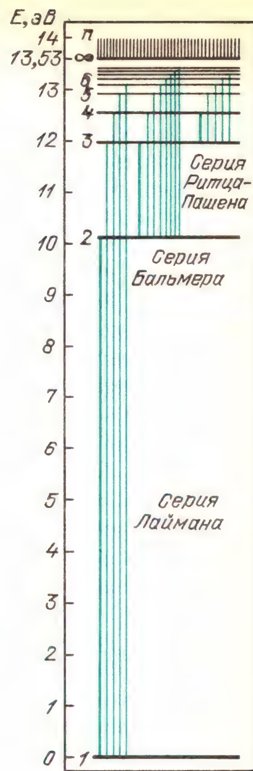
Рассмотрим, к каким проверяемым на опыте следствиям приводит такая теория. Потребовалось бы по меньшей мере 13,6 эВ, чтобы «ионизировать» атом водорода, т. е. оторвать электрон от протона. И в самом деле, измерения дают как раз такое значение энергии

ионизации. Когда атом водорода бомбардируется другими атомами в нагретом газе или фотонами, или пролетающими мимо субатомными частицами, он может принять меньшую, чем 13,6 эВ, энергию только в том случае, если она в точности такова, чтобы поднять атом на один из квантованных энергетических уровней. Атом водорода не может существовать с энергией в промежутке между этими уровнями. Более того, после того, как атом возбужден на высокий энергетический уровень, он может потерять порцию энергии, только в точности равную изменению энергии при переходе на один из более низких квантованных уровней.

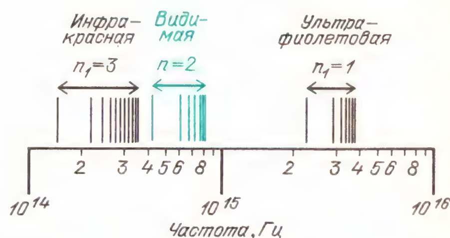
В очень горячем газе, таком, как в люминесцентной лампе или спектральной разрядной трубке, энергия, необходимая для перевода атома из основного состояния в одно из возбужденных состояний, доставляется за счет соударений. Для большинства атомов и большинства переходов в течение 10^{-8} с атом испускает фотон и опускается на более низкий уровень энергии. Поскольку изменения энергии атома могут происходить только между квантованными уровнями, испускаемые фотоны должны иметь только определенные дискретные значения энергии. Каждое значение энергии соответствует определенной частоте и длине волны.

Для водорода разрешенные энергии фотонов показаны на диаграмме. Обратите внимание, что имеются семейства, или серии, частот, соответствующие нижнему энергетическому уровню перехода. Эти серии названы именами физиков девятнадцатого столетия. На диаграмме внизу мы видим спектр частот трех из этих водородных серий. Только серия Бальмера находится в диапазоне видимого света. Наблюдаемые на опыте спектры очень хорошо согласуются с предсказаниями этой грубой модели.

Серии частот, создаваемые этими переходами между уровнями энергии свободных атомов в газах, в противоположность связанным атомам в молекулах или твердых телах, называются *линейчатыми спектрами.* Когда испускаемый нагретым газом свет анализируется призмой или дифракционной решеткой в спектроскопе, этот свет входит через узкую щель. Изображение щели представляет собой линию. Ее положение зависит от частоты, или длины, волны света. Таким образом, спектр состоит из ряда отдельных «линий».



Спектры, создаваемые квантованными уровнями энергии водорода

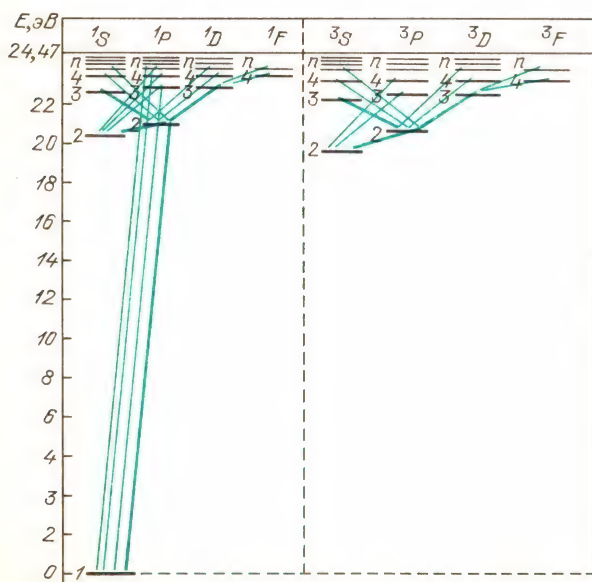


Уровни энергии атомов можно также наблюдать в *поглощении* света. Например, спектр солнечного света сначала кажется непрерывным веером цветов. При внимательном изучении в нем обнаруживаются «фраунгоферовы» линии поглощения. Свет, исходящий от «поверхности» Солнца, содержит, по существу, все частоты. Когда это излучение проходит сквозь более холодные газы атмосферы Солнца, происходит погло-

щение света определенных частот, соответствующих квантованным энергетическим уровням атомов более холодных газов. На основании анализа этих спектров выпадающих частот были установлены газы, входящие в состав солнечной атмосферы.

Выше мы привели количественный вывод уровней энергии только для водорода. Что происходит, когда в каждом атоме имеется много электронов? Даже когда их всего два, как в гелии, возникают осложнения. Чтобы рассчитать уровни энергии, нам пришлось бы принимать во внимание взаимное отталкивание двух электронов, так же как их притяжение к ядру. Кроме того, главную роль в таком расчете играет принцип запрета Паули. Два электрона не могут находиться на одном и том же уровне, если только их спины не противоположны. С другой стороны, переходы между уровнями энергии могут происходить только при условии, что момент импульса сохраняется. Сам испускаемый фотон обладает моментом импульса в одну единицу. Перестроившаяся атомная система, включающая и спины электронов, должна отвечать за остающуюся часть начального момента импульса. Лишь некоторые переходы могут удовлетворить этим требованиям. У гелия, например, полный спектр состоит из двух не связанных между собой систем спектральных линий, соответствующих двум различным наборам конечных уровней. На нижнем уровне два электрона находятся, по существу, в состоянии с одной и той же энергией, но имеют противоположные спины. В других сериях один электрон находится в состоянии с более высокой энергией, но спины электронов параллельны.

Простая модель Бора оказалась в поразительно хорошем согласии с экспериментальными данными для водорода, привела к качественному согласию для некоторых водородоподобных атомов, таких, как *ионизованный* гелий или атомы щелочных металлов, но потерпела полную неудачу в случае более сложных систем, включая гелий. Рассмотрим касающиеся электронов факты, которые игнорируются в этой простой модели. Если бы электроны на самом деле двигались по крошечным орбитам, их расчетные скорости были бы настолько велики, что могли бы потребоваться релятивистские поправки. К 1920 году некоторые ученые рассчитали релятивистские результаты, и часть из них приводила к лучшему согласию с экспериментом. Более серьезное возражение против модели Бора связано с используемым в ней предпо-



Две системы спектров, обусловленные энергетическими уровнями гелия и принципом запрета Паули

ложением о том, что электроны действительно движутся по орбитам. Как мы уже видели, существует соотношение между неопределенностью импульса частицы и неопределенностью ее положения. Принимая для частицы какую-то орбиту, мы подразумеваем, что как положение, так и импульс можно измерить с точностью, достаточной для определения этой орбиты.

Вопрос 23-10
Одна из форм принципа неопределенностей Гейзенберга связывает неопределенность *момента импульса* и неопределенность *углового положения*: $\Delta L \Delta\theta \geqslant \hbar$. В соответствии с моделью Бора, чему равен момент импульса электрона в основном состоянии атома водорода ($n = 1$)? Чему равна неопределенность этого момента импульса? (Может ли эта неопределенность составлять 1/2 или 1/10 или 1/100 момента импульса?) Какой поэтому будет неопределенность углового положения?

Как мы видели в последнем разделе, любая частица характеризуется связанной с ней длиной волны. Длина волны выражается через импульс частицы:

$$\lambda = \frac{h}{p}.$$

Посмотрим, какова эта длина волны для электрона в основном состоянии ($n = 1$) атома водорода, рассматриваемого по модели Бора. Поскольку $mvr = n\hbar$, то

$$mv = p = \frac{\hbar}{r}.$$

Следовательно,

$$\lambda = \frac{h}{\hbar/r} = 2\pi r.$$

Длина волны оказывается размером с длину окружности орбиты! Очевидно, что эта модель заходит слишком далеко. Электрон нельзя рассматривать как точечную частицу, движущуюся по орбите вокруг ядра.

Новые законы механики микромира были открыты в 1920-х годах. Эта наука называется *квантовой механикой* или волновой механикой. Физические системы описываются в ней с помощью уравнений, решения которых имеют волновой характер. Из этих решений можно получить вероятность обнаружения частицы в определенном положении или вероятность перехода частицы из одного энергетического состояния в другое. Квантовая механика с полным успехом предсказывает результаты опытов с атомами или субатомными частицами – при условии, что *удается выполнить соответствующие расчеты.* Даже новая квантовая механика упирается в старые проблемы математических трудностей, когда рассматривается взаимодействие более двух частиц.

Для атомов, содержащих много электронов, приходится делать приближения. Например, у лития три электрона. Два из них могут находиться в малой области с $n = 1$. Принцип запрета Паули выполняется, потому что электроны имеют противоположные спины. Третий электрон не может разместиться в состоянии с $n = 1$, так как в противном случае он был бы идентичен с одним из уже находящихся там электронов, что запрещено. Он находится в состоянии с $n = 2$ и ведет себя почти так, как будто внутренние электроны образовали замкнутую оболочку вокруг ядра. Поскольку эта оболочка частично экранирует положительный заряд ядра, составляющий 3 единицы, внешний электрон видит только эффективный положительный заряд в одну единицу заряда. Так как он находится дальше от центра этого заряда, чем электрон в атоме водорода, то и удерживается он не так сильно. Энергия ионизации составляет всего 5,4 эВ. В наинизшем энергетическом состоянии внешний электрон атома лития не полностью заэкранирован от ядра двумя внутренними электронами. Однако в первом приближении спектр лития подобен спектру атома водорода.

Анализ более сложных атомов требует лучших приближений и длинных компьютерных расчетов. Структура энергетических уровней и соответствующих им спектров для большинства атомов очень сложна. Например, одной из наиболее известных спектральных ли-

ний, которую легко получить без сложных приборов, является *D*-линия натрия. Посыпьте чуточку соли на пламя газовой горелки, и вы увидите яркий желтый свет, испускаемый внешним электроном, соскакивающим из возбужденного состояния в основное состояние с $n = 3$. Когда этот свет анализируют с помощью спектрометра, оказывается, что имеются две близкие линии, одна с $\lambda = 5{,}896 \cdot 10^{-7}$ м и другая с $\lambda = 5{,}890 \cdot 10^{-7}$ м. Многие спектральные линии оказываются дублетами или даже мультиплетами.

Уровни энергии атомов не только определяют спектры этих атомов, но также управляют химическими свойствами элементов. Первоначально Периодическая таблица была построена Дмитрием Ивановичем Менделеевым (1834 – 1907) на основе химической активности и подобия в свойствах элементов. В наши дни квантовая теория дает полное объяснение химических свойств (по крайней мере в принципе – детальные расчеты часто оказываются слишком сложными). Например, щелочные металлы, такие как литий, натрий и калий, имеют один дополнительный электрон вне целиком заполненной оболочки внутренних электронов. Их спектры имеют водородоподобный характер, и их химическая валентность равна +1. Галогенам, таким как фтор, хлор, бром и иод, не достает только одного электрона для заполнения оболочки. Они имеют химическую валентность –1. Чем тяжелее атом щелочного металла, тем дальше от ядра находится его валентный электрон и поэтому тем слабее он удерживается в атоме. Следовательно, энергия ионизации у калия меньше, чем у лития, и калий обладает большей химической активностью. У галогенов все как раз наоборот. У самого легкого из них – фтора – не хватает электрона для заполнения второй оболочки (с $n = 2$). Притяжение к ядру очень велико, и фтор является сильнодействующим окислителем (он захватывает электроны). Центральная область атома иода имеет такой же полный положительный заряд, притягивающий электрон для заполнения оболочки, но в этом случае $n = 5$ и расстояние до ядра значительно больше. Притяжение оказывается слабее, и иод является более слабым окислителем.

МОЛЕКУЛЫ

Простейшую молекулу, состоящую только из двух протонов и двух электронов, имеет водород. Было бы заблуждением думать, что эта молекула представляет собой простое объединение двух атомов водорода. Уровни энергии и области сосредоточения электронов у молекулы совсем не такие, как у отдельных атомов. Чтобы рассчитать детали ее структуры, мы начинаем с двух положительно заряженных центров и интересуемся тем, как в этой области могут устроиться два электрона.

На самом нижнем уровне энергии имеется большая вероятность нахождения двух электронов (с противоположными спинами) в промежутке между протонами, что и создает химическую связь. Когда атомы подобным образом обмениваются электронами и ни один из атомов не сохраняет исходной внешней структуры, связь называется *ковалентной*. В другом предельном случае, как у хлористого натрия, валентный электрон атома натрия полностью переходит во внешнюю электронную оболочку хлора. В результате получается система, состоящая из двух сферических ионов, положительного и отрицательного, притягивающих друг друга. Такая связь называется *ионной*. В большинстве молекул атомы удерживаются вместе связями, занимающими промежуточное положение между чисто ковалентными и чисто ионными. В любом случае это лишь названия для первых приближений при нахождении истинных энергетических состояний и электронных конфигураций.

Вопрос 23-11
В случае молекулы водорода имеется четыре взаимодействующих частицы и каждая из них влияет на движение всех остальных. В случае натрия (атомный номер 11) и хлора (атомный номер 17) имеются 30 взаи-

модействующих частиц. Разве возможно рассчитать движение сразу 30 частиц?

Даже в тех случаях, когда между молекулами не может происходить обмен электронами или их перераспределение, все же могут существовать силы взаимодействия молекул. Действующие между молекулами силы Ван-дер-Ваальса, которые требуют внесения поправок в газовые законы и объясняют физическую адсорбцию, вызваны флуктуациями центров распределения электрических зарядов атомов и молекул. Хотя атомы и молекулы электрически нейтральны, они состоят из большого числа движущихся заряженных частиц. Происходят мгновенные смещения этих составных частей из симметричных расположений, в результате чего возникают флуктуирующие электрические диполи. Последние в свою очередь индуцируют подобные смещения в близлежащих атомах или молекулах. Возникающие из-за этого силы взаимодействия слабы по сравнению с химическими связями и убывают обратно пропорционально шестой степени расстояния между молекулами.

Спектры молекул характеризуются наличием цветных полос, которые можно разделить на отдельные линии только при высоком разрешении. Кроме уровней энергии, обусловленных расположением электронов, у молекул есть уровни энергии, обусловленные колебаниями и вращением. Эти энергии тоже подчиняются квантовым условиям. Однако обычно расстояние между соседними колебательными и вращательными энергетическими уровнями мало, и поэтому лишь незначительно различаются энергии фотонов, испускаемых при переходах с соседних уровней. Типичный молекулярный спектр в видимой области состоит не из линий, а из полос. Каждому переходу между различными электронными уровнями энергии соответствует множество слегка различающихся энергий, потому что с каждым электронным состоянием связаны разнообразные состояния колебаний атомов и вращения молекулы.

ТВЕРДОЕ ТЕЛО

Сложности, возникающие тогда, когда огромное число молекул связано воедино, настолько велики, что бóльшая часть исследований в этой области была выполнена лишь после второй мировой войны. Из этих исследований вышли частичное понимание искусства металлургии и такие практические устройства, как транзисторы и лазеры.

Наиболее впечатляющей чертой твердых тел является регулярность расположения атомов. Большинство твердых тел имеет кристаллическую структуру, в которой атомы связаны в решетку. В некоторых случаях одно и то же расположение повторяется только на протяжении нескольких тысяч атомных рядов, прежде чем переходит в подобный же узор с ориентацией в другом направлении или, возможно, этот узор нарушается атомом примеси. С другой стороны, когда атомы выстраиваются очень медленно, может сформироваться единый однородный кристалл, содержащий многие моли атомов. Некоторые твердые вещества, подобные стеклам, не имеют кристаллической структуры и наиболее просто могут быть описаны как застывшие жидкости.

Вообразите теперь, что происходит с расположением электронов в кристалле, в котором центры атомов равномерно выстроены по всем направлениям и находятся друг от друга на расстояниях лишь порядка диаметра атома. Внутренние электронные оболочки будут по-прежнему оставаться связанными с родительскими атомами и будут сравнительно невозмущенными. Однако внешние электроны окажутся на совершенно других энергетических уровнях. Мы видели, что в случае ковалентной связи нахождение электрона у одного атома было столь же вероятно, сколь и у другого атома. Когда связанные атомы протягиваются во всех направлениях, некоторые из внешних электронов должны быть разделены между всеми атомами кристалла.

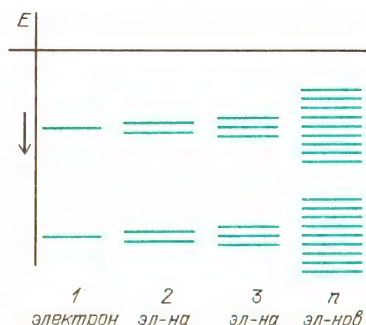
В случае *изолированного* атома уровни энергии и распределения вероятностей для внешних электронов рассчиты-

ваются на основе *центральной* силы притяжения, частично заэкранированной внутренними электронными оболочками. Однако в случае внешних электронов каждого из атомов в кристалле задача больше похожа на расчет движений и положений мячей для гольфа на площадке с многочисленными неглубокими ямками. Чтобы сделать такую модель немного более похожей на реальную ситуацию, нам пришлось бы добавить ограждение площадки, так чтобы мячи находились в состояниях с отрицательной потенциальной энергией по сравнению с внешней областью и поэтому не могли бы покинуть площадку. Кроме того, нужно представлять себе, что вся площадка вибрирует с тепловой энергией. Это поддерживает мячи в постоянном движении и не позволяет им оставаться надолго захваченными какой-либо ямкой.

После того что мы узнали о поведении электронов, аналогию с площадкой для гольфа едва ли можно считать удовлетворительной. Протяженность функции распределения, описывающей электрон, превышает расстояние между атомами. В реальных вычислениях доминирующую роль играют два квантовых эффекта. Во-первых, принцип запрета Паули требует, чтобы в пределах одного кристалла не более двух электронов имели в точности одинаковую энергию. Если бы мы смогли изъять из кристалла все электроны, не связанные со своими родительскими атомами, и затем начали их пускать обратно по одному, первый из них опустился бы на самый нижний разрешенный уровень энергии. Время от времени этот электрон поднимался бы в положения с более высокой энергией благодаря тепловым столкновениям.

Второй квантовый эффект обусловлен взаимодействием атомов друг с другом. В изолированном атоме типичное расстояние между уровнями энергии составляет несколько электрон-вольт. Но когда соединяются два атома, их электроны в соответствии с принципом запрета Паули не могут иметь одну и ту же энергию. В результате происходит расщепление уровней энергии. Каждый уровень превращается в два уровня, разделенных малым энергетическим интервалом. Добавьте третий атом, и каждый уровень энергии превратится в три уровня. В любом кристалле соединены вместе многие миллионы атомов, и в результате получается огромное число энергетических уровней, едва отделенных друг от друга; поэтому кажется, что энергии электронов образуют континуум.

Обратите внимание, что в показанном на рисунке случае энергетические уровни не образуют сплошь непрерывного набора. Эти уровни возникли в результате расщепления атомных уровней,



Энергетические уровни электронов в кристалле. Каждый главный уровень энергии подразделяется на множество подуровней

которые могли далеко отстоять друг от друга. При расщеплении каждый атомный уровень образует более или менее широкую полосу уровней, но между этими полосами существуют зазоры. В пределах каждой из полос, или, как их называют, энергетических зон, электрон может легко приобрести или потерять небольшую энергию (при условии, что он сможет найти поблизости незанятый уровень для перехода туда), но он должен получить значительный толчок, чтобы перескочить через зазор из нижней зоны в более высокую.

В некоторых веществах все уровни энергии в нижней зоне заполнены как раз до самого верхнего уровня с энергией в несколько электрон-вольт. При комнатной температуре средняя кинетическая энергия свободной молекулы или связанного в твердом теле атома равна примерно (1/25) эВ. Но большей части электронов в твердом теле невозможно сообщать столь малые порции энергии,

потому что в противном случае они должны были бы подниматься в энергетические состояния, уже заполненные двумя электронами. Но это означает, что большинство электронов не может участвовать в тепловом движении!

Эта квантовая модель объясняет ряд экспериментальных наблюдений, которые нельзя понять в рамках классических теорий. В старых объяснениях принималось, что в металле по меньшей мере один электрон на каждый атом должен быть свободен для скитаний. Этим частично объяснялась электропроводность. Однако свободные электроны должны были бы вести себя подобно газу, заключенному в объеме кристалла. Тогда они давали бы ощутимый вклад в удельную теплоемкость. Здесь мы видим еще один пример того, как основательные измерения таких старомодных вещей, как тепловые характеристики вещества, дают нам ключ к пониманию его микроструктуры.

Молярная теплоемкость металла должна была бы составлять $3R$, поскольку атомы могут совершать колебания в трех измерениях, и средняя энергия теплового движения на каждое измерение равна kT ($(1/2)kT$ — потенциальная энергия и $(1/2)kT$ — кинетическая). Это очень хорошо согласуется с наблюдаемым значением 6 ккал/(моль · К). Но как быть со всеми свободными электронами? На каждый из них в среднем должна бы приходиться энергия $(3/2)kT$, как и в случае молекул газа, поскольку они могут свободно метаться по всем направлениям. Каждый раз при сообщении тепла металлу, имеющему по одному электрону проводимости на атом, электронный газ должен был бы поглощать одну треть этой энергии.

Таким образом, электронный газ должен был бы повысить молярную теплоемкость металла до $(9/2)R$, т. е. до 9 ккал/(моль · К). Но он не повышает. И квантовая модель объясняет, почему. Электроны не могут поглощать энергию, потому что большинство из них находится в нижней энергетической зоне, которая целиком заполнена. Единственный способ, которым могла бы поглощаться энергия, состоял бы в сообщении большой энергии электронам в верхней части этой зоны, чтобы они смогли перескочить в более высокую свободную энергетическую зону; но столь большие значения энергии недоступны при тепловом движении. У этих электронов просто нет той свободы, какой обладают молекулы газа, потому что электроны связаны в квантовых состояниях внутри кристалла*).

ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Рассмотренная выше квантовая модель объясняет также, почему некоторые вещества являются проводниками электрического тока, а другие — диэлектриками. На этом рисунке показаны три различные возможности расположения зон энергетических уровней. У диэлектрика имеется как раз вдвое больше электронов, чем уровней энергии в зоне, и поэтому каждый уровень заполнен.

Вопрос 23-12
Каким образом электронов может быть в два раза больше, чем уровней энергии? Как может на определенном числе уровней находиться вдвое большее число электронов?

Когда электрическое поле наложено на вещество такого типа, как диэлектрик

---

*) Здесь необходимы некоторые уточнения. Рассуждения автора объясняют, почему в *диэлектриках* электроны не дают вклада в удельную теплоемкость кристалла: в диэлектриках верхняя из занимаемых электронами энергетических зон заполнена целиком и отделена от ближайшей свободной зоны энергетическим зазором (зоной запрещенных энергий), ширина которого велика по сравнению со средней энергией теплового движения kT. В *металлах* верхняя из занимаемых зон (зона проводимости) заполнена частично (например, наполовину). Малый вклад электронов проводимости в теплоемкость металла объясняется тем, что в тепловом движении (и, следовательно, в поглощении подводимого тепла) может принимать участие лишь малая доля этих электронов, а именно те, что занимают энергетический слой шириной порядка kT вблизи верхней границы заполненных уровней энергии зоны проводимости. (*Примеч. пер.*)

(слева на рисунке), электрон «чувствует» действие силы, но не может двигаться и набирать энергию. Чтобы сделать это, электрону пришлось бы переместиться из состояния с более низкой энергией на энергетический уровень, который уже заполнен. Электроны на самых верхних уровнях смогли бы получать энергию только при том условии, что они были бы резко подняты на энергетические уровни соседней, более высокой зоны. Это не может произойти в обычном электрическом поле, потому что при постепенном ускорении электрон медленно набирает энергию. Ему пришлось бы пройти через все состояния с промежуточной энергией, а их в веществе такого типа не существует.

Диаграмма уровней энергии проводника показана в середине приведенного рисунка. Некоторые из энергетических уровней какой-либо зоны не заняты. Электрон может получать энергию от наложенного ускоряющего поля. Может показаться, что он будет продолжать ускоряться до тех пор, пока не достигнет максимальной допустимой энергии в этой зоне. Однако электрон испытывает частые столкновения, благодаря которым его скорость остается низкой и, в среднем, постоянной. За эти столкновения ответственны присутствующие в кристаллической структуре примеси и тепловые колебания атомов решетки. Они отнимают у электрона часть энергии, поставляемой ему наложенным электрическим полем, и превращают ее в тепловую энергию. В общем случае чем выше температура решетки, тем больше энергии она поглощает у электронов проводимости. Сопротивление проводника обычно возрастает при увеличении температуры.

Ситуация, характерная для полупроводника, показана справа на приведенном рисунке. Все уровни одной из зон заняты, но лишь малый энергетический зазор отделяет эту зону от более высокой зоны с пустыми уровнями. Тепловая энергия или электромагнитное излучение могут обеспечить небольшие кванты энергии, которые необходимы для того, чтобы некоторые электроны перескочили в открытую зону проводимости. Электрическое сопротивление такого вещества будет зависеть не только от окончательной скорости носителей заряда, которая определяется природой испытываемых ими столкновений, но и от того, сколько имеется электронов, способных переносить ток. В случае углерода в форме графита электрическое сопротивление уменьшается при увеличении температуры. Более высокая температура способствует переходу бóльшего числа электронов в верхнюю зону проводимости.

Когда два твердых тела приведены в соприкосновение, движение электронов в окрестности контакта может иметь характер, невозможный для каждого из тел в отдельности. В соприкасающихся веществах уровни энергии и запрещенные области могут различаться. Вблизи контакта электрон сможет получать энергию от внешнего электрического поля, если он движется в сторону области, где имеются свободные уровни энергии, и не сможет при движении в противоположную сторону. Такое движение электронов приведет к появлению свободных уровней в той области, где прежде они были заполнены, так что другие электроны смогут прийти на освободившиеся места. Однако этот ток может иметь место только в направлении вещества с незанятыми уровнями. Таким образом, получаем выпрямитель, который может пропускать ток в одну сторону и не может в другую.

Вопрос 23-13

Электрическое поле на границе между двумя веществами действует на находящиеся там электроны с некоторой силой. Почему же электроны могут на нее реагировать, когда поле

направлено в одну сторону, и не могут – когда в другую?

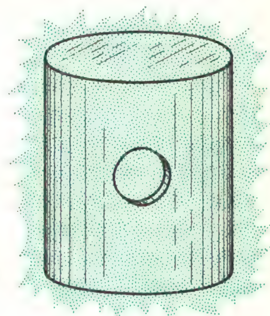
В наши дни теория твердого тела в огромной степени способствует техническому прогрессу. Описанный выше контактный диод родился благодаря сделанным сначала на бумаге разработкам, основанным на квантовой теории кристаллов. Из нее же вышел и транзистор, работающий на сходном принципе, и великое множество других устройств. Эта теория используется для получения сплавов, которые имеют улучшенную проводимость или становятся сверхпроводящими при более высоких температурах, или имеют больший предел прочности, или различными способами реагируют на свет и нагревание. В этой области, занимающейся изучением сложных структур, построенных из простых частиц, стираются грани между чистой теорией и техническими приложениями.

СПЕКТРЫ ИСПУСКАНИЯ НАГРЕТЫХ ПЛОТНЫХ ТЕЛ

Отдельные атомы газа, нагретого до высокой температуры, дают линейчатые спектры. Когда атомы соединены в молекулы, возникают полосатые спектры, в которых каждая полоса образована множеством отдельных линий. Когда атомы тесно упакованы в твердом теле или в веществе, имеющем высокую плотность, испускание света происходит по существу на всех частотах. Раскаленный докрасна кусок железа создает подобный непрерывный спектр. Так же ведет себя и поверхность Солнца, которое представляет собой не твердое тело, а состоящую из ионов и электронов плазму с плотностью, близкой к плотности твердого тела.

Каким образом плотное вещество может испускать фотоны всех энергий, если оно все-таки состоит из атомов, имеющих дискретные уровни энергии? Изолированные атомы железа дают линейчатый спектр. Когда атомы железа скреплены вместе, отдельные уровни энергии атомов должны исчезнуть. В самом деле, в твердом металле внешние электроны уже больше не входят в структуру отдельных атомов, а принадлежат всему кристаллу. При возбуждении какого-либо одного атома его возбуждение распределяется по всему кристаллу. Хотя уровни энергии этой системы по-прежнему квантованы, теперь имеется громадное число таких тесно расположенных уровней.

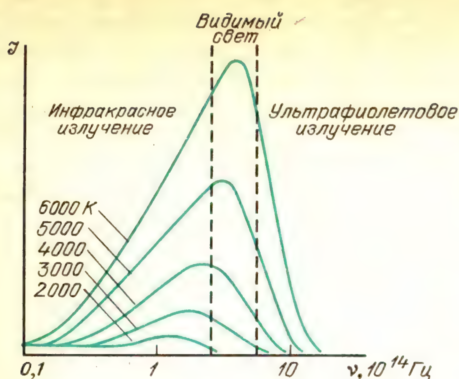
Спектр испускания плотного источника в первую очередь зависит от температуры и в меньшей степени от цвета поверхности и условий, в которых находится нагретое тело. Существует способ полностью исключить зависимость от характеристик поверхности. Если у закрытого полого ящика или трубки



Приближенная модель «черного тела». В стенке раскаленной металлической трубки имеется отверстие. Почти все входящее в отверстие излучение оказывается захваченным, так что отверстие является полным поглотителем

имеется небольшое отверстие в стенке, то выходящее из отверстия излучение не будет зависеть от материала, из которого сделан ящик. Более того, выходящее из отверстия излучение будет иметь бóльшую интенсивность, чем испускаемое стенкой. Отверстие оказывается более ярким! Из-за того, что отверстие в полости поглощает весь падающий на него свет, такое устройство называется «черным телом». Выходящее из черного тела излучение зависит только от температуры. Попытки объяснения этой зависимости стали решающим камнем преткновения для классической физики и привели к зарождению квантовой механики.

На этом графике показана интенсивность как функция частоты для излучения черного тела при некоторых темпе-



Интенсивность излучения черного тела как функция частоты для некоторых температур

ратурах. В этих спектрах наблюдаются две закономерности. Во-первых, имеется простое соотношение между температурой и частотой $\nu_{\text{макс}}$, где интенсивность излучения максимальна: $\nu_{\text{макс}} = \text{const} \cdot T$. Во-вторых, полная излучаемая энергия пропорциональна четвертой степени температуры. Оба эти закона качественно согласуются с повседневными наблюдениями. По мере того как у лампочки повышается температура нити накала, ее цвет изменяется от красного к белому. Кроме того, интенсивность света, испускаемого раскаленной нитью, драматически возрастает при повышении ее температуры – вспомните яркую вспышку, когда перегорает нить лампы накаливания.

До 1900 года классическая физика смогла объяснить многие электромагнитные явления. Уравнения Максвелла с успехом предсказали распространение излучения в вакууме. Эти уравнения вместе с основными принципами термодинамики должны были бы оказаться в состоянии объяснить закономерности излучения, характеристики которого зависят только от температуры источника и не зависят от материала, из которого он сделан.

В модели для излучения черного тела твердые стенки полого ящика предполагались содержащими огромное число электронных осцилляторов. Последние могут иметь любые собственные частоты. Благодаря равнораспределению тепловой энергии, на каждую моду, т. е. на каждую собственную частоту осцилляторов, должна приходиться в среднем одна и та же тепловая энергия. Каждая мода должна была бы иметь энергию $3kT$, поскольку у каждого осциллятора $(3/2)kT$ должно приходиться на среднюю кинетическую энергию и еще $(3/2)kT$ на среднюю потенциальную энергию. Однако не все моды, или частоты, оказываются возможными.

Электронные осцилляторы излучают свою энергию внутрь замкнутой полости, но они также и поглощают это излучение. При любой данной температуре существует равновесие между электромагнитным излучением в замкнутой полости и колебаниями электронов в ее стенках. Однако излучение в полости может существовать только на частотах, соответствующих стоячим волнам в этой полости. Ситуация здесь аналогична условиям резонанса для звуковых волн в органной трубе. Разрешенные в действительности частоты зависят от размеров полости. На низких частотах (большие длины волн) существует основной тон, затем следующая гармоника, и так далее, причем каждая из частот отделена от следующей значительным интервалом. При более высоких частотах все большее и большее число волн удовлетворяет условиям резонанса. Чем выше частота, тем больше число мод, приходящихся на единичный интервал частот. Если бы каждая мода имела энергию $3kT$, мы бы ожидали, что излучение черного тела должно быть сосредоточено в ультрафиолетовой или даже рентгеновской области! В самом деле, поскольку число мод (обертонов) стремится к бесконечности при неограниченном возрастании частоты, потребовалась бы бесконечно большая энергия, если бы на каждую моду пришлось положить $3kT$. Этот парадокс классической физики довольно красноречиво был назван «ультрафиолетовой катастрофой».

В 1900 году Макс Планк (1858–1947) разрешил этот парадокс с помощью предположения о том, что обмен энергией между осцилляторами и электромагнитным полем происходит квантами. Осцилляторы могут обмениваться энергией лишь порциями, пропорцио-

нальными их частоте:

$$\Delta E = h\nu.$$

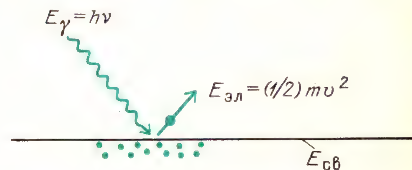
Коэффициент пропорциональности — это наш старый друг постоянная Планка, имеющая очень маленькое значение: $6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

Вопрос 23-14
Будет ли предложенное Планком квантование энергии излучения похоже на квантование момента импульса или электрического заряда? Должна ли энергия излучения всегда существовать в виде целого числа некоторых основных единиц энергии?

Сформулированное Планком требование квантования нарушает равнораспределение энергии в излучении твердого тела. Закон равнораспределения основан на предположении, что энергия переносится из одной моды в другую с помощью процессов, при которых возможен обмен бесконечно малыми порциями энергии в каждом акте взаимодействия. Однако в соответствии с условием Планка высокочастотный осциллятор может обмениваться энергией только в больших порциях, что представляет собой маловероятное событие. Поэтому высокочастотные моды редко возбуждаются. Подробная теория дала распределение энергии излучения от частоты, в точности совпадающее с показанными на рисунке кривыми. Обратите внимание, что это распределение спадает при низких частотах — там мало резонансных мод. Отметьте, что это распределение спадает и при высоких частотах — здесь возможно множество мод, но лишь немногие из них заселены, потому что для возбуждения высокочастотной моды требуется большой скачок энергии.

Планку доставляло большое беспокойство то, что неявно подразумевалось в его теории. Долгое время он предпочитал думать, что квантование свойственно исключительно осцилляторам и что электромагнитное излучение должно несомненно состоять из волн, энергия которых может принимать любые значения. Однако Альберт Эйнштейн (1879 — 1955) пришел к полному разрыву с классической теорией излучения. В одной из трех своих великих статей 1905 года он объяснил фотоэлектрический эффект с помощью квантов излучения. Он предположил, что электромагнитное излучение ведет себя подобно порциям энергии, когда оно взаимодействует с веществом. Каждый «фотон» несет энергию $h\nu$, и когда он взаимодействует с веществом, она оказывается сосредоточенной в одной точке, а не размазанной по фронту волны. Следовательно, энергия фотона может быть сообщена отдельному электрону, связанному в атоме. Если эта энергия имеет достаточную величину, атом будет ионизован и электрон окажется освобожденным.

Вопрос 23-15
Синий свет, как известно, имеет частоту $7{,}5 \cdot 10^{14}$ Гц $(\nu = c/\lambda = (3 \cdot 10^8 \text{ м/с})/(4 \cdot 10^{-7} \text{ м}))$. Какую энергию такой фотон может сообщить атому? Достаточна ли эта энергия для ионизации атома? (1 эВ $= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж.)



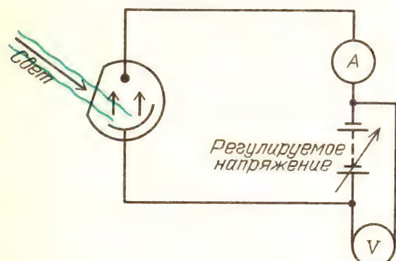
Фотоэлектрический эффект; $E_{св}$ — энергия, необходимая для освобождения электрона из вещества

Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта имеет вид

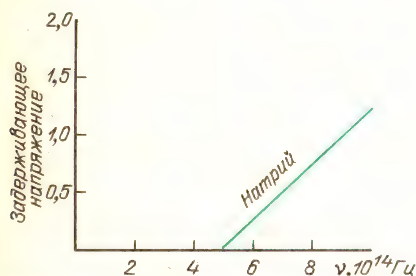
$$(1/2)\, m v_{эл}^2 = h\nu - E_{вых}.$$

В большинстве фотоэлектрических эффектов эмиттируемый электрон не покидает вещество, и поэтому его кинетическую энергию нельзя измерить. После 1905 года некоторые физики продемонстрировали качественное согласие между простым законом Эйнштейна и экспериментальными данными. Однако только в 1916 году Роберт Милликен (1868 — 1953) выполнил тонкие измерения, которые подтвердили закон Эйнштейна для фотоэффекта и тем

самым – реальность фотонов. Измерения должны производиться в высоком вакууме, причем эмиттирующие поверхности должны быть свежеприготовленными в условиях вакуума. Кинетическая энергия электронов определялась по измерениям задерживающего напряжения, которое они могли преодолеть.



Схематическое изображение установки для исследования фотоэлектрического эффекта; интенсивность и длину волны света можно изменять



Максимальная энергия электронов в фотоэффекте как функция частоты падающего света

Энергия связи электрона в металле соответствует пороговой частоте света. По мере увеличения частоты света над пороговым значением кинетическая энергия электронов возрастала.

ПРОБЛЕМА ДУАЛИЗМА

Что такое свет – волна или частица? Дифракция, интерференция и поляризация со всей очевидностью свидетельствуют в пользу волновой модели света. Более того, известно, что свет представляет собой просто коротковолновую разновидность электромагнитного излучения, такого, как радиоволны, волновая природа которых обнаруживает себя как в процессе их получения, так и обнаружения. С другой стороны, в *получении* света существенную роль играют квантованные значения энергии. Спектры изолированных атомов содержат только определенные частоты. Сложный спектральный состав излучения раскаленных твердых тел получает объяснение тогда и только тогда, когда принимается, что микроскопические осцилляторы могут находиться только в состояниях с квантованными значениями энергии и поэтому испускают только квантованные порции энергии излучения. Когда свет взаимодействует с веществом, он ведет себя так, как если бы это были частицы, доставляющие порции энергии в отдельные точки.

Обратите, однако, внимание, что две эти модели света не вполне независимы. Порция света – фотон – имеет энергию, которая пропорциональна его *частоте*:

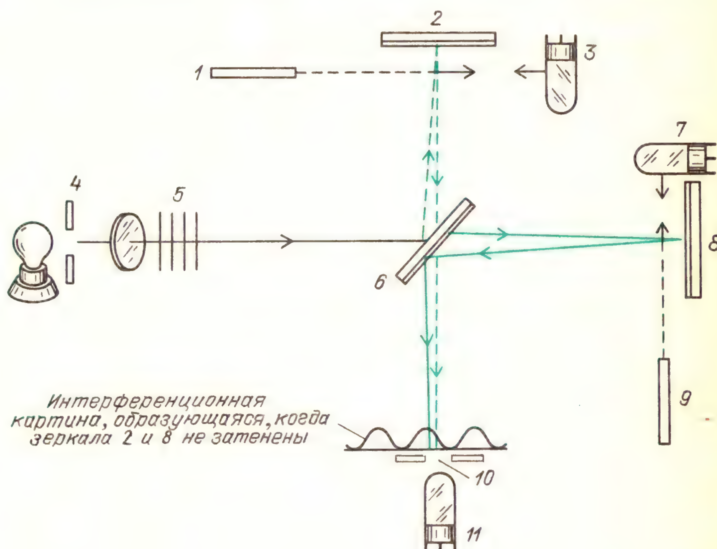
$$E_\gamma = h\nu.$$

Но частота представляет собой волновое понятие. Каким образом частица может иметь некоторую частоту?

Когда в первых десятилетиях нашего века был осознан скрытый в этой ситуации смысл, были предприняты разнообразные философские попытки найти выход из возникающих затруднений. Например, предлагалось считать, что надвигающиеся волновые фронты могут содержать фотоны, примерно так, как приближающиеся к берегу океанские волны могли бы нести на своих гребнях множество досок с любителями кататься на волнах прибоя. Но такая модель не привела ни к каким успешным количественным предсказаниям.

Были поставлены эксперименты, в которых делались попытки заставить свет раскрыть свою истинную природу как волны или как частицы. Тип эксперимента, с наибольшей полнотой раскрывающий суть проблемы, заключается в получении интерференционной картины при столь низких интенсивностях света, чтобы во всей области интерференции в каждый момент времени находился бы только один фотон. Попытки постановки таких экспериментов предпринимались в 1920-х годах и снова, со значительно улучшенной точностью, в начале 1950-х.

Приводимый рисунок иллюстрирует такой эксперимент, выполненный в Будапеште в 1957 году. Прибор подобен интерферометру Майкельсона, использованному в 1880-х годах для сравнения длины волны со стандартным метром и для демонстрации независимости скорости света от движения источника или приемника. Работа интерферометра зарегистрирован, за исключением собственных электрических шумов фотоумножителя. (Фотоумножитель имеет светочувствительную поверхность, которая эмиттирует электроны благодаря фотоэффекту. Затем эти электроны ускоряются от электрода к электроду, генерируя все больше электронов на каждой ступени. Можно достичь усиления



Интерференционная картина, формируемая в интерферометре Майкельсона проходящими поодиночке фотонами: *1*, *9* – заслонка, *2*, *8* – зеркало, *3*, *7*, *11* – фотоумножитель, *4*, *10* – щель, *5* – фильтры, *6* – полупосеребренное зеркало

Майкельсона при решении этой задачи была описана в главе 16. Свет, содержащий только одну длину волны, проходит слева через фильтры, которыми регулируется его интенсивность. Полупосеребренная поверхность зеркала 6 пропускает 50% света и отражает остальные 50%. Каждый из пучков проходит вдоль указанного пути, и они снова встречаются на экране. Вид интерференционной картины зависит от геометрии входной щели. В данном случае на экране образуются чередующиеся полосы взаимного усиления и погашения. В самом деле, если смотреть назад со стороны экрана, единственный источник будет виден как два источника, находящиеся на слегка различных расстояниях, если только длины обоих путей почти, но не в точности, равны.

Когда приемная щель чувствительного фотоумножителя расположена на месте темной полосы интерференционной картины, никакой сигнал не будет в миллион раз.) Затем с помощью фильтров интенсивность света уменьшается до такого уровня, чтобы в секунду пропускался всего миллион фотонов. (Это число можно определить измерением исходной энергии пучка, делением на энергию отдельного фотона $h\nu$ и умножением на фактор ослабления фильтра, значение которого можно найти в отдельном опыте.) Для контроля фактора ослабления можно воспользоваться другими фотоумножителями в положениях 3 и 7, действительно подсчитывающими число фотонов. Геометрия установки такова, что время прохождения фотона через всю систему примерно равно

$$t_{\text{пр}} = \frac{1 \text{ м}}{3 \cdot 10^8 \text{ м/с}} = 3 \cdot 10^{-9} \text{ с}.$$

Поскольку за одну секунду проходит в случайной последовательности около 10^6 фотонов, полное время на протяжении *одной* секунды, в течение которого в установке будет находиться какой-либо

фотон, равно

$$t_{\text{полн}} = 10^6 \cdot 3 \cdot 10^{-9} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ с.}$$

Вопрос 23-16

Чему равна вероятность одновременного нахождения в установке двух фотонов?

Но, быть может, фотон в состоянии разделиться на зеркале 6, так что одна его половина пойдет по одному пути, а вторая – по другому пути. В конце концов обе половины могут достичь фотоумножителя и проинтерферировать друг с другом. Такую возможность можно проверить на опыте. Когда зеркала 2 и 8 заменены фотоумножителями, следует ожидать совпадения отсчетов, если фотоны делятся пополам.

Современные электронные устройства, связанные с фотоумножителями, в состоянии установить, совпадают отсчеты или нет, с погрешностью до 10^{-9} с. Отсчеты в 3 и 7 обычно не совпадают. Каждый фотоумножитель регистрирует по полмиллиона отсчетов в секунду, но лишь очень немногие из них совпадают по времени, и число таких совпадений согласуется с предсказанием теории вероятностей для отсчетов, происходящих случайным образом.

Результат наблюдений заключается в том, что хотя в установке редко бывает более одного фотона одновременно фотоумножитель, просматривающий участок деструктивной интерференции на экране, все равно ничего не видит. Если *однако* зеркало 8 или зеркало 2 закрыть заслонкой, фотоумножитель немедленно начинает регистрировать отсчеты. Когда одно из зеркал закрыто, расположенная на месте экрана фотопластинка зарегистрировала бы не интерференционные полосы, а только непрерывную засветку, которую следует ожидать в центральном максимуме дифракционной картины от одной щели. Как только открываются оба зеркала, на фотопластинке начинает выстраиваться изображение интерференционного узора, и фотоумножитель не регистрирует отсчетов, если его приемная щель приходится на полосу погашения, *несмотря на то что в установке одновременно может находиться только один фотон.*

Такой непреодолимый парадокс, по-видимому, означает, что мы еще не знаем, что такое свет, и должны как-то полностью изменить свою точку зрения. Хотя обычно считается, что решения уравнений Максвелла описывают бегущие волны электрического и магнитного полей, в действительности мы пользуемся этими решениями для предсказания вероятности реакции измерительного прибора или почернения зерна фотоэмульсии в определенном месте. Фотоны не распространяются с волнами или на волнах; это математические функции (имеющие вид волн) дают нам вероятность взаимодействий фотонов с регистрирующим устройством.

АТОМНЫЕ ЯДРА

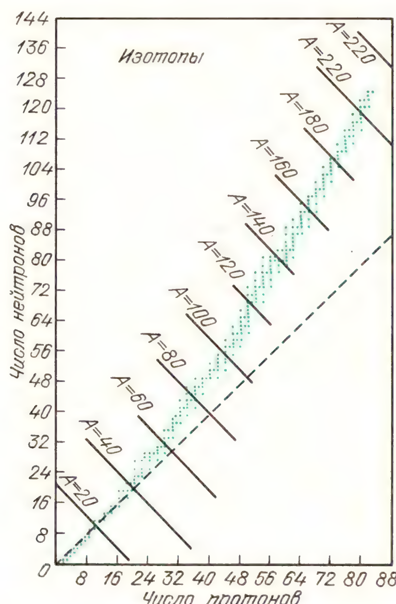
Каждый элемент характеризуется определенным числом электронов на атом. В ядре содержится такое же число протонов, что делает атом электрически нейтральным. Ядро содержит также нейтроны, их обычно примерно столько же, сколько протонов. Однако у данного элемента число нейтронов может быть различным, что приводит к существованию изотопов. Изотопы одного и того же элемента имеют почти идентичные химические характеристики, но слегка различные массы.

У водорода три изотопа, причем два из них имеют специальные названия. *Дейтерий*, называемый иногда тяжелым водородом, имеет ядро, состоящее из одного протона и одного нейтрона. Он стабилен, но в природе существует лишь в количестве одной части на 7000. Ядро *трития* содержит два нейтрона и один протон. Он радиоактивен с периодом полураспада 12,5 лет, и его относительное содержание в природе составляет лишь 10^{-18} от обычного водорода. Благодаря большому отношению масс химическое поведение этих изотопов водорода различается настолько, что их легко отделить друг от друга.

Из всех изотопов наиболее знаменит, по-видимому, уран-235. Его ядро содержит 92 протона (таков атомный номер урана) и 143 нейтрона. Его относитель-

ное содержание в природной смеси составляет лишь 1/144 от урана-238. Создано производственное оборудование для отделения ^{235}U, потому что он служит топливом для атомных реакторов.

Большинство элементов встречается в природе в виде смеси нескольких изотопов, в которой обычно преобладают один или два из них. На диаграмме показаны все стабильные изотопы



Число нейтронов и протонов в стабильных ядрах

и многие из нестабильных вплоть до $Z = 82$ (свинец). Обратите внимание, что у легких элементов устойчивость ядер достигается, когда число нейтронов примерно равно числу протонов (вдоль штриховой линии, проходящей под углом 45° на диаграмме). Однако у ядер с большими атомными номерами для обеспечения устойчивости требуются дополнительные нейтроны. Этот эффект обусловлен несколькими причинами. Очевидно, что должна существовать связующая ядерная сила, действующая между протоном и протоном, нейтроном и нейтроном, а также протоном и нейтроном. Это «контактная» сила, так как она по существу обращается в нуль, если протоны и нейтроны не соприкасаются. Однако кулоновское отталкивание протонов является дальнодействующим. Хотя только прилегающие ядерные частицы притягивают друг друга, все протоны отталкивают друг друга. Устойчивость ядра достигается вплетением все большего и большего числа нейтронов. У ядер элементов, следующих за свинцом ($Z = 82$), так много протонов, что полная стабильность оказывается невозможной.

Ядерные связи наиболее прочны, если могут образоваться протон-нейтронные пары. Когда протон и нейтрон соединяются для образования ядра дейтерия, их масса-энергия меньше, чем у исходных частиц:

$$m_{\text{протона}} = 1{,}6724 \cdot 10^{-27} \text{ кг},$$

$$m_{\text{нейтрона}} = 1{,}6748 \cdot 10^{-27} \text{ кг}.$$

Сумма масс отдельных частиц равна $3{,}3472 \cdot 10^{-27}$ кг;

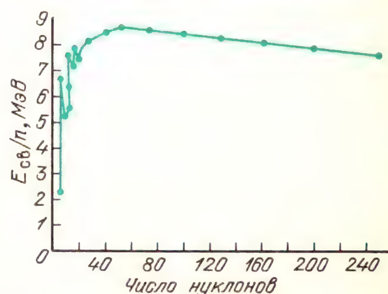
$$m_{\text{дейтрона}} = 3{,}3431 \cdot 10^{-27} \text{ кг}.$$

Разность масс равна $0{,}0041 \cdot 10^{-27}$ кг. Эта утраченная масса-энергия выделяется в форме фотона высокой энергии (гамма-кванта) при объединении протона и нейтрона. Энергия гамма-кванта (равная взятой со знаком минус энергии связи дейтрона) равна

$$E = mc^2 =$$
$$= 4{,}1 \cdot 10^{-30} \text{ кг} \cdot (3{,}0 \cdot 10^8 \text{ м/с})^2 =$$
$$= 3{,}69 \cdot 10^{-13} \text{ Дж} = 2{,}3 \cdot 10^6 \text{ эВ} =$$
$$= 2{,}3 \text{ МэВ}.$$

Вопрос 23-17
Можно ли таким способом определить энергию связи молекулы воды?

На этой диаграмме показана энергия связи на нуклон (нейтрон или протон) как функция числа нуклонов. Дефект



Зависимость энергии связи на нуклон от числа нуклонов

массы для каждого элемента рассчитывается тем же методом, который мы только что использовали для дейтерия. Этот дефект разделен затем на полное число нуклонов в ядре данного элемента. Обратите внимание, что энергия связи на нуклон в общем растет с увеличением атомного номера, хотя для определенных комбинаций получаются некоторые частные эффекты.

Общую форму кривой для энергии связи можно объяснить, приняв, что ядерные силы обусловлены действительным контактом между нуклонами. Поэтому при полном окружении нуклона другими нуклонами может быть достигнута бóльшая связь. Нуклоны на поверхности ядра связаны не столь сильно, как внутренние. Увеличение полного числа нуклонов приводит к возрастанию отношения объема к поверхности. Однако для элементов, содержащих более примерно 50 нуклонов, рост кулоновского отталкивания уменьшает полную энергию связи на нуклон.

Слияние ядер. Если бы можно было соединить два протона и два нейтрона в ядро гелия, дефект масс позволил бы получить энергию 28,4 МэВ. Один из возможных способов осуществления этого – выстрелить одним дейтроном по другому. Разумеется, дефект масс каждого из дейтронов равен 2,3 МэВ, но тем не менее мы в конце концов получили бы энергию 23,8 МэВ. Как ни велики потребности человечества в энергии, очень трудно, к сожалению, заставить дейтроны соединяться. Они оба заряжены положительно и поэтому их нужно сталкивать друг с другом с энергией, достаточной для преодоления барьера электростатического отталкивания.

Вопрос 23-18
Почему бы просто не выстрелить пучком дейтронов по куску дейтериевого льда?

Большинство предпринимаемых в настоящее время попыток получения энергии за счет синтеза ядер основаны на приведении в контакт дейтерия или трития в условиях высоких плотностей и температур порядка 100 миллионов градусов. Именно такие условия существуют в недрах звезд, где слияние водорода в гелий питает звезду энергией. В так называемой водородной бомбе сливающиеся элементы сжимаются с помощью предварительного взрыва урановой бомбы, основанной на реакции деления ядер.

Деление ядер. В случае ядер с предельно большими атомными номерами можно получить энергию расщеплением большого ядра на ядра меньших размеров. Чтобы разделить ядро урана на 235 протонов и нейтронов, потребовалось бы, разумеется, затратить энергию, но можно получить энергию, когда ^{235}U распадается на два меньших ядра, таких как барий и криптон. Энергия связи на один нуклон у урана равна примерно 7,6 МэВ. Для ядер со средними массами энергия связи на нуклон составляет около 8,6 МэВ. Эта разница примерно в 1 МэВ на нуклон дает в среднем 200 МэВ на каждое ядро урана, которое расщепляется на два меньших ядра.

Вопрос 23-19
По человеческим меркам 200 МэВ – это не очень большая энергия. Сколько высвобождается энергии, если один моль урана претерпевает деление? (Моль ^{235}U имеет массу 235 г и весит около половины фунта.)

Тяжелые ядра не расщепляются самопроизвольно несмотря на то, что вся эта энергия может высвободиться при расщеплении. Чтобы процесс начался, нужен спусковой крючок. В случае ^{235}U захват нейтрона низкой энергии искажает ядро и возбуждает в нем колебания, которые вскоре вызывают его деление на две (а иногда на три) части. В этом процессе испускаются два или три нейтрона. Когда место, где произошло исходное деление, окружено еще ^{235}U, эти новые нейтроны могут инициировать новые расщепления. Таким образом реакция оказывается самоподдерживающейся. При должном расположении урана и поглотителей нейтронов этим процессом можно управлять, чтобы получить равномерный устойчивый выход энергии в реакторе. При

другом расположении процесс развивается экспоненциально, вызывая ядерный взрыв.

Наиболее распространенная форма урана ^{238}U тоже может претерпевать деление, но только при бомбардировке нуклонами высокой энергии. Следовательно, в нем нельзя получить самоподдерживающуюся реакцию.

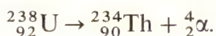
РАДИОАКТИВНОСТЬ

Ядра с несбалансированным числом протонов и нейтронов при определенных условиях могут превращаться в другие ядра.

Существует три основных пути таких превращений.

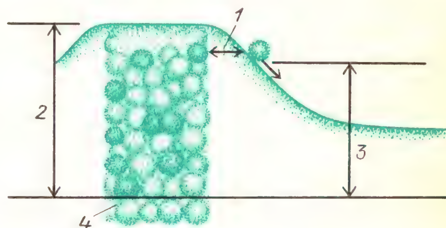
1. Некоторые очень тяжелые ядра могут испускать целое ядро гелия — сильно связанную комбинацию двух протонов и двух нейтронов. Исторически она была названа альфа-частицей. Благодаря двукратному положительному заряду альфа-частица вызывает сильную ионизацию, растрачивая свою кинетическую энергию на сравнительно коротком отрезке пути. В большинстве случаев альфа-частицы испускаются с энергиями в несколько МэВ и могут пройти в воздухе лишь несколько сантиметров.

Когда ядро испускает альфа-частицу, его атомный номер уменьшается на две единицы и число нуклонов (или атомная масса) уменьшается на четыре. Например, распад урана-238 на торий-234 записывается в виде



$$^{238}_{92}U \rightarrow ^{234}_{90}Th + ^{4}_{2}\alpha.$$

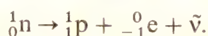
У большинства альфа-распадов периоды полураспада лежат в диапазоне миллионов лет. Если уж родительское ядро нестабильно, почему ему приходится так долго ждать распада? Во-первых, существуют экспериментальные свидетельства в пользу того, что тяжелые ядра до некоторой степени состоят из отдельных альфа-частиц, объединяющих по четыре нуклона. Однако альфа-частица находится в связанном состоянии, как если бы она просто находилась за высокой стеной (в данном случае электростатического происхождения). Можно поинтересоваться тем, не удастся ли ей случайно получить достаточную энергию, чтобы выплеснуться через стену, примерно так, как даже атомы газа в верхней атмосфере от случая к случаю получают энергию, достаточную для преодоления земного притяжения. Однако все альфа-частицы, испускаемые ядром определенного элемента, имеют в точности одинаковую



Квантовомеханическое объяснение альфа-радиоактивности: *1* — толщина барьера, сквозь который α-частица может туннелировать благодаря неопределенности ее положения, *2* — энергия α-частицы, если бы она освобождалась над барьером, *3* — наблюдаемая энергия α-частиц, *4* — захваченные в ядре нуклоны на квантованных энергетических уровнях

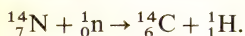
кинетическую энергию, и эта энергия значительно меньше высоты кулоновского барьера, который нужно преодолеть, чтобы вернуться назад в ядро. Очевидно, что альфа-частицы проходят не над этим барьером. Вместо этого они проходят сквозь него! В соответствии с принципом неопределенностей Гейзенберга, имеется небольшая вероятность того, что в какой-то момент времени альфа-частица будет занимать положение вне ядра. Оказавшись снаружи, она продолжает удаляться. Подробная теория хорошо объясняет экспериментальные факты.

2. Другой путь, позволяющий ядру изменить соотношение нейтронов и протонов, состоит в испускании электрона, отрицательного либо положительного. Такой процесс называется бета-распадом. Образцом бета-распада может служить распад самого нейтрона. В свободном пространстве нейтрон нестабилен и распадается на протон и электрон с периодом полураспада около 11 минут:



$$^{1}_{0}n \rightarrow ^{1}_{1}p + ^{0}_{-1}e + \tilde{\nu}.$$

Один из наиболее известных бета-распадов происходит у встречающегося в природе изотопа углерода-14. Период его полураспада составляет всего 5580 лет, так что весь этот изотоп, сформировавшийся при образовании Вселенной, уже давно должен был исчезнуть. Однако он постоянно образуется при бомбардировке азота нейтронами, которые генерируются космическими лучами в верхней атмосфере:



$$^{14}_{7}\mathrm{N} + ^{1}_{0}\mathrm{n} \rightarrow ^{14}_{6}\mathrm{C} + ^{1}_{1}\mathrm{H}.$$

В конце концов углерод-14 распадается по следующей схеме:

$$^{14}_{6}\mathrm{C} \rightarrow ^{14}_{7}\mathrm{N} + ^{0}_{-1}\mathrm{e} + \tilde{\nu}.$$

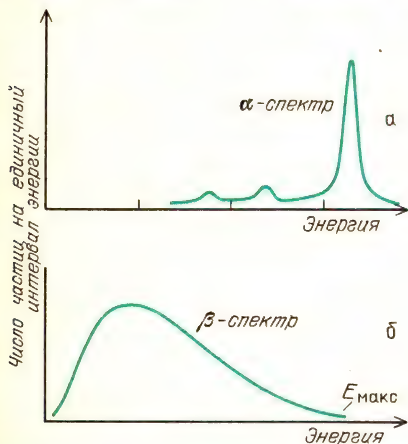
В некоторых искусственных радиоактивных элементах содержится слишком много протонов. В таких случаях могут испускаться положительные электроны (позитроны). Например,

$$^{13}_{7}\mathrm{N} \rightarrow ^{13}_{6}\mathrm{C} + ^{0}_{+1}\mathrm{e} + \nu.$$

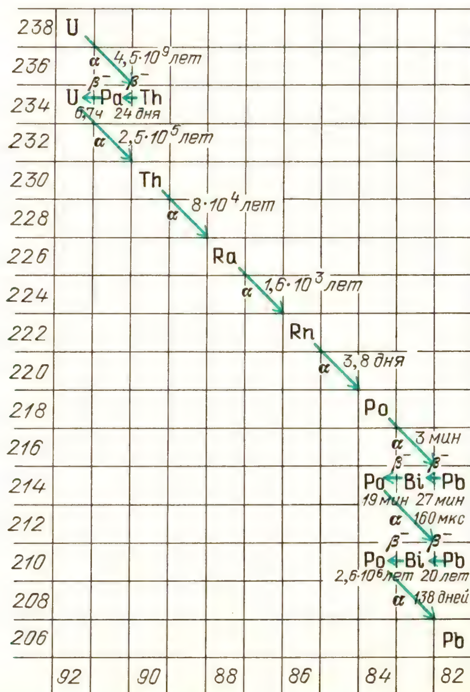
Хотя при бета-распаде существует определенная разность массы-энергии между материнским и дочерним ядрами, испускаемые электроны имеют различные энергии вплоть до некоторого максимума. Оказывается, что в каждом акте бета-распада испускаются две частицы. Вместе с электроном испускается нейтрино – частица с нулевой (или очень малой) массой, не имеющая электрического заряда, но, как и электрон, обладающая спином $(1/2)\hbar$. Освобождающаяся энергия распределяется между электроном (бета-частицей) и нейтрино.

3. Когда ядро претерпевает превращение, такое как испускание альфа- или бета-частицы, оно часто остается в возбужденном состоянии с избытком энергии. Атомы при подобном возбуждении испускают свет, когда они опускаются в основное состояние. Возбужденные ядра тоже испускают фотоны, хотя их энергиям надлежит быть в МэВ-диапазоне. Такие фотоны называют гамма-квантами.

Радиоактивные семейства. Тяжелые радиоактивные ядра распадаются рядами реакций, в которых альфа- и бета-распады приблизительно чередуются. Каждый альфа-распад уменьшает атомный номер на два и каждый отрицательный бета-распад увеличивает его на единицу. Эти последовательности продолжаются до тех пор, пока не образуется какой-либо стабильный изотоп свинца. Существует три основных ра-



Альфа-частица, испускаемая определенным ядром, должна иметь одно из нескольких дискретных значений энергии (*а*). Электрон, испускаемый ядром, может иметь любую энергию вплоть до определенного максимального значения (*б*)



Радиоактивное семейство, начинающееся ^{238}U

диоактивных семейства. Одно из них начинается с ^{238}U и заканчивается свинцом-206 (^{206}Pb). Это семейство показано на диаграмме. Другое семейство начинается с ^{235}U и заканчивается на ^{207}Pb. Третье начинается с тория-232 (^{232}Th) и заканчивается на ^{208}Pb. Имеется еще одно подобное семейство, начинающееся с нептуния-237 и заканчивающееся висмутом-209, но период полураспада нептуния-237 столь мал, что эти ядра в природе уже не встречаются.

ДРУГИЕ ЧАСТИЦЫ

Возьмем перепись всех встречавшихся нам до сих пор субатомных частиц. Вместе с другими частицами они систематизированы в порядке их масс в приведенной здесь таблице. У нижнего края таблицы находится знакомый нам электрон. Одна из частиц вообще не имеет массы; фотоны движутся со скоростью света и поэтому не могут обладать массой покоя. Нейтрино имеет массу покоя менее 100 эВ, и возможно, что их масса равна нулю. Ближе к верхней части таблицы расположены нуклоны – протон и нейтрон.

Обратите внимание, что даже с этими знакомыми нам частицами имеются новые осложнения. У каждой из них есть античастица – частица с такими же массой и спином, но электрическим зарядом противоположного знака. Частицы и античастицы могут рождаться парами при условии, что энергия и импульс сохраняются. Например, гамма-квант с энергией 1,02 МэВ или больше может создать электронную пару. Масса покоя электрона и позитрона равна 0,51 МэВ для каждого из них. Может

Частицы, стабильные к распаду посредством сильного взаимодействия

	Название	Частицы	Античастицы	Масса покоя, МэВ	Период полураспада, с	Схема распада
БАРИОНЫ – сильно взаимодействующие фермионы (полуцелый спин: (1/2)ħ, (3/2)ħ, ...)	Омега-гиперон	Ω^-	$\bar{\Omega}^+$	1676	$\sim 10^{-10}$	$\Omega^- \to \Lambda^0 + K^-$
	Каскадный гиперон	Ξ^0 Ξ^-	$\bar{\Xi}^+$ $\bar{\Xi}^0$	$\Xi^\pm \approx 1320$	$0{,}9 \cdot 10^{-10}$	$\Xi^- \to \Lambda^0 + \pi^-$
				$\Xi^0 \approx 1310$	$1{,}0 \cdot 10^{-10}$	$\Xi^0 \to \Lambda^0 + \pi^0$
	Сигма-гиперон	Σ^+ Σ^0 Σ^-	$\bar{\Sigma}^+$ $\bar{\Sigma}^0$ $\bar{\Sigma}$	≈ 1190	$0{,}6 \cdot 10^{-10}$	$\Sigma^+ \to p^+ + \pi^0$ (50%)
						$\to n^0 + \pi^+$ (50%)
						$\Sigma^0 \to \Lambda^0 + \gamma$
					$1{,}2 \cdot 10^{-10}$	$\Sigma^- \to n^0 + \pi^-$
	Лямбда-гиперон	Λ^0	$\bar{\Lambda}^0$	1115	$1{,}7 \cdot 10^{-10}$	$\Lambda^0 \to p^+ + \pi^-$ (67%)
						$\to n^0 + \pi^0$ (33%)
	Нуклон (протон, нейтрон)	p^+ n^0	$\bar{n}^0$ $\bar{p}^-$	n 939,5	$0{,}7 \cdot 10^3$	$n^0 \to p^+ + e^- + \bar{\nu}$
				p 938,2	стабилен	
МЕЗОНЫ – сильно взаимодействующие бозоны (спин: 0, 1, 2...)	η-мезон		η^0	548	$< 10^{-16}$	$\eta^0 \to \pi^+ + \pi^- + \pi^0$
	K-мезон	K^+ K^0	$\bar{K}^0$ $\bar{K}^-$ $(K^- = K^+)$	494	$0{,}8 \cdot 10^{-8}$	$K^+ \to \pi^0 + e^+ + \nu$ (5%)
						$\to \pi^0 + \mu^+ + \nu$ (5%)
						$\to \mu^+ + \nu$ (64%)
						$\to \pi^+ + \pi^0$ (19%)
						$\to 2\pi^+ + \pi^-$ (6%)
						$\to \pi^+ + 2\pi^0$ (2%)
	K^0, $\bar{K}^0$	K^0_1		498	$0{,}7 \cdot 10^{-10}$	$K^0_1 \to \pi^+ + \pi^-$ (≈34%)
						$\to 2\pi^0$ (≈16%)
		K^0_2			$4 \cdot 10^{-8}$	$K^0_2 \to \pi^+ + \pi^- + \pi^0$, $\to 3\pi^0$ (7%)
						$\to \pi^\pm + \mu^\mp + \nu$ (19%)
						$\to \pi^\pm + e^\mp + \nu$ (24%)
	π-мезон	π^+ π^0 π^-		π^- 140	$1{,}8 \cdot 10^{-8}$	$\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}$
				π^0 135	$0{,}7 \cdot 10^{-16}$	$\pi^0 \to \gamma + \gamma$ ($\pi^0 \to \gamma + e^+ + e^-$ 1%)
				π^+ 140	$1{,}8 \cdot 10^{-8}$	$\pi^+ \to \mu^+ + \nu$ ($\pi^0 \to e^+ + \nu$ 0,01%)
ЛЕПТОНЫ – слабо взаимодействующие фермионы (спин (1/2) ħ)	Тау	τ^-	τ^+	1807	$\sim 10^{-13}$	$\tau^\pm \to \mu^\pm + \nu + \bar{\nu}$ или $e^\pm + \nu + \bar{\nu}$
	Мюон	μ^-	μ^+	105,7	$1{,}5 \cdot 10^{-6}$	$\mu^\pm \to e^\pm + \nu + \bar{\nu}$
	Электрон	e^-	e^+ (позитрон)	0,51	стабилен	
	Тау нейтрино	ν_τ	$\bar{\nu}_\tau$	0		
	Мюонное нейтрино	ν_μ	$\bar{\nu}_\mu$	0		
	Электронное нейтрино	ν_e	$\bar{\nu}_e$	0		
БЕЗМАССОВЫЕ (спин ħ)	Фотон	γ		0	стабилен	
БОЗОНЫ (спин 2ħ)	Гравитон?			0	стабилен	не наблюдался

показаться, что у нейтрино столь мало отличных от нуля атрибутов, что для него не может быть ничего «анти». И тем не менее эксперимент показывает, что сопровождающее отрицательный бета-распад нейтрино отличается от своей античастицы, которая сопровождает положительный бета-распад.

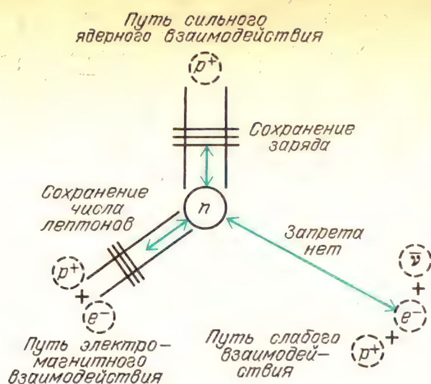
В действительности существуют три подобных электрону частицы с разными массами. Мюон впервые был обнаружен в космических лучах в 1930-х годах, хотя его природа оставалась непонятной еще в течение 10 лет после открытия. Во всех отношениях он представляет собой просто тяжелый электрон, для которого есть антимюон и соответствующие нейтрино. В 1978 году был найден еще более тяжелый электрон, который окрестили тау-частицей. Электроны и нейтрино образуют, по-видимому, отдельное семейство частиц, называемых *лептонами* и не имеющих внутренней структуры – или по крайней мере таковая до сих пор не обнаружена. Каждый член этого семейства имеет спин $(1/2)\,\hbar$. В пределах семейства существует некоторый закон сохранения. Ни один его член не может быть создан или уничтожен без участия соответствующей античастицы, такой как одно из нейтрино.

Нуклоны лежат в основании большого семейства более тяжелых частиц, называемых *гиперонами* – лямбда, сигма, кси, омега и т. д. Все они нестабильны, за исключением протона, и распадаются, превращаясь в протон, с периодами полураспада в диапазоне 10^{-10} с. (Нейтрон представляет собой исключение, которому позже мы дадим объяснение. Его период полураспада равен 11 минутам). Эти частицы имеют полуцелый спин $(1/2)\,\hbar$ или $(3/2)\,\hbar$, и т. д. Они обнаруживают внутреннюю структуру и в настоящее время общепринято представлять себе каждую из них построенной из трех составных частей, образующих группу более фундаментальных частиц, называемых *кварками*. Теория, базирующаяся на комбинациях кварков, оказалась чрезвычайно успешной в объяснении сложного спектра многочисленных гиперонов: их масс, заряда, спиновых соотношений. К сожалению, кварки не наблюдаются в свободном состоянии. Раньше всегда при объяснении природы материи экспериментаторы вскоре получали и изучали отдельно ее предполагаемые структурные элементы. В данном случае, несмотря на то что в различных теориях делаются попытки объяснить невозможность извлечения отдельных кварков, ситуация все-таки остается пока захватывающе неясной.

Существует еще одно семейство частиц, называемых *мезонами*. Они сильно взаимодействуют с гиперонами и в первом приближении служат в качестве ядерного клея, удерживающего вместе нуклоны. Они имеют целочисленный спин 0, 1, и т. д., и не подчиняются какому-либо закону сохранения числа частиц. При условии, что соответствующая энергия и электрический заряд имеются в распоряжении, мезоны могут рождаться и уничтожаться поодиночке. В теории кварков мезоны составлены из кварка и антикварка.

Электроны и нейтрино не принимают участия в сильных ядерных взаимодействиях, но подвержены слабым взаимодействиям, так же, как и гравитационным и электромагнитным. Существуют специфические законы сохранения, которые должны выполняться для некоторых из четырех основных взаимодействий, но не для остальных – хотя для всех взаимодействий должны выполняться законы сохранения энергии, импульса и момента импульса. Когда какая-либо частица распадается, последовательность событий должна развиваться по схеме, удовлетворяющей всем законам сохранения, которым подчиняется данное взаимодействие.

Рассмотрим, например, распад свободного нейтрона. В качестве возможного пути распада можно рассмотреть каждое из трех основных взаимодействий, как показано на рисунке. Распад будет происходить по тому из путей, который допускает наибольшую разность энергий и наименьшее число участников. Рассмотрим сначала сильное ядерное взаимодействие. Хотя нейтрон имеет бóльшую массу, нежели протон, он не может просто превратиться в протон, потому что при этом нару-



Запрещенные и разрешенные пути распада свободного нейтрона

шилось бы сохранение заряда. А для рождения протона и отрицательного мезона эта масса-энергия недостаточна. Энергии достаточно для рождения протона и электрона, но этот процесс не может осуществляться посредством сильного ядерного взаимодействия. Электрон не подвержен этому взаимодействию. *Если бы* сильное взаимодействие здесь было возможным, такой распад происходил бы за времена порядка 10^{-23} с.

Раз уж сильное взаимодействие здесь запрещено, быть может нейтрон мог бы распасться посредством электромагнитного взаимодействия. Оно более чем в 100 раз слабее, чем сильное ядерное взаимодействие, и поэтому такой распад происходил бы медленнее. Хотя электрон подвержен электромагнитным взаимодействиям, нейтрино – нет. Из-за закона сохранения числа лептонов нейтрон не может распасться просто на протон и электрон. Поэтому электромагнитный путь тоже закрыт.

Остается только путь слабого взаимодействия. (Гравитация в 10^{39} раз слабее, чем сильное ядерное взаимодействие, и ее можно не принимать во внимание для взаимодействий отдельных частиц.) Нейтрон, протон, электрон и нейтрино – все они подвержены слабому взаимодействию, и здесь имеется достаточная энергия, чтобы такой распад был разрешен. Однако разность энергий между нейтроном и продуктами распада мала, а число конечных частиц велико (три). Кроме того, слабое взаимодействие в 10^{13} раз слабее, чем сильное ядерное взаимодействие. Следует ожидать, что пройдет немало времени, пока участвующие в распаде частицы смогут расположиться с необходимым сочетанием импульсов, так чтобы распад оказался возможен. И в самом деле, период полураспада составляет 11 минут.

ЭПИЛОГ

В начале книги мы представили логарифмическую карту всех областей Вселенной. Одна из волнующих черт наших человеческих возможностей заключается в том, что мы научились исследовать все эти области, используя лишь небольшое число основных принципов и законов. Существует четыре основных взаимодействия *), имеется не более дюжины законов сохранения. Как мы видели, движение мячей и маятников оборачиваются моделями движений атомов и галактик.

В этой последней главе мы занимались изучением миров, заключенных внутри других миров. Стул, на котором вы сидите, вода, которую вы пьете, воздух, которым вы дышите, да и вы сами построены из молекул, состоящих из групп атомов. Те в свою очередь состоят главным образом из пустоты, населенной электронами и положительно заряженными ядрами. Нуклоны тоже имеют структуру и ведут себя подобно крошечным молекулам, построенным из сочетаний кварков. Однако мы, очевидно, представляем собой нечто большее, нежели простое собрание точечных тел. Их организация представляет собой нечто столь же реально существующее,

*) В конце 60-х годов была построена теория, описывающая электромагнитные и слабые взаимодействия лептонов как разные проявления единого взаимодействия (С. Вайнберг, А. Салам). Возможность объяснить различные виды взаимодействий элементарных частиц как разные проявления единого взаимодействия всегда привлекала физиков. В настоящее время предпринимаются попытки построить объединенное описание для всех видов (сильного, слабого, электромагнитного) взаимодействий элементарных частиц, часто называемое «великим объединением». (*Примеч. пер.*)

как и сами частицы. Упорядоченное группирование эквивалентно информации, и в определенных сложных молекулах эта организация приводит в конечном счете к разуму и самосознанию.

Хотя мы и научились зондировать микромир и наносить на карту Вселенную, мы все же не знаем, как или почему началась вся эта система. Мы не знаем, почему люди на этой планете развили свой разум настолько, чтобы познавать эти вещи. Мы не знаем, являемся ли мы единственными созданиями во Вселенной, которые ее измеряют и пытаются познать. И независимо от того, одиноки мы или нет и происходит ли на самом деле великая драма созидания, особое предназначение человека видится в том, чтобы исследовать и понять свою Вселенную. Возможно именно в этом заключается наша истинная роль. Но даже если и нет никакой драмы или если для нас нет в ней никакой роли, все же это предприятие интересно и благородно само по себе.

Ответы на вопросы

23-1. Энергии 0,4 эВ было бы недостаточно для того, чтобы вызвать эмиссию электрона из вольфрама, но это лишь средняя энергия. Хвост распределения, простирающийся в область высоких энергий, может довольно часто давать электронам достаточно энергичные толчки, что делает добела раскаленную нить очень обильным эмиттером электронов.

23-2. Вот один из способов получения пучка электронов с известной скоростью. Когда электрон ускоряется в промежутке с известной разностью потенциалов, он приобретает кинетическую энергию $(1/2)mv^2 = eU$. Такое измерение дало бы значение v, выраженное через отношение e/m: $v = \sqrt{2eU/m}$. Если затем послать электрон сквозь магнитное поле, он будет двигаться по окружности радиуса r: $m = Ber/v = Ber/\sqrt{2eU/m}$. Разрешив это уравнение относительно m, выразите m через B, r, U и e.

23-3. Пучок электронов не только слегка размазывался бы в вертикальном направлении, но благодаря тому, что электроны представляют собой заряженные частицы, движущиеся в магнитном поле, они отклонялись бы в сторону, в направлении, перпендикулярном к их скорости и к магнитному полю.

23-4. Длина волны сигнала равна

$$\lambda = c/\nu = (3\cdot 10^8 \text{ м/с})/(3\cdot 10^9 \text{ Гц}) = 1\cdot 10^{-1} \text{ м} = 10 \text{ см}.$$

Такая длина волны используется в микроволновых печах для приготовления пищи.

23-5. Закон квантования требует, чтобы момент импульса системы мог изменяться только на целое число единиц $\hbar$. Когда собственный момент импульса равен $1\hbar$, его направление относительно оси может изменяться от направления вдоль до перпендикулярного (его проекция на первоначальное направление изменяется при этом от $1\hbar$ до $0\hbar$), или от перпендикулярного направления до антипараллельного исходной оси (проекция изменяется на единицу от $0\hbar$ до $-1\hbar$).

Когда собственный спин равен $(1/2)\hbar$, проекция момента импульса на некоторое направление может измениться на $1\hbar$ только тогда, когда частица переворачивается из параллельного направления в антипараллельное: $(+1/2)\hbar - (-1/2)\hbar$.

23-6. Это не совсем так. Уравнения квантовой механики зависят от геометрии окружения, природы частицы, от положений других частиц. Над решениями этих уравнений (которые математически могут иметь волновой характер в пространстве и времени) производятся затем действия, чтобы получить вероятность обнаружения частицы в определенном положении или с определенным значением импульса. Вероятностная природа таких предсказаний соответствует реальной экспериментальной ситуации. Многократные повторные измерения над одной и той же атомной системой обычно дают распределение значений, центр которого находится при наиболее вероятном значении.

23-7. Если радиус шарика r_0, его объем равен $V = (4/3)\pi r_0^3$. Объем, занимаемый A шариками при плотной упаковке, будет равен $V_{полн} = KA(4/3)\pi r_0^3$, где K – коэффициент заполнения объема плотно прилегающими сферами, значение которого близко к 1. Поэтому радиус всего ядра был бы равен $r = K^{1/3} r_0 A^{1/3}$.

23-8. Размер атома водорода в невозбужденном состоянии равен

$$r = \frac{1\cdot(10^{-34})^2}{10^{-30}\cdot 10^{10}\cdot(10^{-19})^2} = 10^{-10}\ \text{м}.$$

Таков по порядку величины размер любого атома!

23-9. Энергия электрона для самой низкой орбиты в атоме водорода равна

$$E_{\text{полн}} = -\frac{1}{2}(10^{10})^2\frac{10^{-30}\cdot(10^{-19})^4}{1\cdot(10^{-34})^2} \approx$$

$$\approx -10^{-18}\ \text{Дж} \approx -10\ \text{эВ}.$$

23-10. Момент импульса электрона на первой боровской орбите *в точности* равен $\hbar$. Поскольку разрешенные значения орбитального момента импульса равны целому числу основных единиц, неопределенность момента импульса ΔL равна нулю. Поэтому $\Delta\theta = \infty$. Угловое положение θ оказывается совершенно не определенным. Такая ситуация несовместима с моделью, в которой рассматривается действительное движение электрона из одного положения в другое по орбите.

23-11. И в самом деле, трудно учесть в расчетах взаимодействие более чем двух тел. Однако сложные системы иногда можно рассматривать в первом приближении состоящими из основной неподвижной части, в то время как движется только одно тело. Например, в случае молекулы водорода примем, что имеющие большую массу протоны неподвижны по отношению друг к другу, а два электрона находятся в движении. Задача, таким образом, сводится к расчету поведения двух электронов, движущихся вокруг закрепленных центров. В случае хлористого натрия внутренние электроны в значительной мере заэкранированы от того, что происходит на поверхности атомов. В первом приближении, когда атом хлора захватывает лишний электрон у атома натрия, остается только взаимодействие двух тел — ионов натрия и хлора.

23-12. Каждая зона расщеплена ровно на столько тесно расположенных энергетических уровней, сколько атомов содержится в образце кристалла. Атомы определенного типа могут поставлять по два электрона для блуждания по кристаллу. На каждом отдельном уровне энергии может находиться по два электрона с противоположными спинами.

23-13. Возможно, что в одном из веществ электроны насыщают разрешенные для этого вещества уровни энергии и уже не могут набирать энергию маленькими порциями. Однако небольшой порции энергии может быть достаточно для того, чтобы сдвинуть их в соседнее вещество со свободной энергетической зоной. Когда электрическое поле ускоряет электроны именно в этом направлении, они могут набирать энергию.

23-14. Нет. Обратите внимание, что квант энергии зависит от частоты. Возможно испускание или поглощение бесконечно малых порций энергии излучения, хотя и только на очень низких частотах, соответствующих большим длинам волн.

23-15. Фотон синего света сообщит атому энергию, равную

$$E = h\nu =$$

$$= (6{,}6\cdot 10^{-34}\ \text{Дж}\cdot\text{с})(7{,}7\cdot 10^{14}\ \text{Гц}) =$$

$$= 4{,}95\cdot 10^{-19}\ \text{Дж} = 3{,}1\ \text{эВ}.$$

Как мы видели, энергия связи валентных электронов в атомах щелочных металлов имеет такой же порядок величины. Очевидно, что фотоны видимого света могут освобождать электроны и вызывать в веществе химические превращения — люди могут получить солнечные ожоги, краски выгорают, происходит фотосинтез, возможен фотографический процесс.

23-16. Поскольку установка занята фотонами только $3\cdot 10^{-3}$ с на протяжении 1 с, вероятность того, что там будут находиться два фотона в одно и то же время, равна приблизительно 0,3%. Можно считать, что возможность конструктивной или деструктивной интерференции между фотонами практически исключена.

23-17. Теоретически — да; практически — нет. Дефект массы в этом случае настолько мал, что его невозможно измерить. Энергии химических связей лежат в диапазоне нескольких электронвольт; энергии связи ядер в миллион раз больше.

23-18. Когда заряженная частица движется сквозь вещество, она теряет энергию, раздавая ее атомам этого вещества. Прямые удары по ядрам атомов мишени случаются редко из-за очень малых размеров ядер. Бóльшая часть энергии бомбардирующих дейтронов была бы растрачена при ионизации атомов дейтериевого льда.

23-19. Высвобожденная при делении 1 моля урана энергия равна $6 \cdot 10^{23}$ ядер $\times$ $\times\ 200 \cdot 10^6$ эВ/ядро $\cdot\ 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж/эВ $\approx$ $\approx 2 \cdot 10^{13}$ Дж. Примерно такую энергию производят за 3 ч электростанции на Ниагарском водопаде.

Задачи

1. Какую энергию может сообщить электрону фотон ультрафиолетового излучения, если его длина волны равна $1 \cdot 10^{-7}$ м?

2. Чему равен диаметр капельки масла в опыте Милликена, когда она несет на себе один избыточный электрон, если ее можно удержать от падения электрическим полем напряженностью $1 \cdot 10^4$ В/м? (Примите, что плотность масла такая же, как и воды).

3. Если электрон ускорен разностью потенциалов 100 000 В и затем направлен в магнитное поле 1000 Гс ($1 \cdot 10^{-1}$ Тл), каким будет радиус кривизны его траектории?

4. Гамма-квант с энергией 2,6 МэВ рождает электронную пару. Чему равна кинетическая энергия электрона и позитрона, если избыток энергии поровну разделился между ними?

5. Как может электрон (или протон) иметь спин $(1/2)\,\hbar$, если естественная единица момента импульса равна $1\ \hbar$?

6. Покажите, что резонансная частота переворота электронов в магнитном поле 1000 Гс равна приблизительно 3000 МГц.

7. Чему равна длина волны электронов, ускоренных напряжением 1000 В в электронном микроскопе? Если бы эта длина волны являлась ограничивающим фактором (это не так), насколько малый объект можно было бы изучать под таким микроскопом?

8. Какой была бы неопределенность импульса электрона, если бы он был заключен в области столь малой, как атомное ядро, имеющее диаметр 10^{-14} м? Какой была бы возможная энергия такого электрона в МэВ? (Для энергий, значительно превышающих энергию покоя частицы, энергия приближенно равна pc, где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.)

9. В течение очень короткого промежутка времени нейтральный π^0-мезон может иметь массу-энергию столь же большую, как и пара протон – антипротон, поскольку на коротком временном интервале энергия любой системы имеет неопределенность, величина которой дается принципом Гейзенберга. Таким образом, в течение коротких промежутков времени энергия не обязательно сохраняется. Чему равен наибольший промежуток времени, в течение которого π^0-мезон может существовать в виде пары протон – антипротон? Требуемая для этого дополнительная энергия имеет порядок 2 ГэВ ($2 \cdot 10^9$ эВ).

10. Каков приближенный радиус ядра и сколько нейтронов оно содержит у ^{39}K (калий), ^{56}Fe (железо), ^{209}Pb (свинец)?

11. Чему равна скорость электрона в боровском атоме водорода для $n = 1$?

12. Чему равна разность энергий в электрон-вольтах между двумя линиями натрия: $\lambda_1 = 5{,}896 \cdot 10^{-7}$ м и $\lambda_2 = 5{,}890 \cdot 10^{-7}$ м?

13. Может ли красный свет с длиной волны $7 \cdot 10^{-7}$ м выбивать электроны из металла с работой выхода 1 эВ? Если может, то какова максимальная кинетическая энергия электронов?

14. Объясните своими словами и нарисуйте схему эксперимента по интерференции света, когда в приборе в каждый момент находится только один фотон.

15. Приведите примеры двух явлений, наиболее просто описываемых с помощью волновой модели света; приведите примеры двух явлений, наиболее просто описываемых корпускулярной моделью света. Объясните, почему между этими моделями нет противоречия.

16. Работа выхода фотоэлектрона из некоторого щелочного металла равна $3{,}0 \cdot 10^{-19}$ Дж. 1. Чему равна наибольшая длина волны света, вызывающего фотоэмиссию? 2. Чему равна максимальная кинетическая энергия электронов, если длина волны света равна $4{,}4 \cdot 10^{-7}$ м? 3. Какое задерживающее напряжение запрет ток в случае света из 2?

17. Объясните своими словами и с помощью рисунков, почему классическая модель равнораспределения энергии, предсказывающая распределение энергии между осцилляторами в стенках полости черного тела и заключенным в ней излучением, привела к парадоксальной «ультрафиолетовой катастрофе».

18. Перечислите длины волн для первых десяти мод стоячих волн в одномерной трубе длиной 1 м. Волны должны образовывать узлы на обоих концах трубы. Обратите внимание, что число высокочастотных мод неограничено.

19. Найдите полную энергию связи в электрон-вольтах для ядра $^{12}_{6}$C, которое по определению имеет массу, равную 12 а. е. м. Чему равна энергия связи на нуклон? (Используйте значения атомных постоянных.)

20. На основе анализа рассеяния нейтронов низкой энергии в кристаллах можно исследовать детали атомной структуры. Чему равны импульс и энергия нейтрона с длиной волны $2 \cdot 10^{-10}$ м (равной диаметру атома)?

21. Предположим, что к существующему ядру, которое уже содержит 100 протонов, добавляется еще один протон. Если среднее расстояние между добавляемым протоном и остальным зарядом равно $1 \cdot 10^{-14}$ м, насколько велика энергия электростатического отталкивания, которая вычитается из энергии связи присоединяемого протона? Ответ выразите в МэВ.

22. Сколько альфа-частиц и сколько бета-частиц испускается при превращении $^{238}_{92}U$ в $^{206}_{82}Pb$?

23. Сколько джоулей высвободилось бы при полном делении 1 $м^3$ $^{235}_{92}U$? Плотность $^{235}_{92}U$ в 19 раз больше, чем у воды.

24. Следует ли ожидать, что продукты деления ядер будут испускать положительные или отрицательные бета-частицы? Почему?

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ЭЛЕМЕНТОВ Д. И. МЕНДЕЛЕЕВА

ПЕРИОД	РЯД	ГРУППЫ I	II	III	IV	V
1	1	H 1 1,00797 ВОДОРОД				
2	2	Li 3 6,939 ЛИТИЙ	Be 4 9,0122 БЕРИЛЛИЙ	B 5 10,811 БОР	C 6 12,01115 УГЛЕРОД	N 7 14,0067 АЗОТ
3	3	Na 11 22,9898 НАТРИЙ	Mg 12 24,31 МАГНИЙ	Al 13 26,9815 АЛЮМИНИЙ	Si 14 28,086 КРЕМНИЙ	P 15 30,9738 ФОСФОР
4	4	K 19 39,102 КАЛИЙ	Ca 20 40,08 КАЛЬЦИЙ	21 44,956 Sc СКАНДИЙ	22 47,90 Ti ТИТАН	23 50,942 V ВАНАДИЙ
	5	29 63,546 Cu МЕДЬ	30 65,37 Zn ЦИНК	Ga 31 69,72 ГАЛЛИЙ	Ge 32 72,59 ГЕРМАНИЙ	As 33 74,92 МЫШЬЯК
5	6	Rb 37 85,47 РУБИДИЙ	Sr 38 87,62 СТРОНЦИЙ	39 88,905 Y ИТТРИЙ	40 91,22 Zr ЦИРКОНИЙ	41 92,906 Nb НИОБИЙ
	7	47 107,868 Ag СЕРЕБРО	48 112,40 Cd КАДМИЙ	In 49 114,82 ИНДИЙ	Sn 50 118,69 ОЛОВО	Sb 51 121,75 СУРЬМА
6	8	Cs 55 132,905 ЦЕЗИЙ	Ba 56 137,34 БАРИЙ	57 * 138,91 La ЛАНТАН	72 178,49 Hf ГАФНИЙ	73 180,95 Ta ТАНТАЛ
	9	79 196,967 Au ЗОЛОТО	80 200,59 Hg РТУТЬ	Tl 81 204,37 ТАЛЛИЙ	Pb 82 207,19 СВИНЕЦ	Bi 83 208,98 ВИСМУТ
7	10	Fr 87 (223) ФРАНЦИЙ	Ra 88 (226) РАДИЙ	89 ** (227) Ac АКТИНИЙ	Ku 104 (260) КУРЧАТОВИЙ	

* ЛАНТАНОИДЫ

58 140,12 Ce ЦЕРИЙ	59 140,91 Pr ПРАЗЕОДИМ	60 144,24 Nd НЕОДИМ	61 (145) Pm ПРОМЕТИЙ	62 150,35 Sm САМАРИЙ	63 151,96 Eu ЕВРОПИЙ	64 157,25 Gd ГАДОЛИНИЙ
65 158,92 Tb ТЕРБИЙ	66 162,50 Dy ДИСПРОЗИЙ	67 164,93 Ho ГОЛЬМИЙ	68 167,26 Er ЭРБИЙ	69 168,93 Tm ТУЛИЙ	70 173,04 Yb ИТТЕРБИЙ	71 174,97 Lu ЛЮТЕЦИЙ

Целое число в скобках—массовое число наиболее устойчивого радиоизотопа

ЭЛЕМЕНТОВ					
VI	VII	VIII			0
					2 He 4,0026 ГЕЛИЙ
8 O 15,9994 КИСЛОРОД	9 F 18,9984 ФТОР				10 Ne 20,183 НЕОН
16 S 32,064 СЕРА	17 Cl 35,453 ХЛОР				18 Ar 39,948 АРГОН
24 Cr 51,996 ХРОМ	25 Mn 54,938 МАРГАНЕЦ	26 Fe 55,847 ЖЕЛЕЗО	27 Co 58,933 КОБАЛЬТ	28 Ni 58,71 НИКЕЛЬ	
34 Se 78,96 СЕЛЕН	35 Br 79,90 БРОМ				36 Kr 83,80 КРИПТОН
42 Mo 95,94 МОЛИБДЕН	43 Tc (99) ТЕХНЕЦИЙ	44 Ru 101,07 РУТЕНИЙ	45 Rh 102,905 РОДИЙ	46 Pd 106,4 ПАЛЛАДИЙ	
52 Te 127,60 ТЕЛЛУР	53 I 126,904 ИОД				54 Xe 131,30 КСЕНОН
74 W 183,85 ВОЛЬФРАМ	75 Re 186,2 РЕНИЙ	76 Os 190,2 ОСМИЙ	77 Ir 192,2 ИРИДИЙ	78 Pt 195,09 ПЛАТИНА	
84 Po (210) ПОЛОНИЙ	85 At (210) АСТАТ				86 Rn (222) РАДОН

** АКТИНОИДЫ

90 Th 232,038 ТОРИЙ	91 Pa (231) ПРОТАКТИНИЙ	92 U 238,03 УРАН	93 Np (237) НЕПТУНИЙ	94 Pu (242) ПЛУТОНИЙ	95 Am (243) АМЕРИЦИЙ	96 Cm (247) КЮРИЙ
97 Bk (247) БЕРКЛИЙ	98 Cf (249) КАЛИФОРНИЙ	99 Es (254) ЭЙНШТЕЙНИЙ	100 Fm (253) ФЕРМИЙ	101 Md (256) МЕНДЕЛЕВИЙ	102 (No) (256) (НОБЕЛИЙ)	103 Lr (257) ЛОУРЕНСИЙ

ЕДИНИЦЫ И РАЗМЕРНОСТИ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН В СИ

Определения единиц физических величин приведены для основных (выделены полужирным шрифтом) и дополнительных единиц СИ. Внесистемные единицы, допускаемые к применению наравне с единицами СИ, отмечены кружком

Величина		Единица		
наименование	размерность	наименование	обозначение	связь с основными единицами СИ
Длина	L	**метр**	**м**	**Основная единица** Метр равен расстоянию, проходимому светом в вакууме за 1/299 792 458 секунды
		°астрономическая единица длины	а. е.	1 а. е. = $1{,}49598 \cdot 10^{11}$ м
		°световой год	св. год	1 св. год = $9{,}4605 \cdot 10^{15}$ м
		°парсек	пк	1 пк = $3{,}0857 \cdot 10^{16}$ м
Площадь	L^2	квадратный метр	$м^2$	
		°гектар	га	1 га = 10^4 $м^2$
Объем	L^3	кубический метр	$м^3$	
		°литр	л	1л = 10^{-3} $м^3$
Плоский угол	–	радиан	рад	*Дополнительная единица* Радиан равен углу между двумя радиусами окружности, длина дуги между которыми равна радиусу.
		°градус	...°	1° = (π/180) рад
		°минута	...′	1′ = (π/10800) рад
		°секунда	...″	1″ = (π/648000) рад
Телесный угол	–	стерадиан	ср	*Дополнительная единица* Стерадиан равен телесному углу с вершиной в центре сферы, вырезающему на поверхности сферы площадь, равную площади квадрата со стороной, равной радиусу сферы
Время	T	**секунда**	**с**	**Основная единица** Секунда равна 9 192 631 770 периодов излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133

Величина		Единица		
наименование	размерность	наименование	обозначение	связь с основными единицами СИ
		°минута °час °сутки	мин ч сут	1 мин = 60 с 1 ч = 3600 с 1 сут = 86 400 с
Скорость	LT^{-1}	метр в секунду	м/с	
Ускорение	LT^{-2}	метр на секунду в квадрате	м/с^2	
Угловая скорость	T^{-1}	радиан в секунду	рад/с	1 рад/с = 1 с$^{-1}$
Угловое ускорение	T^{-2}	радиан на секунду в квадрате	рад/с^2	1 рад/с^2 = 1 с$^{-2}$
Частота периодического процесса	T^{-1}	герц	Гц	1 Гц = 1 с$^{-1}$
Частота вращения	T^{-1}	секунда в минус первой степени	с$^{-1}$	
Масса	**M**	**килограмм** °тонна °атомная единица массы	кг т а. е. м.	**Основная единица** Килограмм равен массе международного прототипа килограмма 1 т = 10^3 кг 1 а. е. м. = $1{,}6605655 \cdot 10^{-27}$ кг
Плотность	$L^{-3}M$	килограмм на кубический метр	кг/м^3	
Удельный объем	L^3M^{-1}	кубический метр на килограмм	м^3/кг	
Массовый расход	MT^{-1}	килограмм в секунду	кг/с	
Объемный расход	L^3T^{-1}	кубический метр в секунду	м^3/с	
Сила	LMT^{-2}	ньютон	Н	1 Н = 1 кг · м · с$^{-2}$
Давление	$L^{-1}MT^{-2}$	паскаль	Па	1 Па = 1 Н/м^2 = 1 м$^{-1}$ · кг · с$^{-2}$
Жесткость	MT^{-2}	ньютон на метр	Н/м	1 Н/м = 1 кг · с$^{-2}$
Напряжение	$L^{-1}MT^{-2}$	паскаль	Па	1 Па = 1 Н/м^2 = 1 м$^{-1}$ · кг · с$^{-2}$
Динамическая вязкость	$L^{-1}MT^{-1}$	паскаль-секунда	Па · с	1 Па · с = 1 м$^{-1}$ · кг · с$^{-1}$
Кинематическая вязкость	L^2T^{-1}	квадратный метр на секунду	м^2/с	

Величина		Единица		
наименование	размерность	наименование	обозначение	связь с основными единицами СИ
Поверхностное натяжение	MT^{-2}	ньютон на метр	Н/м	1 Н/м = 1 кг · с$^{-2}$
Импульс (количество движения)	LMT^{-1}	килограмм-метр в секунду	кг · м/с	
Момент силы	L^2MT^{-2}	ньютон-метр	Н · м	1 Н · м = 1 м^2 · кг · с$^{-2}$
Момент импульса (момент количества движения)	L^2MT^{-1}	килограмм-метр в квадрате в секунду	кг · м^2/с	
Момент инерции	L^2M	килограмм-метр в квадрате	кг · м^2	
Работа, энергия	L^2MT^{-2}	джоуль	Дж	1 Дж = 1 Н · м = 1 м^2 · кг · с$^{-2}$
Мощность, поток энергии	L^2MT^{-3}	ватт	Вт	1 Вт = 1 Дж/с = 1 м^2 · кг · с$^{-3}$
Температура (термодинамическая)	θ	**кельвин** °градус Цельсия	**К** °С	**Основная единица** Кельвин равен 1/273,16 части термодинамической температуры тройной точки воды t/°С = T/ К − 273,15
Температурный коэффициент	θ^{-1}	кельвин в минус первой степени	К$^{-1}$	
Температурный градиент	$L^{-1}\theta$	кельвин на метр	К/м	
Количество вещества	**N**	**моль**	**моль**	**Основная единица** Моль равен количеству вещества системы, содержащей столько же структурных элементов, сколько содержится атомов в углероде-12 массой 0,012 кг
Молярная масса	MN^{-1}	килограмм на моль	кг/моль	
Молярный объем	L^3N^{-1}	кубический метр на моль	м^3/моль	
Количество теплоты (теплота)	L^2MT^{-2}	джоуль	Дж	1 Дж = 1 Н · м = 1 м^2 · кг · с$^{-2}$
Удельная теплота	L^2T^{-2}	джоуль на килограмм	Дж/кг	1 Дж/кг = 1 м^2 · с$^{-2}$
Молярная теплота	$L^2MT^{-2}N^{-1}$	джоуль на моль	Дж/моль	1 Дж/моль = = 1 м^2 · кг · с$^{-2}$моль$^{-1}$
Теплоемкость, энтропия	$L^2MT^{-2}\theta^{-1}$	джоуль на кельвин	Дж/К	1 Дж/К = 1 м^2 · кг · с$^{-2}$ · К$^{-1}$

Величина		Единица		
наименование	размерность	наименование	обозначение	связь с основными единицами СИ
Удельная теплоемкость, удельная энтропия	$L^2T^{-2}\theta^{-1}$	джоуль на килограмм-кельвин	Дж/(кг · К)	1 Дж/(кг · К) = 1 м^2 · с$^{-2}$ · К$^{-1}$
Молярная теплоемкость, молярная энтропия	$L^2MT^{-2}\theta^{-1}N^{-1}$	джоуль на моль-кельвин	Дж/(моль · К)	1 Дж/(моль · К) = = 1 м^2 · кг · с$^{-2}$ · К$^{-1}$ · моль$^{-1}$
Тепловой поток	L^2MT^{-3}	ватт	Вт	1 Вт = 1 Дж/с = 1 м^2 · кг · с$^{-3}$
Плотность теплового потока	MT^{-3}	ватт на квадратный метр	Вт/м^2	1 Вт/м^2 = кг · с$^{-3}$
Теплопроводность	$LMT^{-3}\theta^{-1}$	ватт на метр-кельвин	Вт/(м · К)	1 Вт/(м · К) = = 1 м · кг · с$^{-3}$ · К$^{-1}$
Коэффициент теплопередачи	$MT^{-3}\theta^{-1}$	ватт на квадратный метр-кельвин	Вт/(м^2 · К)	1 Вт/(м^2 · К) = 1 кг · с$^{-3}$ · К$^{-1}$
Концентрация (плотность числа частиц)	L^{-3}	метр в минус третьей степени	м$^{-3}$	
Молярная концентрация	$L^{-3}N$	моль на кубический метр	моль/м^3	
Коэффициент диффузии	L^2T^{-1}	квадратный метр в секунду	м^2/с	
Сила электрического тока	**I**	**ампер**	**А**	**Основная единица** Ампер равен силе неизменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным проводникам бесконечной длины и ничтожно малой площади кругового поперечного сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м один от другого, вызвал бы на каждом участке проводника длиной 1 м силу взаимодействия, равную 2 · 10^{-7} Н
Плотность электрического тока	$L^{-2}I$	ампер на квадратный метр	А/м^2	
Количество электричества (электрический заряд)	TI	кулон	Кл	1 Кл = 1 с · А
Поверхностная плотность электрического заряда	$L^{-2}TI$	кулон на квадратный метр	Кл/м^2	1 Кл/м^2 = 1 м$^{-2}$ · с · А

Величина		Единица		
наименование	размерность	наименование	обозначение	связь с основными единицами СИ
Пространственная плотность электрического заряда	$L^{-3}TI$	кулон на кубический метр	Кл/м^3	1 Кл/м^3 = 1 м$^{-3}$·с·А
Электрическое напряжение, электрический потенциал, разность электрических потенциалов, электродвижущая сила	$L^2MT^{-3}I^{-1}$	вольт	В	1 В = 1 Вт/А = = 1 м^2·кг·с$^{-3}$·А$^{-1}$
Напряженность электрического поля	$LMT^{-3}I^{-1}$	вольт на метр	В/м	1 В/м = 1 Вт/(А·м) = = 1 м·кг·с$^{-3}$·А$^{-1}$
Электрическое сопротивление	$L^2MT^{-3}I^{-2}$	ом	Ом	1 Ом = 1 В/А = = 1 м^2·кг·с$^{-3}$·А$^{-2}$
Удельное электрическое сопротивление	$L^3MT^{-3}I^{-2}$	ом-метр	Ом·м	1 Ом·м = 1 м^3·кг·с$^{-3}$·А$^{-2}$
Электрическая проводимость	$L^{-2}M^{-1}T^3I^2$	сименс	См	1 См = 1 Ом$^{-1}$ = = 1 м$^{-2}$·кг$^{-1}$·кг$^{-1}$·с^3·А^2
Удельная электрическая проводимость	$L^{-3}M^{-1}T^3I^2$	сименс на метр	См/м	1 См/м = 1 Ом$^{-1}$·м$^{-1}$ = = 1 м$^{-3}$·кг$^{-1}$·с^3·А^2
Электрическая емкость	$L^{-2}M^{-1}T^4I^2$	фарад	Ф	1 Ф = 1 Кл/В = = 1 м$^{-2}$·кг$^{-1}$·с^4·А^2
Электрическая постоянная, абсолютная диэлектрическая проницаемость	$L^{-3}M^{-1}T^4I^2$	фарад на метр	Ф/м	1 Ф/м = 1 м$^{-3}$·кг$^{-1}$·с^4·А^2
Поток электрического смещения	TI	кулон	Кл	1 Кл = 1 с·А
Электрическое смещение	$L^{-2}TI$	кулон на квадратный метр	Кл/м^2	1 Кл/м^2 = 1 м$^{-2}$·с·А
Магнитный поток (поток магнитной индукции)	$L^2MT^{-2}I^{-1}$	вебер	Вб	1 Вб = 1 В·с = 1 Тл·м^2 = = 1 м^2·кг·с$^{-2}$·А$^{-1}$
Магнитная индукция (плотность магнитного потока)	$MT^{-2}I^{-1}$	тесла	Тл	1 Тл = 1 В·с/м^2 = 1 Вб/м^2 = = 1 кг·с$^{-2}$·А$^{-1}$
Индуктивность	$L^2MT^{-2}I^{-2}$	генри	Гн	1 Гн = 1 м^2·кг·с$^{-2}$·А$^{-2}$

Величина		Единица		
наименование	размерность	наименование	обозначение	связь с основными единицами СИ
Магнитная постоянная, абсолютная магнитная проницаемость	$LMT^{-2}I^{-2}$	генри на метр	Гн/м	1 Гн/м = 1 м · кг · $с^{-2}$ · $А^{-2}$
Напряженность магнитного поля	$L^{-1}I$	ампер на метр	А/м	
Энергия излучения	L^2MT^{-2}	джоуль	Дж	1 Дж = 1 $м^2$ · кг · $с^{-2}$
Мощность излучения (поток излучения)	L^2MT^{-3}	ватт	Вт	1 Вт = 1 Дж/с = 1 $м^2$ · кг · $с^{-3}$
Интенсивность излучения (плотность потока излучения)	MT^{-3}	ватт на квадратный метр	Вт/$м^2$	1 Вт/$м^2$ = 1 кг · $с^{-3}$
Поток частиц	T^{-1}	секунда в минус первой степени	$с^{-1}$	
Плотность потока частиц	$L^{-2}T^{-1}$	секунда в минус первой степени-метр в минус второй степени	$с^{-1}$ · $м^{-2}$	
Сила света	**J**	**кандела**	**кд**	**Основная единица** Кандела равна силе света в заданном направлении источника, испускающего монохроматическое излучение частотой 540 · 10^{12} Гц, энергетическая сила света которого в этом направлении составляет 1/683 Вт/ср
Световой поток	J	люмен	лм	1 лм = 1 кд · ср
Световая энергия	TJ	люмен-секунда	лм · с	1лм · с = 1 с · кд · ср
Светимость	$L^{-2}J$	люмен на квадратный метр	лм/$м^2$	1 лм/$м^2$ = 1 $м^{-2}$ · кд · ср
Освещенность	$L^{-2}J$	люкс	лк	1 лк = 1 лм/$м^2$ = = 1 $м^{-2}$ · кд · ср

Продолжение

Величина		Единица		
наименование	размерность	наименование	обозначение	связь с основными единицами СИ
Яркость	$L^{-2}J$	кандела на квадратный метр	$кд/м^2$	
Оптическая сила	L^{-1}	°диоптрия	дптр	1 дптр $= 1$ $м^{-1}$
Энергетическая сила света (сила излучения)	L^2MT^{-3}	ватт на стерадиан	Вт/ср	1 Вт/ср $= 1$ $м^2 \cdot кг \cdot с^{-3} \cdot ср^{-1}$
Энергетическая светимость (излучаемость)	MT^{-3}	ватт на квадратный метр	$Вт/м^2$	1 $Вт/м^2 = 1$ $кг \cdot с^{-3}$
Энергетическая освещенность (облученность)	MT^{-3}	ватт на квадратный метр	$Вт/м^2$	1 $Вт/м^2 = 1$ $кг \cdot с^{-3}$
Энергетическая яркость (лучистость)	MT^{-3}	ватт на стерадиан-квадратный метр	$Вт/(ср \cdot м^2)$	1 $Вт/(ср \cdot м^2) = 1$ $кг \cdot с^{-3} \cdot ср^{-1}$

ОГЛАВЛЕНИЕ

СОДЕРЖАНИЕ ТОМА 1

Кл. Э. Суорц

НЕОБЫКНОВЕННАЯ ФИЗИКА ОБЫКНОВЕННЫХ ЯВЛЕНИЙ

Том 2

Редактор *Н. А. Михалина*

Художественные редакторы *Т. Н. Кольченко, Л. Н. Романенкова*

Технический редактор *С. Я. Шкляр*

Корректоры *Е. Ю. Рычагова, Н. Б. Румянцева*

ИБ № 12989

Сдано в набор 28.01.86. Подписано к печати 13.01.87. Формат $70 \times 100/_{16}$. Бумага офсетная кн.-журн. Гарнитура таймс. Печать офсетная. Усл. печ. л. 31,2. Усл. кр.-отт. 62,4. Уч.-изд. л. 35,14. Тираж 173 000 экз. (2-й завод 50 001—173 000 экз.) Заказ № 955. Цена 2 р.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Чкаловский пр., 15

2 р.

Необыкновенная ФИЗИКА обыкновенных ЯВЛЕНИЙ

2

Кл. Э. Суорц